УДК 681.326:519.713

МЕТРИКА АЛГЕБРЫ ВЕКТОРНОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ КИБЕРНЕТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

ХАХАНОВ В.И., МИЩЕНКО А.С., ВАРЕЦА В.В.

Предлагаются алгебраические структуры, определяющие векторно-матричные преобразования в дискретном векторном булевом пространстве при анализе информации на основе логических операций над ассоциативными данными.

1. Введение

Цель исследования заключается в существенном уменьшении времени анализа ассоциативных структур данных за счет разработки метрики векторной алгебры логики и параллельной реализации векторных операций в специализированном мультипроцессорном устройстве.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие *задачи*: 1. Разработка сигнатуры, удовлетворяющей системе аксиом, тождеств и законов для носителя, представленного множеством ассоциативных векторов равной длины в логическом векторном пространстве. 2. Создание сигнатуры отношений для носителя, представленного парой: ассоциативный вектор–ассоциативная матрица. 3. Разработка сигнатуры преобразований для носителя, представленного парой ассоциативных матриц одинакового размера.

Источники: 1. Технологии параллельных вычислений на основе специализированных мультипроцессорных систем [1-2, 10, 11, 15]. 2. Алгебраические структуры, ориентированные на создание математического аппарата параллельных вычислений [3-4, 7-10]. 3. Процесс-модели для решения задач реального времени на основе эффективных параллельных вычислений [5, 6, 11, 13].

2. Неарифметическая B-метрика векторного измерения

Векторное дискретное логическое (булево) пространство определяет взаимодействие объектов путем использования трех аксиом (тождественности, симметрии и треугольника), формирующих неарифметическую B-метрику векторного измерения:

$$B = \begin{cases} d(a,b) = a \oplus b = (a_i \oplus b_i), i = \overline{1,n}; \\ d(a,b) = [0 \leftarrow \forall i(d_i = 0)] \leftrightarrow a = b; \\ d(a,b) = d(b,a); \\ d(a,b) \oplus d(b,c) = d(a,c), \\ \oplus = [d(a,b) \wedge \bar{d}(b,c)] \vee [\bar{d}(a,b) \wedge d(b,c)]. \end{cases}$$

Вершины в транзитивном треугольнике (a,b,c) (рис. 1) есть векторы, идентифицирующие объекты в n-мерном булевом B-пространстве, стороны треугольника d(a,b), d(b,c), d(a,c) есть расстояния между вершинами, которые также представлены векторами размерности n, где каждый разряд определен в том же алфавите, что и координаты векторов-вершин.

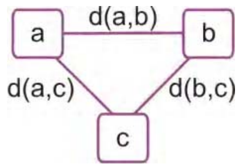

Рис. 1. Треугольник векторного транзитивного замыкания

Векторный транзитивный треугольник имеет полную аналогию численному измерению расстояния в метрическом M-пространстве, которое задается системой аксиом, определяющей взаимодействие одной, двух и трех точек в любом пространстве:

$$M = \begin{cases} d(a,b) = 0 \leftrightarrow a = b; \\ d(a,b) = d(b,a); \\ d(a,b) + d(b,c) \ge d(a,c). \end{cases}$$

Специфика аксиомы метрического треугольника заключается в численном (скалярном) сравнении расстояний трех объектов, когда интервальная неопределенность ответа – две стороны треугольника могут быть больше либо равны третьей – малопригодна для определения точной длины последней стороны. Устранить данный недостаток можно только в логическом векторном пространстве, которое может иметь детерминированное представление о каждом параметре состояния процесса или явления. Тогда численная неопределенность третьей стороны треугольника в векторном логическом пространстве приобретает форму точного двоичного вектора, который характеризует расстояние между двумя объектами и вычисляется на основе знания расстояний двух других сторон треугольника: $d(a,b) \oplus d(b,c) = d(a,c)$.

