

АНАЛИЗ ОЦЕНОК ВЫБОРОЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Корреляционная обработка стохастических сигналов обеспечивает получение оценок выборочной корреляционной функции (КФ) процессов, поступающих на входы коррелятора. В связи с тем, что длительность наблюдения случайного сигнала конечна, данные оценки также являются случайными величинами. Поэтому для того чтобы оценить качество обработки при использовании многоканального коррелятора, необходимо знать совместные статистические характеристики сигналов на его выходах.

Рассмотрим схему коррелятора параллельного действия, приведенную на рис. 1. Входные сигналы  $X(t)$  и  $Y(t)$  представим в виде аддитивной смеси полезного сигнала,  $S(t)$  и мешающего фона в каналах  $n(t)$  и  $m(t)$ . Процессы  $S(t), n(t)$  и  $m(t)$  являются стационарными, взаимно некоррелированными гауссовскими, с нулевым средним:

$$X(t) = S(t) + n(t), \quad M\{S^2(t)\} = \sigma_s^2, \quad M\{n^2(t)\} = \sigma_n^2, \quad Y(t) = S(t) + m(t), \quad M\{m^2(t)\} = \sigma_m^2.$$

Фон  $n(t)$  и  $m(t)$  обусловлен действием внутренних шумов устройства и сигналов мешающих источников. Условимся, что полезный сигнал  $S(t)$  имеет равномерную в ограниченной полосе частот  $B$  спектральную плотность мощности  $S(f)$ :

$$S(f) = \begin{cases} \sigma_s^2 / B, & 0 \leq f \leq B \\ 0, & f > B \end{cases} \quad (1)$$

Процессы  $X(t)$  и  $Y(t)$  считаем стационарно связанными с дисперсиями:

$$\sigma_x^2 = \sigma_s^2 + \sigma_n^2 \quad \text{и} \quad \sigma_y^2 = \sigma_s^2 + \sigma_m^2.$$

Известно [1], что огибающая КФ указанных входных сигналов имеет вид

$$R_{XY}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau} = \sigma_x \sigma_y \rho_{XY}(\tau), \quad (2)$$

где  $\rho_{XY}(\tau)$  – нормированная КФ процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ .

Как видно из схемы, приведенной на рис. 1, сигнал на каждом из выходов многоканального коррелятора представляет собой оценку огибающей выборочной корреляционной функции  $\hat{R}_{XY}(\tau)$  при соответствующем значении аргумента  $\tau = n\tau_0, n=0,1, \dots, N$ , которая описывается выражением (2)

$$\hat{R}_{XY}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-|\tau|} x(t)y(t+|\tau|)dt, & 0 \leq |\tau| \leq T, \\ 0, & |\tau| > T \end{cases} \quad (3)$$

где  $T$  – длительность наблюдения (время интегрирования).

Так как время интегрирования обычно намного больше интервала корреляции входных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  ( $T \gg \tau_k$ ), то сигнал на выходе схемы нормализуется. В ряде работ проводится достаточно полный анализ математического ожидания и дисперсии получаемых оценок  $\hat{R}_{XY}(\tau)$  (например, [2, 3]). Однако для их полного статистического описания необходимо иметь информацию о степени коррелированности флюктуационной составляющей сигнала на выходе многоканального коррелятора. В [2] получено обобщенное выражение для ковариации оценок корреляционной функции. Конкретизируем его применительно к выбранной модели входных сигналов. Используя результаты [2, 3], получим выражение для дисперсии выборочной КФ вида  $\sin c$  х стационарных случайных процессов:

$$D\{\hat{R}_{xy}(\tau)\} = \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{T} \cdot \frac{\pi}{b} [1 + \rho_{xy}(2\tau)], \quad b = 2\pi B. \quad (4)$$

Равенство (4) можно представить в более наглядном виде:

$$D\{\hat{R}_{xy}(\tau)\} = \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{2BT} \cdot [1 + \rho_{xy}(2\tau)]. \quad (5)$$

В (4), (5) учтено сделанное ранее допущение о том, что  $T \gg \tau_K$ .

