УДК 621.396.2.: 621.316.2

В. А. ТИХОНОВ, канд. техн. наук

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Анализ статистических связей случайного процесса, которые описываются корреляционной функцией, позволяет методом линейного предсказания решать широкий круг прикладных задач. Использование моделей линейного предсказания дает возможность синтезировать трансверсальные и решетчатые фильтры [1], применяемые, в частности, для моделирования каналов связи с неравномерными частотными характеристиками [2] и коррекции межсимвольных искажений [3]. Такие модели позволяют решать задачи прогнозирования [4], получать параметрические спектральные оценки [5] случайных процессов и т.д.

Хотя корреляционные связи являются наиболее важными при описании случайных процессов, для решения ряда проблем статистического анализа негауссовых процессов анализируются статистические связи более высоких порядков [6-11]. Учет негауссовых свойств случайных процессов позволяет повысить эффективность методов обработки при решении ряда прикладных задач [12-13]. Однако развитие методов анализа негауссовых характеристик случайных процессов тормозится рядом актуальных нерешенных проблем. Они связаны со сложностью получения многомерных плотностей вероятности негауссовых процессов, отсутствием развитых методов оценок спектров высших порядков, ограниченностью способов обработки негауссовых процессов. Для дальнейшего развития методов анализа негауссовых процессов необходимо создать конструктивные статистические модели этих процессов.

Модель авторегрессии (АР) наиболее точно описывает случайные процессы, спектры которых содержат острые пики и не имеют глубоких впадин. Для моделирования случайных процессов, спектры которых содержат широкие пики и острые минимумы, используют модель скользящего среднего (СС). Таким образом, модель СС, как правило, применяется для описания слабокоррелированных процессов с широким спектром.

Оценивание параметров модели СС производят по значениям функции корреляции. Поэтому эта модель так же, как и модель АР, описывает случайный процесс в рамках корреляционной теории. Для того чтобы в модели СС учесть статистические связи высших порядков, необходимо обобщение модели на основе моментных функций порядка больше двух. Ниже предложена модель обобщенного скользящего среднего (ОСС), позволяющая более полно описывать негауссовы широкополосные случайные процессы.

Целью статьи являются: разработка принципов обобщения моделей линейного предсказания с учетом статистических связей высших порядков стационарных негауссовых процессов; развитие теории моделей ОСС; вывод выражений для вычисления параметров и основных характеристик модели ОСС.

Разностное уравнение, описывающее процесс ОСС, имеет вид:

$$x[t] = -\sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i] a_3^l[t-i] + a_3^l[t], \qquad (1)$$

где $Q_3^l[i]$ – коэффициенты, а q_l – порядок модели ОСС; $a_3^l[t]$ – случайные отсчеты с нулевым средним, имеющие нулевую моментную функцию третьего порядка для сдвига l. Индекс l у $a_3^l[t]$ означает, что ошибки предсказания соответствуют модели ОСС с коэффициентами ОСС с индексом l.

Получим уравнение, связывающее третьи моменты случайного процесса $x[t]$ и случайного процесса $a_3^l[t]$. Для этого умножим левую и правую части (1) на $x[t]x[t]$ и усредним [9]. Полученное выражение имеет вид:

$$m_3 = [1 - \left(Q_3^l[1]\right)^3 - \left(Q_3^l[2]\right)^3 - \ldots - \left(Q_3^l[q_l]\right)^3]m_{3a}^l, \tag{2}$$

где $m_3 = E\{(x[t])^3\}$, $m_{3a}^l = E\{(a_3^l[t])^3\}$.

