УДК 519.7

ОТНОШЕНИЯ КАК ОБЪЕКТЫ ФОРМУЛЬНОГО ОПИСАНИЯ

ДУДАРЬ З.В., МЕЛЬНИКОВА Р.В., ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО Ю.П.

Предлагается один из перспективных подходов к решению задачи углубленного изучения понятия знания, заключающийся в том, что последние отождествляются с отношениями, а их обработка приравнивается к выполнению операций над ними. С этой точки зрения любое сообщение, понятия и высказывания представляют собой отношения.

В последнее время во всем мире происходит убыстряющаяся информатизация общества, проникающая во все сферы человеческой деятельности. В связи с этим становится актуальной задача углубленного изучения понятия знания. Один из перспективных подходов к решению этой задачи состоит в том, что знания отождествляются с отношениями, а их обработка приравнивается к выполнению операций над отношениями. С этой точки зрения любое сообщение является отношением, любые понятия и высказывания представляют собой отношения, интеллектуальная деятельность людей и машин есть последовательность операций над отношениями. Внутренняя структура любых объектов и связи между объектами могут быть выражены отношениями. Любые физические и информационные процессы, наблюдаемые в природе, протекают согласно ее законам, которые тоже суть не что иное как отношения.

Охарактеризуем (для начала лишь приблизительно) понятие отношения. С этой целью введем элементы и множества. Полагаем, что любой объект можно рассматривать в роли элемента и что относительно любого объекта можно установить, является он множеством или нет. Далее вводим равенство элементов и равенство множеств. Полагаем, что для любых элементов а и в всегда можно установить, равны они или нет. Когда они равны, пишем а=в, в противном случае пишем $а \neq в$. То же относится и к множествам А и *B* (пишем А=В или $А \neq В$). Кроме того, вводим принадлежность элемента множеству. Полагаем, что для любых элемента а и множества А можно установить, принадлежит элемент а множеству А или нет. Факт принадлежности элемента а множеству А выражаем записью $a \in A$, факт непринадлежности — записью $a \notin A$. Полагаем, что принадлежность элемента множеству удовлетворяет условиям: 1) в том и только том случае, если при любом *А* $a \in A$ равносильно $в \in A$, то а=в; 2) в том и только том случае, если при любом а $a \in A$ равносильно $a \in B$, то А=В; 3) для каждого свойства элементов А найдется множество А такое, что для любого элемента а утверждение $a \in A$ будет равносильно утверждению "элемент а обладает свойством А". Вводим также включение $A \subseteq B$ множества А в множество В, определяя его условием: $A \subseteq B$ в том и только том случае, если при любом а из $a \in A$ следует $a \in B$. Если $A \subseteq B$, то множество А называется подмножеством множества В. Определяем операцию дополнения $\bar{A}$ множества А условием: $B = \bar{A}$ в том и только том случае, если при любом а $a \in B$ равносильно $a \notin A$. Также определяем операции объединения $A \cup B$ и пересечения $A \cap B$ множеств А и В условиями: $C = A \cup B$ в том и только том случае, если при любом а $a \in C$ равносильно $a \in A$ или $a \in B$; $C = A \cap B$ в том и только том случае, если при любом а $a \in C$ равносильно $a \in A$ и $a \in B$.

Условие $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_m \in A_m$ будем иначе записывать в виде $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, называя выражение $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ набором элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а выражение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ — декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ будем понимать как множество всех наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_m \in A_m$, а сами наборы — как элементы множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$. Знак $\in$ в записи $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ будем понимать как принадлежность элемента $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ множеству $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, обладающую всеми перечисленными выше свойствами. Декартово произведение, сомножителями которого являются одинаковые множества $A_1 = A_2 = \ldots = A_m$, называется степенью множества А и записывается в виде A^m. Любое подмножество Р декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ называется отношением, определенным на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$. Если $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in P$, то будем говорить, что элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ связаны отношением Р. Введенные выше понятия элемента, множества, равенства, принадлежности, включения, дополнения, объединения и пересечения будем понимать как отношения, определенные на декартовых произведениях множеств.