Получим выражение для ковариации оценок  $\hat{R}_{xy}(\tau)$  на выходах многоканального коррелятора в явном виде, для чего результаты [2] представим в следующей форме:

$$C_{ov}\{\hat{R}_{xy}(\tau_1), \hat{R}_{xy}(\tau_2)\} \equiv \frac{1}{T} \int_{-(T-\tau_1)}^{T-\tau_2} [R_{xy}(r)R_{xy}(r+\tau_2-\tau_1) + R_{xy}(r+\tau_2)R_{xy}(r-\tau_1)] dr. \quad (6)$$

Наибольший интерес вызывает поведение дисперсии и ковариации оценок выборочной КФ в пределах ее главного лепестка, т.е. при  $|\tau| \leq \tau_K$ . Зафиксируем в (6)  $\tau_1 = 0$ . Данное условие не является ограничительным, поскольку для выбранной модели случайных процессов  $R_{xy}(\tau)$  симметрична относительно максимума. Подставляя (2) в (6), получим

$$C_{ov}\{\hat{R}_{xy}(0), \hat{R}_{xy}(\tau_2)\} = \frac{2\sigma_x^2 \sigma_y^2}{T} \int_{-T}^{T-\tau_2} \frac{\sin br}{br} \cdot \frac{\sin b(r+\tau_2)}{b(r+\tau_2)} dr. \quad (7)$$

Чтобы избавиться от произведения в знаменателе (7), воспользуемся очевидным равенством

$$\frac{1}{r(r+\tau_2)} = \frac{1}{\tau_2} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r+\tau_2} \right]. \quad (8)$$

В результате подстановки (8) в (7) и элементарных тригонометрических преобразований получим

$$C_{ov}\{\hat{R}_{xy}(0), \hat{R}_{xy}(\tau_2)\} = \frac{2\sigma_x^2 \sigma_y^2}{Tb^2 \tau_2^2} \times \left\{ \begin{aligned} & \cos b\tau_2 \int_{-T}^{T-\tau_2} \frac{\sin^2 br}{r} dr + \sin b\tau_2 \int_{-T}^{T-\tau_2} \frac{\sin br \cdot \cos br}{r} dr - \\ & - \cos b\tau_2 \int_{-T}^{T-\tau_2} \frac{\sin br}{r+\tau_2} dr - \sin b\tau_2 \int_{-T}^{T-\tau_2} \frac{\sin br \cdot \cos br}{r+\tau_2} dr. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

В результате интегрирования равенство (9) принимает вид

$$C_{ov}\{\hat{R}_{xy}(0), \hat{R}_{xy}(\tau_2)\} = \frac{2\sigma_x^2 \sigma_y^2}{Tb^2 \tau_2^2} \left\{ \begin{aligned} & \cos b\tau_2 \cdot \ln \left| \frac{\tau_2 - T}{T} \right| + \sin b\tau_2 \cdot [Si2b(T - \tau_2) + Si(2bT)] + \\ & + \cos b\tau_2 [Ci(2bT) - Ci2b(T - \tau_2)] \end{aligned} \right. \quad (10)$$

При  $\tau_2 = 0$ , раскрывая неопределенность по правилу Лопиталю, получаем

$$D\{\hat{R}_{xy}(0)\} = \lim_{\tau_2 \rightarrow 0} C_{ov}\{\hat{R}_{xy}(0), \hat{R}_{xy}(\tau_2)\} = \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{BT}. \quad (11)$$

Располагая аналитическими выражениями для дисперсии и ковариации, можно получить соотношения для коэффициента корреляции оценок выборочной КФ на различных выходах многоканального коррелятора. По определению

$$\rho_R\{\hat{R}_{xy}(0), \hat{R}_{xy}(\tau_2)\} = \frac{C_{ov}\{\hat{R}_{xy}(0), \hat{R}_{xy}(\tau_2)\}}{\sqrt{D\{\hat{R}_{xy}(0)\} \cdot D\{\hat{R}_{xy}(\tau_2)\}}}. \quad (12)$$

Подставляя (10) и (5) в (12), получим

$$\rho_R \left\{ \hat{R}_{xy}(0), \hat{R}_{xy}(\tau) \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2 B \sqrt{1 + \rho_{xy}(2\tau_2)\tau_2}} \times \left\{ \cos b\tau_2 \cdot \ln \left| \frac{\tau_2 - T}{T} \right| + \sin b\tau_2 [Si2b(T - \tau_2) + Si(2bT)] + \cos b\tau_2 [Ci(2bT) - Ci2b(T - \tau)] \right\}. \quad (13)$$

Анализируя выражение (13) и учитывая поведение интегральных синуса и косинуса при больших значениях аргумента, заметим, что основной вклад в значение коэффициента корреляции  $\rho_R$  вносит второе слагаемое в фигурных скобках. Так как  $T \gg \tau_2$  и  $Si2b(T - \tau_2) + Si(2bT) \approx \pi$ , то из (13) можно получить приближенную формулу, удобную для практических расчетов:

$$\rho_R \left\{ \hat{R}_{xy}(0), \hat{R}_{xy}(\tau_2) \right\} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \rho_{xy}(2\tau_2)}} \cdot \rho_{xy}(\tau_2). \quad (14)$$

С целью наглядного представления полученных результатов было проведено математическое моделирование на ЭВМ, результаты которого приводятся ниже. На графиках, изображенных на рис. 2 – 5, сплошной линией показаны результаты моделирования, пунктиром – расчетные зависимости, определяемые формулами (5) и (13).