Три аксиомы определения метрики избыточны, по крайней мере для векторного пространства, где можно использовать только одну-единственную – взаимодействие трех точек: $d(a,b) \oplus d(b,c) \oplus d(a,c) = 0$. Из данного закона следуют два тождества, определяющие отношения для одной и двух точек пространства:

$$d(a,b) \oplus d(b,c) \oplus d(a,c) = 0 \rightarrow \begin{cases} d(a,b) = d(b,a) = 0 \rightarrow c = \varnothing; \\ d(a,a) = 0 \rightarrow \{b,c\} = \varnothing. \end{cases}$$

Здесь также интересным представляется следующий факт. Учитывая цикличность треугольника, по любым двум известным смежным (инцидентным) компонентам можно вычислять третий. Это относится как к состояниям или кодам вершин, так и к расстояниям между ними:

$\begin{cases} d(a,b)=d(a,c)\oplus d(b,c)\\ d(b,c)=d(a,b)\oplus d(a,c)\\ d(a,c)=d(a,b)\oplus d(b,c)\end{cases}$	$\begin{cases} d(b,c)=b\oplus c\\ d(a,c)=a\oplus c\\ d(a,b)=a\oplus b\end{cases}$	$\begin{cases} a=d(a,b)\oplus b\\ b=d(b,c)\oplus c\\ c=d(c,a)\oplus a\end{cases}$

Изоморфизм теории множеств по отношению к алгебре логики позволяет также определить векторное теоретико-множественное S-пространство, где аксиома треугольника задается симметрической разностью Δ, которая является аналогом операции xor в булевой алгебре:

$$S=\begin{cases} d(a,b)=a\Delta b=(a_i\Delta b_i), i=\overline{1,n};\\ d(a,b)=[\varnothing\leftarrow\forall i(d_i=\varnothing)]\leftrightarrow a=b;\\ d(a,b)=d(b,a);\\ d(a,b)\Delta d(b,c)=d(a,c),\\ \Delta=[d(a,b)\cap\tilde{d}(b,c)]\cup[\tilde{d}(a,b)\cap d(b,c)].\end{cases}$$

Здесь Δ – операция симметрической разности на четырехзначном теоретико-множественном алфавите $\alpha=\{0,1,x=\{0,1\},\varnothing\}$ представлена следующей таблицей:

Δ	0	1	x	$\varnothing$
0	$\varnothing$	x	1	0
1	x	$\varnothing$	0	1
x	1	0	$\varnothing$	x
$\varnothing$	0	1	x	$\varnothing$

.

При определении расстояния между двумя векторами в S-пространстве используется симметрическая разность, которая изоморфна xor-операции в булевом B-пространстве. Примеры вычисления расстояний между векторами в обоих пространствах (S,B) приведены ниже:

$$S=\begin{array}{|c|cccccccc|} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ b & x & x & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ c & x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline d(a,b) & 0 & 1 & \varnothing & \varnothing & \varnothing & x & \varnothing & x\\ d(b,c) & \varnothing & \varnothing & 1 & 1 & x & x & \varnothing & \varnothing\\ d(a,c) & 0 & 1 & 1 & 1 & x & \varnothing & \varnothing & x \end{array},$$

$$B=\begin{array}{|c|cccccccc|} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ b & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ c & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline d(a,b) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ d(b,c) & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ d(a,c) & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Вектор, равный нулю (пустому множеству) по всем координатам, означает полное совпадение результата с запросом. Равно как и вектор, равный единице (символу x) по всем разрядам, свидетельствует о полной противоречивости результата запросу.