Чтобы найти систему уравнений для определения коэффициентов ОСС, умножим левую и правую части (1) на $x[t-j]x[t-l]$ и выполним операцию усреднения:

$$\begin{aligned} m_3[j, j-l] &= \sum_{i=1}^{q_l}\sum_{k=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[k]E\{a_3^l[t-i]a_3^l[t-j]a_3^l[t-k-l]\} - \\ &- \sum_{i=1}^{q_l}\sum_{n=1}^{q_l}\sum_{k=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]Q_3^l[k]E\{a_3^l[t-i]a_3^l[t-n-j]a_3^l[t-k-l]\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{q_l}\sum_{n=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]E\{a_3^l[t-i]a_3^l[t-n-j]a_3^l[t-l]\} - \\ &- \sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i]E\{a_3^l[t-i]a_3^l[t-j]a_3^l[t-l]\}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $m_3[j, j-l] = E\{x[t]x[t-j]x[t-l]\}$. Используя соотношения:

$$E\{a_3^l[t]a_3^l[t-j]a_3^l[t-l]\} = 0, \quad j \neq 0; \tag{4а}$$

$$E\{a_3^l[t-i]a_3^l[t-j]a_3^l[t-l]\} = 0, \ i \neq j \neq l, \tag{4б}$$

выражение (3) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} m_3[j, j-l] = (&\sum_{i,k=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[k]\delta[i-j]\delta[i-k-l] - \sum_{i,n,k=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]Q_3^l[k]\delta[i-n-j]\times \\ &\times\delta[i-k-l] + \sum_{i,n=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]\delta[i-l]\delta[i-n-j] - \sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i]\delta[i-j]\delta[i-l])m_{3a}^l. \end{aligned} \tag{5}$$

Учитывая фильтрующее свойство дельта-функции, слагаемые в правой части (5) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,k=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[k]\delta[i-j]\delta[i-k-l]m_{3a}^l = Q_3^l[j]Q_3^l[j-l]m_{3a}^l, \\ &\sum_{i,n,k=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]Q_3^l[k]\delta[i-n-j]\delta[i-k-l]m_{3a}^l = \sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i]\times \\ &\qquad \times Q_3^l[i-j]Q_3^l[i-l]m_{3a}^l, \\ &\sum_{n,i=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]\delta[i-l]\delta[i-n-j]m_{3a}^l = Q_3^l[l]Q_3^l[l-j]m_{3a}^l, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i]\delta[i-j]\delta[i-l]m_{3a}^l = Q_3^l[j]\delta[j-l]m_{3a}^l .$$

Используя результаты преобразований (6) и соотношения (2), из выражения (5) получим систему уравнений для расчета коэффициентов ОСС

$$\mu_3[j,j-l] = \frac{Q_3^l[j]Q_3^l[j-l] - \sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[i-j]Q_3^l[i-l] + Q_3^l[l]Q_3^l[l-j] - Q_3^l[j]\delta[j-l]}{1-\left(Q_3^l[1]\right)^3 - \left(Q_3^l[2]\right)^3 - \ldots - \left(Q_3^l[q_l]\right)^3}, \tag{7}$$

где
$$\mu_3[j,j-n] = m_3[j,j-n]/m_3 . \tag{8}$$

Модель ОСС в общем случае имеет коэффициенты ОСС, отличные для каждой моментной функции, не равной нулю. Поэтому для нахождения системы уравнений фиксируется индекс l, а индекс j необходимо менять от 1 до q_l. Выбор индекса l зависит от решаемой задачи и конкретных статистических свойств негауссова случайного процесса. Изменяя l, можно строить новые модели ОСС третьего ранга. При этом увеличивается количество коэффициентов ООС, которые необходимо рассчитывать, а затем учитывать и анализировать. Следует помнить, что использование слишком сложных моделей может снизить точность решения поставленной задачи из-за неустойчивости и роста дисперсии оцениваемых параметров. К тому же оценки коэффициентов СС не обладают высокой статистической устойчивостью.

Рассмотрим примеры построения модели ОСС третьего ранга первого порядка $(q_l = 1)$:

1. Пусть $j=1$, $l=0$. Тогда все выражения (6), кроме первого, равны нулю и (7) принимает вид:

$$\mu_3[1,1] = \frac{\left(Q_3^0[1]\right)^2}{1-\left(Q_3^0[1]\right)^3}. \tag{9}$$

2. Пусть $j=1$, $l=1$. Ненулевым членом будет последнее уравнение в (6), и уравнение (7) принимает вид:

$$\mu_3[0,1] = -\frac{Q_3^1[1]}{1-\left(Q_3^1[1]\right)^3}. \tag{10}$$

3. Пусть $j=1$, $l=2$. В этом случае все выражения в (6) равны нулю, и уравнение (7) принимает вид:

$$\mu_3[i,1-l] = 0\,, l \ge 2 . \tag{11}$$

Найдем системы уравнений для ОСС второго порядка ($q_l = 2$).