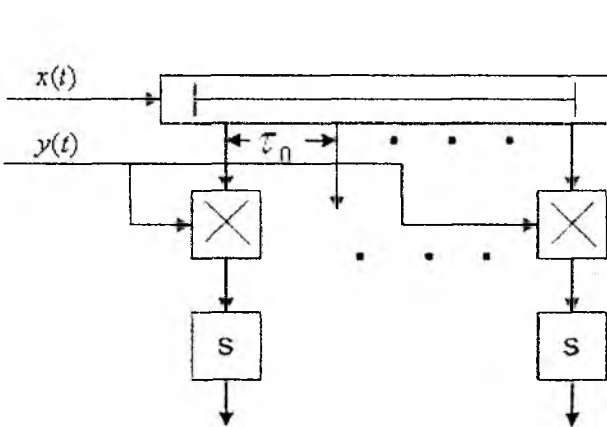


Рис. 1

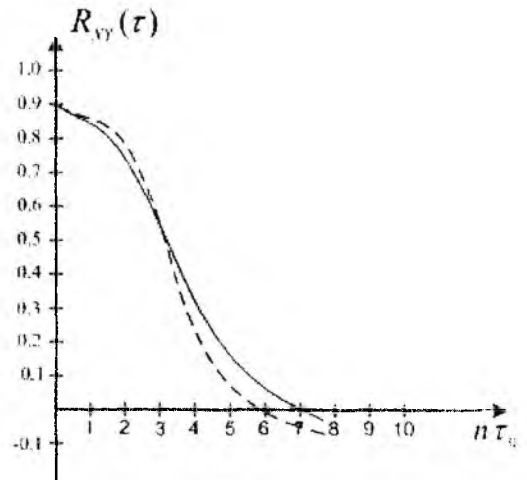


Рис. 2

Для формирования выборки гауссовского стационарного шума с нулевым математическим ожиданием и КФ вида  $\sin x$  использовался алгоритм скользящего суммирования. Усреднение статистических характеристик проводилось по 50 реализациям размером в 500 выборок случайного процесса. Приводимые далее графики, отражающие результаты моделирования, соответствуют случаю, когда на интервал корреляции приходится 7 отводов линии задержки, т.е.  $\tau_K = 6\tau_0$ . На рис. 2 приведены графики теоретической и выборочной КФ входных процессов с единичной дисперсией. Кривые на рис. 3, а, б показывают зависимость дисперсии оценки  $\hat{R}_{xy}(\tau)$  от величины смещения относительно максимума КФ. Для большей наглядности на рис. 3, а представлено отношение  $D\{\hat{R}_{xy}(\tau)\}$  к ее значению при  $\tau = 0$ . Как и следовало ожидать, максимальная величина дисперсии соответствует нулевому значению аргумента. При последовательном увеличении  $\tau_x$  значение  $D\{\hat{R}_{xy}(\tau)\}$  постепенно приближается к величине, составляющей половину  $D\{\hat{R}_{xy}(0)\}$ . Более наглядной, нежели  $D\{\hat{R}_{xy}(\tau)\}$ , является приведенная дисперсия оценки выборочной КФ. Под приведенной дисперсией

$D_N \{ \hat{R}_{xy}(\tau) \}$  понимается отношение дисперсии флюктуации процесса на выходе интегратора к квадрату его среднего. Кривые на рис. 3, б отражают характер изменения  $P_N \{ \hat{R}_{xy}(\tau) \}$  при увеличении параметра  $\tau$  относительно ее значения в точке  $\tau = 0$ .