Для формульного описания отношений вводим предметные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Полагаем, что значениями предметных переменных служат элементы из какого-нибудь множества U. Элементы, принадлежащие множеству U, называются предметами, а само множество U — универсумом предметов. Число предметных переменных m и область их определения U выбираются произвольно, в зависимости от того, какой класс отношений требуется описывать с их помощью. Множество $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ называется универсумом предметных переменных. Множество U^m, вместе с веденными в нем координатными осями $x_1, x_2, \ldots, x_m$, называется предметным пространством размерности m, заданным над парой универсумов U и V. Любой набор $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in U^m$ называется предметным вектором пространства U^m. Множество U может быть выбрано как конечным, так и бесконечным. В первом случае пространство U^m называется конечным, во втором — бесконечным.

Любое подмножество предметного пространства U^m есть отношение, определенное на этом пространстве. Для формульного описания таких отношений будем использовать функции вида $\mathbf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \xi$, отображающие U^m в множество $\Sigma = \{0,1\}$, которые называются предикатами, определенными на U^m. Элементы множества Σ называются логическими, элемент 0 называется ложью, элемент 1 — истиной. Предикаты на U^m называются конечными или бесконечными в зависимости от того, конечно или бесконечно множество U. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, значения которого равны 0 при любых $x_1, x_2, \ldots, x_m \in U$, называется тождественно ложным и обозначается символом 0. Предикат, значения которого тождественно равны 1, называется тождественно истинным и обозначается символом 1.

Пусть M − множество всех отношений на U^m, M − множество всех предикатов на U^m. Отношение P∈ M и предикат P∈ M называются соответствующими друг другу, если при любых $a_1, a_2,..., a_m \in U$:

$$\begin{aligned} &P(x_1, x_2, ..., x_m) = 0, \text{ если } (a_1, a_2, ..., a_m \notin P; \\ &P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1, \text{ если } (a_1, a_2, ..., a_m \in P. \end{aligned} \quad (1)$$

По (1) можно перейти от любого отношения P к соответствующему ему предикату P. Обратный переход от предиката P к отношению P можно выполнить по правилу:

$$\begin{aligned} &\text{При любых } a_1, a_2,..., a_m \in U, \text{ если} \\ &P(a_1, a_2,..., a_m)=0, \text{ то } (a_1, a_2,..., a_m) \notin P; \text{ если} \\ &P(a_1, a_2,..., a_m)=1, \text{ то } (a_1, a_2,..., a_m) \in P. \end{aligned} \quad (2)$$

Множество всех векторов $(x_1, x_2,..., x_m)\in U^m$, удовлетворяющих уравнению $P(x_1, x_2,..., x_m)=1$, образует отношение P, которое можно записать также в виде условия $(x_1, x_2,..., x_m)\in P$. По (1) и (2) устанавливают взаимно однозначное соответствие между всеми отношениями множества M и всеми предикатами множества M.

Предикат P∈M, отыскиваемый по (1), называется характеристической функцией отношения P∈M. Предикат 0 соответствует пустому отношению, т.е. пустому подмножеству пространства U^m, (1) соответствует полному отношению, в роли которого в данном случае выступает все пространство U^m.

Предикаты легко поддаются формульному описанию, чего нельзя сказать об отношениях. В силу наличия зависимостей (1) и (2) достаточно ограничиться формульным описанием только предикатов.