Количество градаций одной переменной может быть конечным и кратным степени 2 числом $\alpha=2^n\rightarrow\{2^2=4,\ 2^4=16\}$, которое определяется мощностью булеана на универсуме из n примитивов. Иначе, симметрическая разность может существовать только на замкнутом относительно теоретико-множественных операций алфавите. Таким образом, взаимодействие двух объектов в векторном логическом пространстве может иметь как двоичную, так и многозначную детерминированную шкалу измерения взаимодействия. Диаграмма Хассе от любого конечного числа примитивов (1,2,3,4, …) может быть спрятана в переменную логического вектора. Более того, 16 градаций, например, взаимодействия векторов на четырех примитивах точно показывают не только степень близости по рассматриваемой переменной, но и в чем именно они расходятся – по каким примитивам или их сочетанию.

Векторная операция xor фактически сглаживает изменения в двух кодах или векторах, что представляет определенный интерес для создания цифровых фильтров. Если ее применить многократно, то можно получить двоичную пирамиду, где последняя вершина есть всегда нулевой вектор. Таким образом, построенная пирамида дает возможность за счет определенной избыточности исправлять ошибки, возникающие в процесс передачи информации.

Процедура свертки расстояний в целях проверки ошибок передачи данных для числа векторов, равных степени 2. 1) Вычислить все расстояния между двоичными кодами, включая первый и последний векторы, в результате чего получается замкнутая геометрическая фигура $c_i=a_i\oplus a_{i+1}(i=n\rightarrow i+1=0)$. 2) Вычислить все расстояния между непересекающимися парами полученных на первом этапе кодов $c_i=a_{2i-1}\oplus a_{2i}(i=1,2,3,...,n)$. 3) Повторять процедуру 2 до получения одного кода, равного нулю по всем координатам. Процедура иллюстрируется следующими вычислениями:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 0&1&0&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&1\\ 0&1&1&0\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 1&1&1&1\\ 0&0&0&1 \end{array}}\rightarrow\boxed{\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&0&0&1\\ 1&1&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&1&0\\ 0&1&0&0 \end{array}}\rightarrow\boxed{\begin{array}{cccc} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&1&0&1\\ 1&0&1&0 \end{array}}\rightarrow\boxed{\begin{array}{cccc} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{array}}\rightarrow\boxed{\begin{array}{cccc} 0&0&0&0 \end{array}}$$

Аналогичные действия можно выполнить и для многозначных векторов, где, например, каждая координата определена в четырехзначном теоретико-множественном алфавите, а процедура сводится к получению вектора пустых значений координат:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 0&x&0&1\\ 1&x&x&1\\ 1&x&1&x\\ 0&1&x&0\\ 1&x&1&0\\ 0&1&0&1\\ 1&x&1&1\\ x&0&x&1 \end{array}}\rightarrow\boxed{\begin{array}{cccc} x&\varnothing&1&\varnothing\\ \varnothing&\varnothing&0&0\\ x&0&0&1\\ x&0&0&\varnothing\\ x&0&x&x\\ x&0&x&\varnothing\\ 0&1&0&\varnothing\\ 1&1&1&\varnothing \end{array}}\rightarrow\boxed{\begin{array}{cccc} x&\varnothing&x&0\\ \varnothing&\varnothing&\varnothing&1\\ \varnothing&\varnothing&\varnothing&x\\ x&\varnothing&x&\varnothing \end{array}}\rightarrow\boxed{\begin{array}{cccc} x&\varnothing&x&x\\ x&\varnothing&x&x \end{array}}\rightarrow\boxed{\begin{array}{cccc} \varnothing&\varnothing&\varnothing&\varnothing \end{array}}$$

Здесь происходит свертка замкнутого пространства к одной точке (рис. 2) определенной по всем координатам символами пустого множества, путем вычисления расстояния между вектор-объектами, а затем – расстояния между вектор-расстояниями. Иначе, сумма по модулю всех векторов-расстояний, замкнутых в цикл, равна пустому вектору:

$$m_i = c_i \bigoplus_{i=1,n}^{j=|i+1|_n} c_j \to m = m_i \bigoplus_{i=1}^{n-1} m_{i+1}.$$

Но такая процедура имеет меньшую глубину диагностирования ошибок – возможна фиксация неверного разряда, в то время как по двоичному дереву свертывания пространства имеется возможность повысить глубину диагностирования до пары векторов.