1. Пусть $j=1, 2$, $l=0$. Из (7) получаем:

$$\mu_3[1,1] = \frac{\left(Q_3^0[1]\right)^2 - (Q_3^0[2])^2 Q_3^0[1]}{1-\left(Q_3^0[1]\right)^3 - \left(Q_3^0[2]\right)^3}, \tag{12а}$$

$$\mu_3[2,2] = \frac{\left(Q_3^0[2]\right)^2}{1-\left(Q_3^0[1]\right)^3 - \left(Q_3^0[2]\right)^3}. \tag{12б}$$

2. Пусть $j = 1, 2$, $l = 1$. Тогда система уравнений имеет вид:

$$\mu_3[1,0] = \frac{-\left(Q_3^1[1]\right)^2 Q_3^1[2] - Q_3^1[1]}{1 - \left(Q_3^1[1]\right)^3 - \left(Q_3^1[2]\right)^3}, \tag{13а}$$

$$\mu_3[1,2] = \frac{Q_3^1[1] Q_3^1[2]}{1 - \left(Q_3^1[1]\right)^3 - \left(Q_3^1[2]\right)^3}. \tag{13б}$$

3. Пусть $j = 1, 2$, $l = 2$. Система уравнений имеет вид:

$$\mu_3[2,1] = \frac{Q_3^2[1] Q_3^2[2]}{1 - \left(Q_3^2[1]\right)^3 - \left(Q_3^2[2]\right)^3}, \tag{14а}$$

$$\mu_3[0,2] = \frac{-Q_3^2[2]}{1 - \left(Q_3^2[1]\right)^3 - \left(Q_3^2[2]\right)^3}. \tag{14б}$$

4. Пусть $j = 1, 2$, $l = 3$. При таких сдвигах моментная функция процесса ОСС равна нулю:

$$\mu_3[j, j - l] = 0\,,\; l \geq 3. \tag{15}$$

Выводы

Таким образом, предложенные принципы построения обобщенных моделей линейного предсказания позволяют получить уравнения моделей ОСС любого ранга. Уравнения для расчета коэффициентов моделей ОСС аналогичны соответствующим уравнениям для модели СС. Моментные функции процессов ОСС быстро затухают. Поэтому наибольший интерес представляют модели процессов с малыми значениями параметров l. Следовательно, набор моделей ОСС, описывающих негауссов процесс, может быть невелик. Дальнейшие исследования позволят получить модели ОСС четвертого и произвольного порядка, а также параметрические спектральные оценки высших порядков на базе этих моделей.

Список литературы: 1. *Адаптивные* фильтры / Под ред. Коуэна К.Ф.Н. и Гранта П.М. М.: Мир, 1988. 392 с. 2. *Куреши Ш.У.Х.* Адаптивная коррекция // ТИИЭР. 1985. Т. 73, № 9. С. 5 – 49. 3. *Прокис Дж.* Цифровая связь. 4. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов / Пер. с. англ. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с. 5. *Марпл.-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с. 6. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с. 7. *Бриллинджер Д.Р.* Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. 536 с. 8. *Ширяев А.Н.* Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов // Теория вероятности и ее применение. 1960. Вып. 5, № 3. С. 293 – 313. 9. *Леонов В.П.* Некоторые применения старших семиинвариантов в теории стационарных случайных процессов. М.: Наука, 1964. 124 с. 10. *Шелухин О.И. Беляев И.В.* Негауссовские процессы. СПб.: Политехника, 1992. 312 с. 11. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. Радио, 1978. 376 с. 12. *Кунченко Ю.П.* Нелинейная оценка параметров негауссовских радиотехнических сигналов. К.: Высш. шк., 1987. 191 с. 13. *Валеев В.Г., Данилов В.А.* Оптимальное обнаружение сигналов на фоне негауссовских коррелированных радиопомех // Изв. Вузов. Радиоэлектроника. 1991. № 7. С. 30 – 34.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 03.04.2003