Переход от отношений к предикатам и обратно выполняется по (1) и (2). Ниже строится язык, используемый для формульной записи предикатов. Дизъюнкцией логических элементов называется операция $\xi\vee\eta=\zeta$, отображающая Σ^2 в Σ и определяемая равенствами $0\vee0=0$, $0\vee1=1\vee0=1\vee1=1$; конъюнкцией $\xi\wedge\eta=\zeta$ − операция $0\wedge0=0\wedge1= =1\wedge0=0$, $1\wedge1=1$; отрицанием $\neg\xi=\eta$ − операция $\neg0=1$, $\neg1=0$. Операции ∧, ∨, ¬ и логические элементы 0, 1 подчиняются следующим основным законам: идемпотентности $\xi\vee\xi=\xi$, $\xi\wedge\xi=\xi$; коммутативности $\xi\vee\eta=\eta\vee\xi$, $\xi\wedge\eta=\eta\wedge\zeta$; ассоциативности $(\xi\vee\eta)\vee\zeta==\xi\vee(\eta\vee\zeta)$, $(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta=\xi\wedge(\eta\wedge\zeta)$; дистрибутивности $(\xi\vee\eta)\wedge\zeta=(\xi\wedge\zeta)\vee(\eta\wedge\zeta)$, $(\xi\wedge\eta)\vee\zeta = (\xi\vee\zeta)\wedge(\eta\vee\zeta)$; элиминации $\xi\vee(\xi\wedge\eta) = \xi$, $\xi\wedge(\xi\vee\eta) = \xi$; свертывания $\xi\vee(\eta\wedge\neg\eta)=\xi$, $\xi\wedge(\eta\vee\neg\eta)=\xi$; двойного отрицания $\neg\neg\xi=\xi$; противоречия $\xi\wedge\neg\xi=0$; исключенного третьего $\xi\vee\neg\xi=1$; Моргана $\neg(\xi\vee\eta) = \neg\xi\wedge\neg\eta$, $\neg(\xi\wedge\eta)=\neg\xi\vee\neg\eta$, для 0 и 1 $\xi\vee0= \xi$, $\xi\wedge0=0$, $\xi\vee1= 1$, $\xi\wedge1=\xi$ при любых $\eta,\xi,\zeta \in\Sigma$.

Предикатом узнавания предмета a∈U по переменной x_i ($i=\overline{1,\ m}$) называется условие:

$$a(x_i)=\begin{cases}0, \text{ если } x_i\neq a,\\ 1, \text{ если } x_i=a.\end{cases} \quad (3)$$

Предикат $a(x_i)$ будем рассматривать как предикат $a(x_1, x_2,..., x_m)$ из M, у которого все аргументы, кроме x_i, несущественны. Он соответствует отношению, состоящему из всевозможных векторов пространства U^m, i-й координатой которых служит предмет a. Отношение, заданное уравнением $a(x_i)=1$, можно выразить в виде $x_i=a$ или же $x_i\in\{a\}$. Предикаты узнавания предмета при любых $i=\overline{1,\ m}$ и x_i, a∈U подчиняются закону отрицания:

$$\neg a(x_i)= \bigvee b(x_i)\Big|_{b\in U, b\neq a}; \quad (4)$$

закону ложности: при любых $i=\overline{1,\ m}$ и x_i, a, b∈U, если $b\neq a$, то $a(x_i)\wedge b(x_i)=0$ (5); закону истинности: при любых $i=\overline{1,\ m}$ и $x_i\in U$:

$$\bigvee a(x_i)\Big|_{a\in U} =1. \quad (6)$$

Дизъюнкцией предикатов $P\vee Q=R$ называется операция, отображающая M^2 в M, которая определяется условием: при любых $x_1, x_2,..., x_m\in U$ $R(x_1, x_2,..., x_m)=P(x_1, x_2,.., x_m)\vee Q(x_1, x_2,..., x_m)$. Аналогично определяется конъюнкция предикатов $P\wedge Q=R$: при любых $x_1, x_2,..., x_m\in U$: $R(x_1, x_2,..., x_m)=P(x_1, x_2,..., x_m)\wedge Q(x_1, x_2,..., x_m)$ и отрицание предикатов $\neg P=Q$: при любых $x_1, x_2,..., x_m\in U$: $Q(x_1, x_2,..., x_m)=\neg P(x_1, x_2,..., x_m)$. Иными словами,

$$(P\vee Q)(x_1, x_2,..., x_m)=P(x_1, x_2,..., x_m)\vee Q(x_1, x_2,..., x_m); \quad (7)$$

$$(P\wedge Q)(x_1,x_2,...,x_m)=P(x_1, x_2,...., x_m)\wedge Q(x_1, x_2,..., x_m); \quad (8)$$