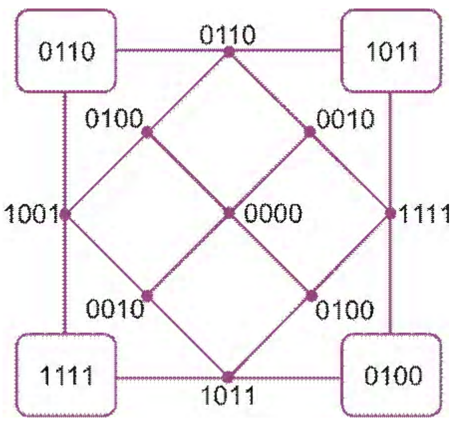

Рис. 2. Свертка замкнутого пространства

Свертка пространства представляет интерес для многих практических задач: 1) Диагностирование и исправление ошибок при передаче информации по каналам связи. 2) Поиск дефектов в цифровых изделиях на основе таблиц (функций) неисправностей. 3) Поиск дефектов в цифровых изделиях на основе многозначных таблиц (функций) неисправностей.

Сущность свертки пространства заложена в метрике транзитивного треугольника, которую можно преобразовать путем переноса правой части равенства в левую:

$$d(a,b) \oplus d(b,c) = d(a,c) \to d(a,b) \oplus d(b,c) \oplus d(a,c) = 0.$$

Данное определение ставит во главу угла не элементы множества, но отношения, что позволяет сократить систему аксиом метрики с трех до одной и распространить ее действие на сколь угодно сложные конструкции n-мерного пространства. Классическое задание метрики для определения взаимодействия одной, двух и трех точек в векторном логическом пространстве является частным случаем β-метрики при $i = 1,2,3$ соответственно:

$$M = \begin{cases} d_1 = 0 \leftrightarrow a = b; \\ d_1 \oplus d_2 = 0 \leftrightarrow d(a,b) = d(b,a); \\ d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 = 0 \leftrightarrow d(a,b) \oplus d(b,c) = d(a,c). \end{cases}$$

В частности, метрическое, функциональное и другие виды пространств в сумме также дают ноль. Например, фигура со сторонами 1, 2, 3, согласно всем школьным учебникам, не есть треугольник, поскольку три точки расположены на одной прямой (рис. 3). Но аксиома транзитивного замыкания метрики использует структуру, составленную из трех точек на плоскости с различными координатами, которая строго носит название треугольника. Тогда фигура со сторонами 1, 2, 3, согласно определению метрики, есть в чистом виде треугольник с двумя нулевыми углами и третьим, равным 180 градусов, где полностью выполняются условия для трех сторон: $a + b \geq c \to 1 + 2 = 3$.

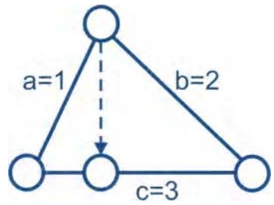

Рис. 3. Метрический треугольник

3. Выводы

Информационное векторное логическое пространство как подмножество метрического регулирует взаимодействие конечного числа объектов с помощью введенных определений, аксиом тождественности, симметрии и транзитивности треугольника. При этом последнее свойство вырождается в строгое равенство, что дает возможность потенциально уменьшить на треть объемы двоичной информации о взаимодействии объектов, благодаря свертке любого замкнутого логического пространства в нуль-вектор.

Бэта-метрика векторно-логического пространства, представленная нулевой суммой расстояний цикла двоичных кодов, создает фундаментальную основу для всех логических и ассоциативных задач синтеза и анализа, связанных с поиском, распознаванием и принятием решений.

На основе бэта-метрики и трех критериев качества взаимодействия векторных логических объектов в аналогичном пространстве создан бета-критерий, позволяющий эффективно точно и адекватно оценивать качество их взаимодействия при поиске, распознавании и принятии решений путем вычисления xor-функции.

