

СИНУСОИДАЛЬНОЕ НАМАГНИЧИВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФЕРРИТОВЫХ СЕРДЕЧНИКОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

И. Ф. Огороднейчук, М. Д. Щорс

Харьков

Предположим, что полный цилиндрический ферритовый сердечник прямоугольного сечения (рис.) с внешним радиусом c , внутренним b , высотой h «одет» на достаточно длинный цилиндрический проводник радиусом a . Оси сердечника и проводника совпадают. При синусоидальной форме тока в проводнике уравнения Максвелла, которым удовлетворяет поле в однородной среде без объемных зарядов, имеют вид

$$\operatorname{rot} H = \gamma E + j\omega \varepsilon E; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} E = -j\omega \mu H; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon E = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{div} b = 0, \quad (4)$$

где H и b — соответственно амплитудные значения напряженности и индукции магнитного поля;

E — амплитудное значение напряженности электрического поля;

γ — удельная проводимость среды;

μ — комплексная магнитная проницаемость среды;

ε — комплексная диэлектрическая проницаемость среды в рассматриваемой точке.

Будем полагать, что магнитная проницаемость среды не зависит от напряженности магнитного поля. Решение уравнений (1), (2), (3), (4) будем искать в цилиндрической системе координат ρ, φ, z .

В силу симметричного расположения проводника и сердечника H и E не зависят от координаты φ , т. е. предположим, что вокруг прямолинейного проводника с током существует только составляющая φ напряженности магнитного поля. С учетом указанных допущений после разделения переменных получаем

$$\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial H}{\partial \rho} + H \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + E_\rho \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + E_z + \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0. \quad (7)$$

Решаем данную систему уравнений

$$H = e^{-ikz} [AI_1(\rho \sqrt{\rho^2 - k^2}) + BN_1(\rho \sqrt{\rho^2 - k^2})]; \quad (8)$$

$$E_\rho = e^{-ikz} \frac{k}{1 + j\omega \varepsilon} [AI_1(\rho \sqrt{\rho^2 - k^2}) + BN_1(\rho \sqrt{\rho^2 - k^2})]; \quad (9)$$

$$E_z = e^{-ikz} \frac{\sqrt{p^2 - k^2}}{\gamma + j\omega\varepsilon} [AI_0(\rho \sqrt{p^2 - k^2}) + BN_0(\rho \sqrt{p^2 - k^2})], \quad (10)$$

где $I_0(\cdot)$, $I_1(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода нулевого и первого порядка;

$N_0(\cdot)$, $N_1(\cdot)$ — функция Бесселя второго рода нулевого и первого порядка;

$\rho = \omega \sqrt{\varepsilon\mu}$ — постоянная распространения среды.

Предположим, что

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

В этом случае

$$k = 0; \quad (13)$$

$$E_\varphi = 0. \quad (14)$$

При идеальной проводимости центрального проводника и равенстве его диаметра внутреннему диаметру сердечника граничные условия на границе раздела «проводник — сердечник» принимает вид

$$E_z = 0; \quad (15)$$

$$H = \frac{I}{2\pi b}. \quad (16)$$

Отсюда с учетом тождества $N_0(x)I_1(x) - I_0(x)N_1(x) = \frac{2}{\pi x}$.

$$A = \frac{I}{4} p N_0(pb); \quad (17)$$

$$B = -\frac{I}{4} p I_0(pb). \quad (18)$$

И соответственно

$$H = \frac{I}{4} p [N_0(pb)I_1(\rho\rho) - I_0(pb)N_1(\rho\rho)]; \quad (19)$$

$$E_z = -j\omega\mu \frac{I}{4} [N_0(pb)I_0(\rho\rho) - I_0(pb)N_0(\rho\rho)]. \quad (20)$$

Магнитный поток в сердечнике

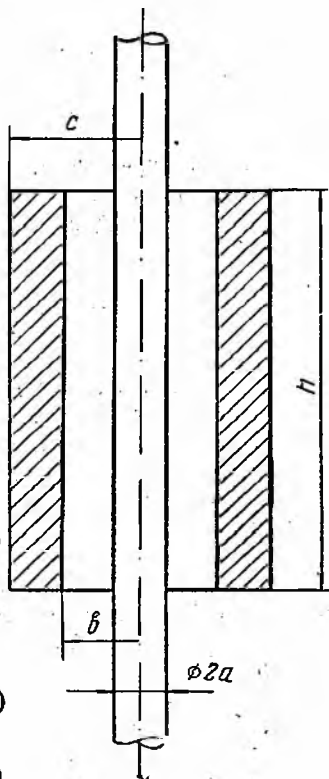
$$\Phi = \mu h \int_b^c H d\rho. \quad (21)$$

Индуктивность, вносимая сердечником,

$$L = \frac{\Phi}{I}. \quad (22)$$

Подставив в (21) и (22) найденное ранее выражение для напряженности магнитного поля, получим

$$L = \frac{\mu h}{4} [N_0(\rho c)I_0(pb) - N_0(pb)I_0(\rho c)]. \quad (23)$$



При малых аргументах цилиндрических функций, подставив в (23) их первые члены разложения в ряд, получим известное* выражение для индуктивности системы «проводник — сердечник»

$$Z = \frac{\mu h}{2\pi} \ln \frac{c}{b} = \frac{\mu h}{2\pi} \ln \frac{D}{d}. \quad (24)$$

Найдем выражение для полного сопротивления, вносимого сердечником,

$$Z = \frac{\int_0^h E_z(c) dz}{\int_0^h H(c) d\varphi}, \quad (25)$$

где $E_z(c)$, $H(c)$ — напряженность электрического и магнитного полей на внешней поверхности сердечника.