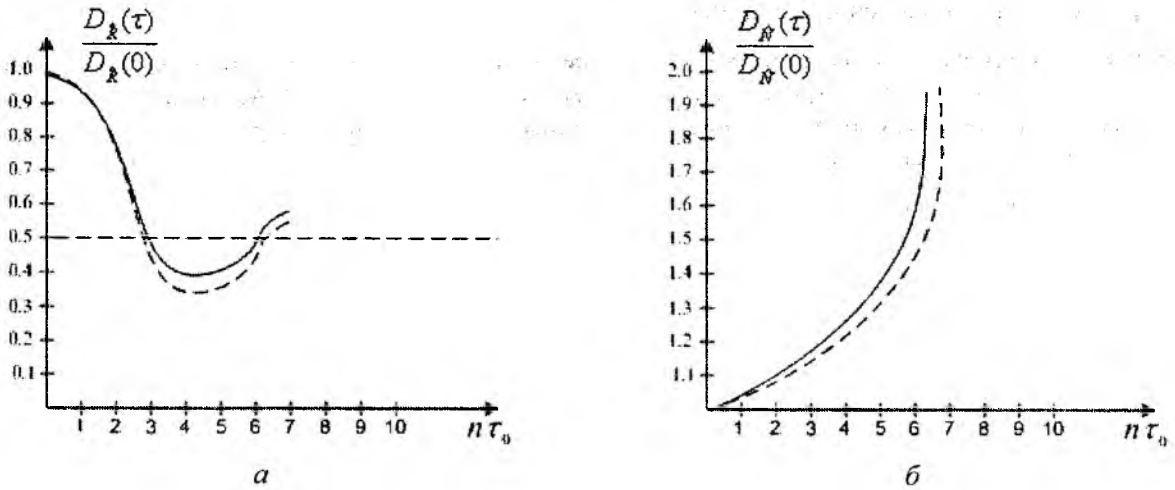


Рис. 3

Как видно из графиков, на интервале  $|\tau| \leq \tau_k / 2$ , рост приведенной дисперсии относительно невелик, однако при  $\tau_k / 2 \leq |\tau| \leq \tau_k$  значение  $D_N \{ \hat{R}_{xy}(\tau) \}$  резко возрастает. Кривая, представленная на рис. 4, отражает ковариацию оценок  $\hat{R}_{xy}(\tau)$  в пределах ее главного лепестка. В процессе моделирования ковариация рассчитывалась по формуле, являющейся дискретным аналогом (6):

$$C_{ov} \left\{ \hat{R}_{xy}(0), \hat{R}_{xy}(l) \right\} \equiv \frac{2}{N} \sum_{r=1}^N \hat{R}_{xy}(r) \hat{R}_{xy}(r+l), \quad (15)$$

где  $N$  – количество выборок шума.

На рис. 5 приведена зависимость коэффициента корреляции ординат выборочной КФ  $\rho_R$  от величины смещения относительно ее максимума, характеризующая степень коррелированности оценок  $\hat{R}_{xy}(\tau)$ , получаемых на различных выходах многоканального коррелятора.

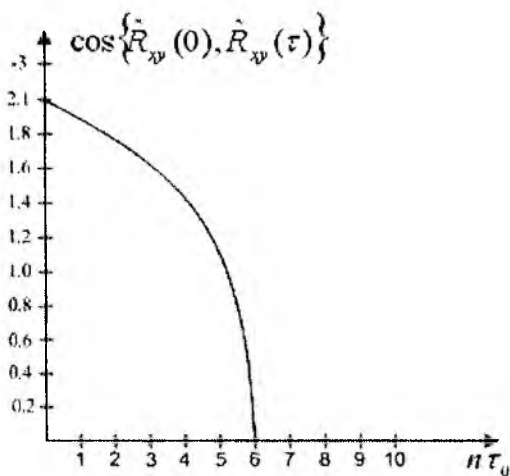


Рис. 4

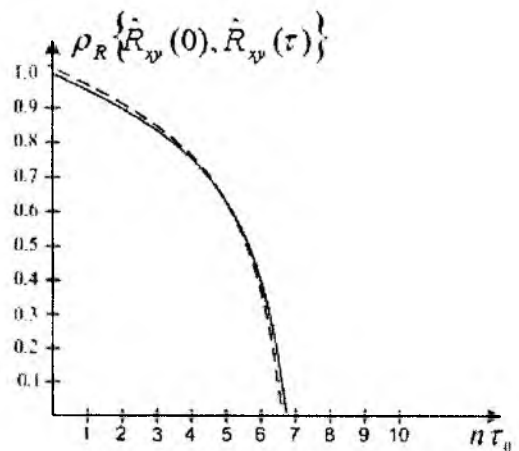


Рис. 5

Анализ графиков показывает, что если рассматривать выборочную корреляционную функцию как новый случайный процесс, сформированный в соответствии с (3) из входных  $X(t)$  и  $Y(t)$ , то, как и предполагалось в [2], он оказывается более коррелирован, чем исходные

и при  $|\tau| \leq \tau_K / 2$  коэффициент корреляции  $\rho_R(\tau)$  практически равен единице. Поэтому для анализируемой модели входных сигналов получить заметный выигрыш в точности оценивания огибающей выборочной корреляционной функции за счет использования оценок, получаемых на выходе нескольких каналов коррелятора (методом весового суммирования, например), не представляется возможным.

**Список литературы:** 1. Бендат Д., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1971. 2. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 2. М.: Мир, 1972. 3. Мирский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М.: Энергия, 1972. 4. Рыжик И. М. Градштейн Н. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гостехиздат, 1951.

*Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники*

*Поступила в редколлегию 04.10.2008*