$$(\neg P)(x_1, x_2,..., x_m)=\neg P(x_1, x_2,..., x_m). \quad (9)$$

Дизъюнкция $P\vee Q\in M$ предикатов P, Q∈M отвечает объединению $P\cup Q\in M$ соответствующих отношений P, Q∈M, конъюнкция $P\wedge Q$ − пересечению $P\cap Q$, отрицание $\neg P$ − дополнению $\tilde{P}$. Операции ∧,∨, ¬ и предикаты 0, 1 подчиняются следующим основным законам: $P\vee P=P$, $P\wedge P=P$; $P\vee Q=Q\vee P$, $P\wedge Q=Q\wedge P$; $(P\vee Q)\vee R=P\vee(Q\vee R)$; $(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge(Q\wedge R)$; $(P\wedge Q)\wedge R=(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$, $(P\wedge Q)\vee R= =(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$; $P\vee(P\wedge Q)=P$, $P\wedge(P\vee Q)=P$; $P\vee(Q\wedge\neg Q)==P$, $P\wedge(Q\vee\neg Q)=P$; $\neg\neg P=P$; $P\vee\ \neg P=0$; $P\wedge\neg P=1$; $\neg(P\vee Q)=\neg P\wedge\neg Q$, $\neg(P\wedge Q)= =\neg P\vee\neg Q$; $P\vee0=P$, $P\wedge0=0$, $P\vee1=1$, $P\wedge1=P$ при любых P, Q, R∈M.

Алгеброй предикатов над M называется множество M с базисными элементами $a(x_i)$ ($i=\overline{1,\ m}$; a∈U) и базисными операциями ∧,∨, ¬. Формулы этой алгебры образуются по правилам: 1) символы 0 и 1, а также все выражения вида $a(x_i)$ являются формулами; 2) если выражения A и B − формулы, то выражения (A)∨(B), (A)∧(B) − тоже формулы; 3) если выражение A − формула, то выражение ¬(A) − тоже формула; 4) никакие другие выражения формулами не являются. Символы 0 и 1 понимаются как предикаты 0 и 1; выражение $a(x_i)$ ($i=\overline{1,\ m}$; a∈U) − как предикат узнавания предмета a по переменной x_i; выражения (A)∨(B) и (A)∧(B) − как операции дизъюнкции и конъюнкции над предикатами A и B ; выражение ¬(A) − как операция отрицания над предикатом A. Правила образования формул разрешается применять в произвольном порядке. В результате получаем любые суперпозиции операций ∧, ∨, ¬, действующие на предикаты 0, 1 и предикаты вида $a(x_i)$ ($i=\overline{1,\ m}$; a∈U). Разрешается, кроме конечных, использовать также бесконечные суперпозиции операций, но только в тех случаях, когда это не ведет к противоречию. В частности, допустимы операции вида $\wedge(A_t)$ и $\vee(A_t)$ над предикатами из системы t∈T, t∈T, $\{A_t\}_{t\in T}$, какое-нибудь бесконечное множество. Бесконечные суперпозиции операций использзуются, например, в законах отрицания (4) и истинности (6), когда универсум U бесконечен.

Рассмотрим пример образования формулы алгебры предикатов. Пусть U={a, в, c}, V={x, y}. Образуем формулы a(x), b(y), c(x). Действуя на предикаты a(x) и 1 операцией конъюнкции, на предикат b(y) – операцией отрицания и на предикаты c(x) и a(y) – операцией дизъюнкции, получаем формулы $(a(x))\wedge(1)$, $\neg(b(y))$ и $(c(x))\vee(a(y))$. Действуя на два первых предиката операцией конъюнкции, а на последний и 0 – операцией дизъюнкции, получаем формулы $((a(x))\wedge(1))\wedge(\neg(b(y)))$ и $((c(x))\vee(a(y)))\vee(0)$. Действуя на предпоследний предикат операцией отрицания, получаем формулу $\neg(((c(x))\vee(a(y)))\vee(0))$. Наконец, действуя операцией дизъюнкции, получаем формулу

$$(((a(x))\wedge(1))\wedge(\neg(b(y))))\vee(\neg(((c(x))\vee(a(y)))\vee(0))).$$

На рис. показана схема образования суперпозиции операций. Она представляет древовидную структуру.