Подставив в последнее выражение (19) и (20), получим

$$Z = j\omega \frac{\frac{\mu h}{4} [N_0(pc) I_0(pb) - N_0(pb) I_0(pc)]}{\frac{\pi pc}{2} [N_0(pb) I_1(pc) - I_0(pb) N_1(pc)]}. \quad (26)$$

При малых аргументах цилиндрических функций знаменатель (26) становится равным единице. Таким образом, и в этом случае мы приходим к известному выражению (24).

Как следует из (26), полное сопротивление системы «проводник — сердечник» не равно индуктивному сопротивлению этой системы. Помимо индуктивного и активного, сердечник вносит в центральный проводник емкостное сопротивление. Активное сопротивление можно определить, подставив в (26) комплексные значения μ и ϵ , и найти затем действительную и мнимую части Z .

Емкостную составляющую находим из следующих соображений. С ростом частоты от нуля при постоянных значениях μ и ϵ числитель и знаменатель гораздо быстрее числителя. Общая величина Z увеличивается. Отсюда можно прийти к выводу, что общая эквивалентная схема системы «проводник — сердечник» является параллельным соединением индуктивности и емкости. Причем индуктивность и емкость — функции частоты. Если пренебречь потерями, эту емкость можно определить из выражения

$$\frac{\pi pc}{2} [N_0(pb) I_1(pc) - I_0(pb) N_1(pc)] = 1 - \omega^2 ZC. \quad (27)$$

Отсюда находим условие существования объемного резонанса

$$N_0(pb) I_1(pc) - I_0(pb) N_1(pc) = 0. \quad (28)$$

Ранее мы предполагали, что $\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0$.

Если отказаться от этого предположения, то коэффициент распространения вдоль оси z по аналогии с выражением для постоянной распространения длинной линии такой:

$$\frac{\pi pc}{2} [N_0(pb) I_1(p_1c) - I_0(pb) N_1(pc)] = 1 - k^2. \quad (29)$$

Отсюда, в частности, можно прийти к выводу, что на частоте первого объемного резонанса $k = 1$.

* Л. И. Рабкин. Высокочастотные ферромагнетики. Физматгиз, 1960.

$$\text{Если предположить, что } \mu = \mu_1 - j\mu_2; \quad (30)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2; \quad (31)$$

$$\rho = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = \rho_1 - j\rho_2, \quad (32)$$

то при условии

$$\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2; \quad \mu_1 \gg \mu_2; \quad \rho_1 \gg \rho_2$$

после разложения цилиндрических функций в ряд Тейлора и пренебрежения членами второго порядка малости получим

$$R = \frac{\frac{\omega \mu_1 h}{4} [p_2 c k_1(p_1 b, p_1 c) - p_2 b k_1(p_1 c, p_1 b) K_1(p_1 b, p_1 c) + \frac{\pi p_1 c}{2} K_1^2(p_1 b, p_1 c) + \frac{\pi p_1 c}{2} [p_2 b K_2(p_1 b, p_1 c) + p_2 b K_0(p_1 c, p_1 b) K_2(p_1 b, p_1 c) + \frac{p_2 c K_0^2(p_1 c, p_1 b)] + \frac{\pi p_1 c}{2} K_1^2(p_1 b, p_1 c) + \frac{\omega \mu_2 h}{4} K_0(p_1 c, p_1 b) K_1(p_1 b, p_1 c) + \frac{\pi p_1 c}{2} [p_2 b K_2(p_1 b, p_1 c) + p_2 c K_0(p_1 c, p_1 b)]^2]; \quad (33)$$

$$X = \frac{\omega \mu_1 h}{4} \frac{K_0(p_1 c, p_1 b) K_1(p_1 b, p_1 c)}{\frac{\pi p_1 c}{2} K_1^2(p_1 b, p_1 c) + \frac{\pi p_1 c}{2} [p_2 b K_2(p_1 b, p_1 c) + p_2 c K_0(p_1 c, p_1 b)]^2}, \quad (34)$$

где R — активная составляющая вносимого сопротивления;

X — реактивная составляющая вносимого сопротивления;

$$N_0(x) I(y) - N_0(y) I_0(x) = K_0(x, y);$$

$$N_0(x) I_1(y) - I_0(x) N_1(y) = K_1(x, y);$$

$$N_1(x) I_1(y) - N_1(y) I_1(x) = K_2(x, y).$$

При больших значениях аргумента

$$I_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]; \quad (35)$$

$$N_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[x - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]. \quad (36)$$

Подставив (35) и (36) в (26), получим

$$Z = j \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{tg} [p(c-b)]. \quad (37)$$

Отсюда условие первого объемного резонанса при больших значениях аргумента цилиндрических функций принимает при

$$\sin p(c-b) = 0, \quad (38)$$

т. е.

$$p(c-b) = \frac{\pi}{2}. \quad (39)$$

Из полученных в настоящей работе выражений (38), (39) видно, что величина комплексной магнитной проницаемости достаточно полно характеризует сердечник только при низких рабочих частотах и малых геометрических размерах сердечника, т. е. при малых аргументах цилиндрических функций. При средних и больших значениях аргумента с магнитной проницаемостью важной характеристикой сердечника является его комплексная диэлектрическая проницаемость.