Алгебра векторной логики создает инфраструктуру математического обслуживания векторного логического пространства для решения практических задач синтеза и анализа и состоит из трех компонентов: векторной, векторно-матричной и матричной алгебраических структур. Сигнатура алгебр задается стандартным набором логических векторных операций and, or, not, xor для определения взаимодействия между совместимыми объектами из носителя, которые образуют двоичные n-мерные векторы и соизмеримые по размерности матрицы.

Литература: 1. *Бондаренко М.Ф.* О мозгоподобных ЭВМ / М.Ф. Бондаренко, З.В. Дударь, И.А. Ефимова, В.А. Лещинский, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Радиоэлектроника и информатика. Харьков: ХНУРЭ. 2004. № 2. С. 89–105. **2.** *Cohen A.A.* Addressing architecture for Brain-like Massively Parallel Computers / Euromicro Symposium on Digital System Design (DSD'04). 2004. P. 594-597. **3.** *Кузнецов О.П.* Быстрые процессы мозга и обработка образов / / Новости искусственного интеллекта. 1998. №2. **4.** *Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е.* Интеллектуальное управление динамическими системами. М.: Физико-математическая литература. 2000. 352 с. **5.** *Липаев В.В.* Программная инженерия. Методологические основы. Учебник. М.: Теис, 2006. 608 с. **6.** *А.С.* №1439682. 22.07.88. Регистр сдвига / Какурин Н.Я., Хаханов В.И., Лобода В.Г., Какурина А.Н. 4с. **7.** *Гайдук С.М., Хаханов В.И., Обризан В.И., Каменюка Е.А.* Сферический мультипроцессор PRUS для решения булевых уравнений // Радиоэлектроника и информатика. Харьков, 2004. № 4(29). С.107-116. **8.** *Проектирование* и тестирование цифровых систем на кристаллах / В.И. Хаханов, Е.И. Литвинова, О.А. Гузь. Харьков: ХНУРЭ, 2009. 484с. **9.** *Проектирование* и верификация цифровых систем на кристаллах. Verilog & System Verilog / В.И. Хаханов, И.В. Хаханова, Е.И. Литвинова, О.А. Гузь. Харьков: Новое слово, 2010. 528с. **10.** *Акритас А.* Основы компьютерной алгебры с приложениями: Пер. с англ. / А. Акритас. М.: Мир. 1994. 544 с. **11.** *Аттетков А.В.* Методы оптимизации / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 440 с. **12.** Abramovici M. Digital System Testing and Testable Design / M. Abramovici, M.A. Breuer and A.D. Friedman. Comp. Sc. Press. 1998. 652 p. **13.** Densmore D. A Platform–Based taxonomy for ESL Design / Douglas Densmore, Roberto Passerone, Alberto Sangiovanni–Vincentelli // Design & Test of computers.– 2006. P. 359–373. **14.** *Автоматизация* диагностирования электронных устройств/ Ю.В.Малышенко и др./ Под ред. В.П.Чипулиса. М.: Энергоатомиздат, 1986. 216с. **15.** *Трахтенгерц Э.А.* Компьютерные методы реализации экономических и информационных управленческих решений. СИНТЕГ. 2009. 396 с.

Поступила в редколлегию 15.09.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Хаханов Владимир Иванович, декан факультета КИУ ХНУРЭ, д-р техн. наук, профессор кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: техническая диагностика цифровых систем, сетей и программных продуктов. Увлечения: баскетбол, футбол, горные лыжи. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-326. E-mail: hahanov@kture.kharkov.ua.

Мищенко Александр Сергеевич, аспирант кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: техническая диагностика цифровых систем и сетей. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-326, e-mail: alex@simplesolutions.com.ua

Вареца Виталий Викторович, аспирант кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: техническая диагностика цифровых систем и сетей. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-326.