Получаемая указанным способом запись формул называется полной. Ее можно существенно упростить без потери информации о суперпозиции операций, характеризующей данную формулу. Запись формулы, получаемая в результате выполнения всевозможных упрощений такого рода, называется сокращенной. К таким упрощениям относится исключение лишних скобок. В нашем примере после исключения лишних скобок формула на рис. приобретает вид:

$$((a(x)\wedge 1)\wedge\neg b(y))\vee\neg((c(x)\vee a(y))\vee 0) \qquad (10)$$

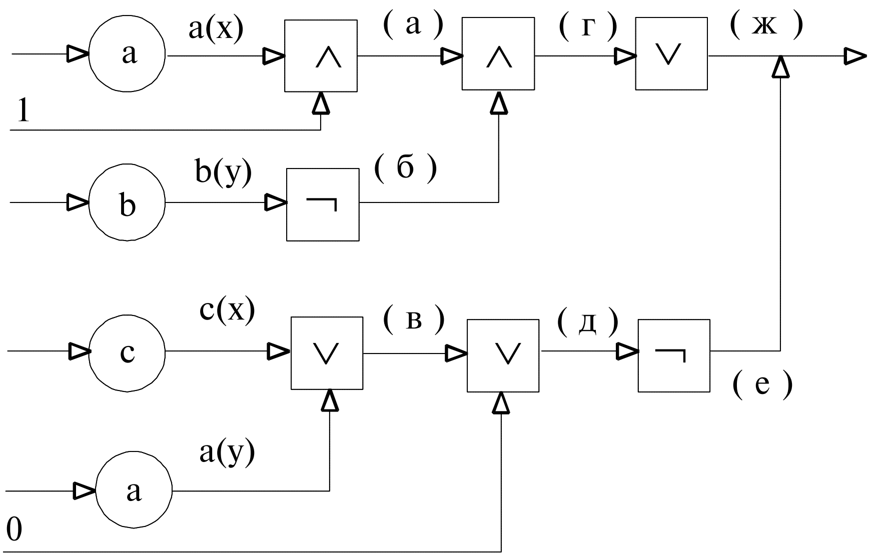

Рис. Схема образования суперпозиции

Дальнейшего упрощения формулы можно достичь, если знак конъюнкции заменить точкой или вовсе опустить, выражение вида $a(x_i)$ ($i=\overline{1,\ m}$; $a\in U$) заменить на x_i^a (в последней записи знак a называется показателем при переменной x_i), а знак $\neg$ заменить чертой, простирающейся над той частью формулы, на которую распространяется действие операции отрицания. После выполнения всех этих преобразований (10) предстанет в виде:

$$((x^a 1)\ \neg\,\overline{y^b}\,)\vee\neg\,\overline{(x^c\vee y^a)\vee 0}\,. \qquad (11)$$

Наконец, дополнительные упрощения достигаются введением правила о старшинстве операций, согласно которому конъюнкция считается старшей по отношению к дизъюнкции. Это означает, что при отсутствии скобок, определяющих последовательность выполнения операций в формуле, сначала следует выполнить операции конъюнкции и лишь после этого – операции дизъюнкции. После выполнения правила (11) запишем в виде

$$(x^a 1)\,\overline{y^b}\ \vee\overline{(x^c\vee y^a)\vee 0}\,. \qquad (12)$$

Указанные упрощения носят обратимый характер, поскольку от сокращенной формы всегда можно возвратиться к полной записи формулы. В нашем примере можно по (12) восстановить формулу из рис.

Запись формулы можно еще более упростить, если воспользоваться ее тождественными преобразованиями, выполняемыми в соответствии с приведенными выше законами. Эти преобразования могут изменить суперпозицию операций, присущую исходной формуле, однако вся информация о предикате, выражаемом ею, полностью сохраняется. Такая запись формулы называется упрощенной. Наличие законов ассоциативности позволяет выражения $(A\vee B)\vee C$, $A\vee(B\vee C)$ и (AB)C, A(BC) писать без скобок в виде $A\vee B\vee C$ и ABC. Применяя это правило к (10), получаем более простое выражение:

$$x^a\neg\,(\,y^b\,)\vee^a(\,x^c\vee y^a\vee 0\,). \qquad (13)$$

Наконец, используя законы для 0 и 1, можно еще более упростить формулу путем исключения из нее символов 0 и 1. Сделав это, упрощаем (13) к виду:

$$x^a\neg(\,y^b\,)\vee(\neg\,(\,x^c\vee y^a\,). \qquad (14)$$

В данном примере, получив (14), мы достигли предела простоты. Число знаков в сокращенной записи формулы по сравнению с полной уменьшилось в два с половиной раза, в упрощенной – в четыре раза (формула на рис. состоит из 49 знаков, (13) – из 14, (14) – из 12)). В формулах более сложного вида обычно возможны дальнейшие упрощения путем тождественных преобразований с помощью других законов (дистрибутивности, элиминации, свертывания), однако способы такого упрощения здесь не рассматриваются: ввиду обширности проблемы они заслуживают специального изучения.

