МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СИНГУЛЯРНІМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Альджаафрех Мохаммад Ракан

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Одним из важнейших элементов экономики Украины всегда было и продолжает оставаться промышленное производство, которое отнюдь не безопасно в принципе, и уже изрядно устарело как морально, так и физически. В этой связи устройства и объединяющие их системы защиты персонала и окружающего населения особенно актуальны. Известно, что безопасность и эффективность производства являются противоречивыми критериями. Их объединение в возможно лишь в надсистеме [1, 2]. Такой подход позволил рассмотреть модель «человек-машина-среда с защитой» как известную модель конкуренции двух факторов – безопасности и эффективности [3].

Динамические системы включают большое число процессов с разными характерными временами, причем иерархия этих времен такова, что они различаются на много порядков [4]. Степень подробности моделирования изучаемых явлений зависит от цели моделирования. Однако в любом случае задача моделирования заключается в том, чтобы построить модель явления, содержащую возможно меньшее число переменных и произвольных параметров, и в то же время правильно отражающую свойства явления.

Учет временной иерархии процессов позволяет сократить число дифференциальных уравнений. «Совсем медленные» переменные не меняются на временах рассматриваемых процессов, и их можно считать постоянными параметрами. Для «быстрых» переменных можно вместо дифференциальных уравнений записать алгебраические уравнения для их стационарных значений, поскольку «быстрые» переменные достигают своих стационарных значений практически мгновенно по сравнению с «медленными» [4, 5].

Находим, если возможно, аналитическое решение системы уравнений с помощью функций, входящих в стандартный комплект одного из математических пакетов. Если решение невозможно найти в общем виде, тогда решаем численным методом (в пакете по умолчанию предлагается использовать достаточно универсальный метод Адамса).

Согласно этому плану рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1) с малым параметром ε:

$$\begin{cases} u'(t) = \varepsilon\alpha u(t) - \beta z(t)u(t) \\ \varepsilon z'(t) = \gamma u(t) - \delta z(t) \end{cases}. \qquad (1)$$

Отличием этой системы от ранее рассмотренных [5] является квазистационарная вредность *u* и быстрая реакция защиты *z*. Решим систему (1) асимптотическим методом по степеням ε .

Перепишем систему (1), приняв за внимание зависимость функций $u(t,\varepsilon)$ и $z(t,\varepsilon)$ от времени и от малого параметра.Решаем систему (1) для случая ε (нулевое приближение).Запишем асимптотики функций $u(t,\varepsilon)$ и $z(t,\varepsilon)$.

$$u(t,\varepsilon)=u_0(t)+\overset{=}{o}(\varepsilon),\quad z(t,\varepsilon)=z_0(t)+\overset{=}{o}(\varepsilon).$$

$$\begin{cases} u_0'(t)=-\beta u_0(t)z_0(t)+\overset{=}{o}(\varepsilon) \\ 0=\gamma u_0(t)-\delta z_0(t)+\overset{=}{o}(\varepsilon) \end{cases}. \qquad (2)$$

Делая замену, $u_0(t)=\dfrac{\delta}{\gamma}z_0(t)$. Получим функции защиты и вредности для нулевого приближения в виде:

$$z(t)=\frac{1}{\beta t},\quad u(t)=\frac{\delta}{\beta\gamma t}.$$

Кроме получения решений в замкнутом аналитическом виде и их исследования данный подход позволил получить реальные оценки для стоимости защиты, и даже уменьшать эту стоимость, когда интенсивность вредного фактора *u* не превышает порога динамической защиты $c(z(t)\text{-}z_0)=0$.

Найденные выражения и величины для интенсивности защиты позволяют определить её стоимость в условных единицах. Для этого воспользуемся функцией [5]

$$\tilde{C}(T)=\int_0^T c(z-z_0)dt+C_0,$$

где: C – стоимость стационарной защиты;

z – величина стационарной защиты;

$c(z)$ – функция стоимости динамической защиты.

Возьмем для определенности такие близкие к реальным значения параметров системы (2) $\alpha=0.2,\ \gamma=0.5,\ \delta=2,\ z_0=12, c_0=1200$. Величина параметра ε=0.000101185 была получена численным решением исходной системы, а значит правомочность асимптотического подхода – малость ε – подтверждается.

1. Запорожцев А. В. Моделирование технических систем / А. В. Запорожцев // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 8–6. – С. 1288–1294.
2. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики / А. И. Чуличков. – М.: Физматлит, 2003. – 296 с.
3. Краснощеков П. С. Принципы построения моделей / П. С. Краснощеков, А. А. Петров. – [2-е изд.]. – М.: Изд-во Фазис, 2000. – 411 с.
4. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен. – М.: Мир, 1985. – 321 с.
5. Naumeyko I. Dynamic balance research of protected systems / I. Naumeyko, M. Alja'afreh. // ECONTECHMOD – 2015, vol.4, No 3 – P. 85–90.