Каждая формула алгебры предикатов над M выражает некоторый предикат $P(x_1, x_2,\dots, x_m)$, значения аргументов которого принадлежат универсуму предметов ($x_1, x_2,\dots, x_m\in U$). Например, формула (12) выражает предикат

$$P(x,\ y)=x^a\,\overline{y^b}\vee\overline{x^c\vee y^a}\ ,$$

где $x, y\in\{a, b, c\}$. Значение x предиката $P(x_1, x_2,\dots, x_m)$, представленного формулой, может быть найдено для заданных значений $a_1, a_2,\dots, a_m$ аргументов $x_1, x_2,\dots, x_m$ их подстановкой в эту формулу с последующим вычислением по ней значения предиката $x=P(a_1, a_2,\dots, a_m)$. Например, полагая x=a, y=c, по (12) находим $P(a, c)=a^a\neg(\,c^b\,)\vee\neg(\,a^c\vee c^a\,)==1\cdot\neg 0\vee\neg(0\vee 0)=1\cdot 1\vee\neg 0=1\vee 1=1$. Вычисляя таким способом значения предиката P(x, y) при всевозможных значениях аргументов x, $y \in \{a, b, c\}$, получаем табл., определяющую предикат P, записанный в виде (12). Предикату P соответствует отношение P={(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c)}.

Если в формулу подставляются значения не всех фигурирующих в ней переменных, тогда приходится производить преобразования, в которых одновременно используются основные законы как для логических элементов, так и для предикатов. Например, пусть $P(x, y)=x^a \neg(y^b) \vee (\neg(x^c \vee y^a)$ и x=a. Тогда $P(a, y)=a^a \neg(y^b) \vee \neg(a^c \vee y^a) = 1 \neg(y^b) \vee \vee \neg(0 \vee y^a) = \neg(y^a) \vee \neg(y^b)$. В данном случае логические элементы удобно называть логическими скалярами, а предикаты – логическими векторами. Множество Σ называется теперь скалярным логическим полем, а множество M – векторным логическим пространством. Над скалярным полем определены операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$, а над векторным – $\wedge$, $\vee$, $\neg$, которые удовлетворяют перечисленным выше основным законам, называемым теперь соответственно скалярными и векторными. Имеют место также следующие основные скалярно-векторные законы: для любых $\xi, h \in \Sigma$ и $P, Q \in M$ $\xi P = P \xi$, $(\xi \vee \eta) P = \xi P \vee \eta P$, $\xi (P \vee Q) = \xi P \vee \xi Q$, $0P=0$, $1P=P$. Пара множеств Σ, M с заданными на них операциями $\wedge$, $\vee$, $\neg$, которые удовлетворяют скалярным, векторным и скалярно-векторным основным законам, называется логической алгеброй. Как видим, знаки дизъюнкции, конъюнкции и отрицания используются в формулах, в зависимости от их применения, как операции $\wedge$, $\vee$, $\neg$ над логическими элементами и как операции $\wedge$, $\vee$, $\neg$ над предикатами, а знак $\wedge$ – еще и как смешанная скалярно-векторная операция. Мы употребляем при записи формул только знаки $\wedge$, $\vee$, $\neg$, однако следует иметь в виду возможность их различного толкования. То же относится к знакам 0 и 1, которые используются в формулах для обозначения как логических элементов, так и предикатов 0 и 1.

Таблица

x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
P(x, y)	1	1	1	0	1	1	0	0	0

Любой ли предикат можно выразить формулами построенной алгебры? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема об общем виде предиката. На языке алгебры предикатов над M любой предикат P, определенный на U^m, выражается в виде:

$$P(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\bigvee_{a_1, a_2,\ldots, a_m \in U} P(a_1, a_2,\ldots, a_m)\, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}. \quad (15)$$

Запись $a_1, a_2, \ldots, a_m \in U$ под знаком $\bigvee$ означает, что логическое суммирование произведений $P(a_1, a_2,\ldots, a_m)\, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}$ ведется по всевозможным наборам $(a_1, a_2,\ldots, a_m) \in U^m$. В части формулы, стоящей справа от знака равенства в (15), фигурируют логические элементы 0 или 1 под видом выражения $P(a_1, a_2,\ldots, a_m)$, являющиеся значением предиката $P(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ при $x_1=a_1, x_2=a_2,\ldots, x_m=a_m$. Для доказательства теоремы достаточно заметить, что после подстановки $x_1=a_1, x_2=a_2,\ldots, x_m=a_m$ в (15) получаем тавтологию вида 0=0 или 1=1. Исключая знаки 0 и 1 из (15), получаем

$$P(x_1, x_2,\ldots, x_m)=\bigvee_{(a_1, a_2,\ldots, a_m) \in P} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}. \quad (16)$$

Запись $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in P$ под знаком $\bigvee$ означает, что дизъюнкция берется по всем векторам $(a_1, a_2,\ldots, a_m) \in U^m$, принадлежащим отношению P, соответствующему предикату P. Формула, стоящая в правой части равенства (16), называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) предиката P. СДНФ тождественно ложного предиката выражается символом 0.

Алгеброй A над множеством A называется любая система формульной записи элементов множества A. Множество A называется носителем алгебры A. Любая алгебра A над A характеризуется множеством базисных операций, отображающих множество A в себя, и множеством базисных элементов, выбираемых из A. Множество всех базисных операций алгебры A называется базисом операций алгебры A, множество всех базисных элементов алгебры A называется ее базисом элементов. Базис операций и базис элементов, вместе взятые, образуют базис алгебры. Формулой алгебры A называется запись, выражающая какую-нибудь суперпозицию базисных операций алгебры A, примененную к базисным элементам. Построение формул алгебры характеризуется правилами образования формул. Алгебра над A называется полной, если ее формулами можно выразить любой элемент множества A. Базис алгебры называется полным, если эта алгебра полна, и несократимым, если исключение из него любой операции или элемента делает его неполным. В последнем случае алгебра называется несократимой. Консервативным расширением алгебры называется такое расширение ее базиса, которое не расширяет множества описываемых ею элементов. Формулы алгебры, выражающие один и тот же элемент ее носителя, называются тождественными. Тождеством алгебры называется запись, указывающая какую-либо пару ее тождественных формул. Если две разные алгебры имеют один и тот же носитель, то допустимо говорить и о тождественности или нетождественности формул разных алгебр. Схемой тождеств алгебры A называется запись, указывающая целое семейство тождеств алгебры A. Система тождеств алгебры обычно записывается в компактном виде схемами тождеств, которые называются законами данной алгебры. Система законов алгебры A называется полной, если из нее можно вывести тождественность или нетождественность любых двух формул алгебры A, несократимой, если ни один из ее законов невозможно логически вывести из совокупности остальных.

Из теоремы об общем виде предиката следует полнота алгебры предикатов. Базис алгебры предикатов даже избыточен, поскольку, как это следует из (16), для выражения любых предикатов не потребовались операция отрицания предикатов и предикат **1**. Алгебра предикатов, базисными элементами которой служат всевозможные предикаты узнавания предметов и предикат **0**, а базисными операциями – дизъюнкция и конъюнкция предикатов, называется дизъюнктивно-конъюнктивной, эта алгебра полна и несократима. Исходная алгебра с базисными элементами 0 и 1 и предикатами узнавания предметов и с базисными операциями $\wedge$, $\vee$, $\neg$ называется канонической. Каноническую алгебру предикатов можно рассматривать как консервативное расширение дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов. Каноническая алгебра представляет собой разновидность булевой алгебры предикатов, т.е. алгебры предикатов с базисными операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Законы идемпотентности, коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, элиминации, для 0 и ложности образуют полную систему законов дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов. Добавляя к этой системе законы свертывания, двойного отрицания, противоречия, исключенного третьего, де Моргана, для 1, отрицания и истинности, получаем полную систему законов канонической алгебры предикатов. Перечисленные законы называются основными для этих алгебр. Любую формулу канонической алгебры предикатов можно преобразовать в тождественную ей формулу дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов, исключая из нее знаки операции отрицания и вхождения символа 1. Знаки отрицания исключаем с помощью законов Моргана и отрицания, а вхождения знака 1 – с помощью законов для 1 и(или) истинности; например, если x, $y \in \{a, b, c\}$, то

$x^a \neg \overline{y^b} \vee \neg(\overline{x^c \vee y^a}) = \; = x^a \neg \overline{y^b} \vee \neg \overline{x^c} \neg \overline{y^a} = x^a(y^a \vee {}^c) \vee (x^a \vee x^b)(y^b \vee y)^c$.

Существенно новым в работе сравнительно с [1] является расширение алгебры предикатов, которая теперь охватывает не только конечные предикаты, но и бесконечные. Ранее алгебра предикатов была ориентирована на формульное описание функций (называемых в [1] алфавитными операторами), теперь же область ее рекомендуемого применения расширена и охватывает не только функции, но и произвольные отношения. Также впервые введены предметное и логическое пространства, общий вид предиката в форме (15).

Литература: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. – Харьков: Вища школа, 1984. – 143 с.

Поступила в редколлегию 27.12.97

Дударь Зоя Владимировна, канд. техн. наук, доцент кафедры ПО ЭВМ. Адрес: 310726, Харьков, пр. Людвига Свободы, 39, кв. 31, тел. 409446, 366631.

Мельникова Роксана Валериевна, ассистент кафедры ПО ЭВМ. Научные интересы: системы поддержки проектирования информационных структур. Адрес: 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 409446, 234961.

Шабанов-Кушнаренко Юрий Петрович, д-р техн. наук, профессор кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ, заслуженный деятель науки и техники Украины. Научные интересы: теория и практика искусственного интеллекта. Адрес: 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 409446, 438332.

УДК 621.391.82.016.35

РАСЧЕТ БИКОНИЧЕСКОЙ БЕЗЭХОВОЙ КАМЕРЫ

ДЗЮНДЗЮК Б.В., МАСЛОВ П.Н.

Приведен расчет биконической безэховой камеры методом геометрической оптики. Получены выражения, позволяющие достаточно просто определить основные характеристики безэховости и автоматизировать процесс проектирования профиля рабочей поверхности биконической безэховой камеры (БЭК).

Известно [1], что в прямоугольнике БЭК наблюдается отражение от стен, пола и потолка, что подтверждается изменением амплитуды электромагнитного поля. Этих отражений можно избежать, применяя камеру, имеющую форму тела вращения биконического типа. Такая конструкция эффективна тем, что благодаря ее геометрии энергия излучения распространяется в основном параллельно плоскостям, а та часть излучения, которая падает на рабочую поверхность под некоторым углом, претерпевает многократное переотражение в конусной поглощающей плоскости, что значительно снижает его уровень. С точки зрения теории антенн камеру этой конструкции можно рассматривать как рупорную антенну с поглощающими поверхностями, на которых затухают высшие типы волн.

Рабочая безэховая камера определяется прежде всего характеристикой радиопоглощающего материала (РПМ), составляет (0,1÷1,0)%, у РПМ среднего качества – (1÷3)%, у РПМ низкого качества – 7%. Использование РПМ с коэффициентом отражения по мощности порядка 10% является нецелесообразным.

Повышения рабочей поверхности безэховой камеры можно добиться не только применением высококачественных РПМ, стоимость которых достаточно высока, но также правильным выбором конфигурации ее рабочей поверхности [2].

Основным требованием к БЭК, предназначенной для исследования радиотехнических характеристик РПМ, является то, что они должны обеспечивать условия, при которых электромагнитные волны в области исследуемого образца в первом приближении можно рассматривать как плоские. Это требование будет выполнено, если радиус оснований конусов биконической БЭК, соответствующий половине длины линии связи между приемной и передающей антеннами или расстоянию от образца до одной из антенн, будет выбран, исходя из условий дальней зоны. Тогда анализ полей может быть