УДК 621.391

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, канд. физ.-мат. наук, *Л. Н. НАУМОВ*

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ КВАДРАТИЧНОГО ДЕТЕКТОРА С НАКОПЛЕНИЕМ, РЕГИСТРИРУЮЩЕГО СИГНАЛ НА ФОНЕ МАРКОВСКОГО ШУМА

При анализе многих линейных систем представляет интерес средняя мощность на их выходе

$$\eta = \frac{1}{T}\int_0^T d\tau\,[s(\tau) + x(\tau)]^2. \tag{1}$$

Она аддитивно состоит из сигнального процесса $s(\tau)$ на фоне шума $x(\tau)$ и является случайной величиной [1; 2].

Рассмотрим статистическую структуру величины η для случая произвольного энергетического соотношения между процессами $s(\tau)$, $x(\tau)$. В качестве шума примем однокомпонентный нормальный марковский процесс [3] с корреляционной функцией

$$K(\tau, \tau') = \langle x(\tau)\, x(\tau')\rangle = \sigma_x \exp(-\nu\,|\tau - \tau'|) \tag{2}$$

и переходной плотности распределения вероятностей

$$w(x, t; x_0, 0) = [2\pi\sigma_x(1 - e^{-2\nu t})]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\delta_x}\frac{(x - x_0 e^{-\nu t})^2}{1 - e^{-2\nu t}}\right\}, \tag{3}$$

где ν, σ_x — декремент и интенсивность процесса $x(t)$. Если для всех t в интервале $(0, T)$ по вероятности $s^2(t) \gg x^2(t)$, то для плотности распределения вероятностей (ПРВ)

$$P(\eta) = (2\pi\Delta)^{-1/2} \exp[-(\eta - \langle\eta\rangle)^2/2\Delta]; \tag{4}$$

$$\langle\eta\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, s^2(t); \tag{5}$$

$$\Delta = \frac{2\sigma_x}{T}\iint_0^T dt_1\, dt_2\, s(t_1)\, s(t_2) \exp(-\nu\,|t_1 - t_2|). \tag{6}$$

В общем случае

$$P(\eta) = \left\langle \delta \left\{ \eta - \frac{1}{T} \int_0^T dt\, [s(t) + x(t)]^2 \right\} \right\rangle, \tag{7}$$

поэтому ПРВ можно записать в виде, для которого использовано Фурье-представление δ-функции,

$$P(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, e^{i\lambda\eta} Q(i\lambda, T) \tag{8}$$

с помощью производящей функции (ПФ)

$$Q(\lambda, T) = \left\langle \exp\left\{ -\frac{\lambda}{T} \int_0^T dt\, [s(t) + x(t)]^2 \right\} \right\rangle. \tag{9}$$

Задача нахождения среднего вида (7), (9) обладает большей общностью в своей постановке, чем рассмотренная в работах [1; 4] для процесса (1), при этом на произвольную детерминированную функцию $s(t)$ не накладываются никакие ограничения, кроме квадратичной интегрируемости.

Перейдем к нахождению математического ожидания (9). Следуя методу поиска таких средних [5, с. 102] ищем ПФ в виде

$$Q(\lambda, T) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0\, w(x_0) Q(\lambda, T; x_0); \tag{10}$$

$$Q(\lambda, T; x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi(x, t; x_0, 0)|_{t=T}, \tag{11}$$

где равновесная ПРВ

$$w(x_0) = (2\pi\sigma_x)^{-1/2} \exp(-x_0^2/2\sigma_x). \tag{12}$$

Введенная Ψ-функция удовлетворяет следующему параболическому дифференциальному уравнению [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = \nu \frac{\partial}{\partial x} (x\Psi) + \nu\sigma_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi - \frac{\lambda}{T} [s(t) + x(t)]^2 \Psi \tag{13}$$

с начальным условием $\Psi(x, 0; x_0, 0) = \delta(x - x_0)$. Найдя решение этого уравнения и дважды проинтегрировав его по x и x_0 с весом $w(x_0)$, получим ПФ $Q(\lambda, T)$.

Опуская промежуточные выкладки, приводим решение уравнения (13)

$$\Psi(x, t; x_0, 0) = [2\pi\sigma_x r^{-1}(e^{2rt}-1)]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{\lambda}{t}\int_0^t d\tau\, s^2(\tau) + \right.$$

$$+\frac{r-\upsilon}{2\upsilon\sigma_x}+(x^2-x_0^2)+\frac{r+\nu}{2}t+xa(t)+\frac{\nu\sigma_x}{2}\int_0^t d\tau\, a^2(\tau)- \tag{14}$$

$$\left.-\frac{r}{2\sigma_x}\left[1-e^{-2rt})^{-1}[x-x_0e^{-rt}+\nu\sigma_x\int_0^t d\tau\, a(\tau)\, e^{r(\tau-t)}\right]^2\right\},$$

$$\text{где } r = (\nu^2+2\lambda\nu\sigma_x)^{1/2}; \tag{15}$$

$$a(t) = -2\frac{\lambda}{T}\int_0^t d\tau\, s(\tau)\exp(rt-r\tau). \tag{16}$$

Полученное выражение для Ψ-функции является математическим ожиданием величины $\exp(-\lambda\eta)$, отыскиваемым при условии, что $x(0)=x_0$ и $x(t)=x$. Интегрируя результат (14) по x, x_0 согласно (10), (11), получаем

$$Q(\lambda, T) = [4r\nu e^{\nu T}(r_1^2e^{rT}-r_2^2e^{-rT})^{-1}]^{1/2}\times$$

$$\times Q_{xs}(\lambda, T)\exp\left\{-\frac{\lambda}{T}\int_0^T d\tau\, s^2(\tau)\right\}; \tag{17}$$

$$Q_{xs}(\lambda, T) = \exp\left\{\frac{2\lambda}{rT^2}\nu\sigma_x\int_0^T d\tau\int_\tau^T d\tau'\, s(\tau)\, s(\tau')\times\right.$$

$$\left.\times(r_1e^{r\tau}+r_2e^{-r\tau})\frac{r_1e^{r(T-\tau')}+r_2e^{-r(T-\tau')}}{r_1^2e^{rT}-r_2^2e^{-rT}}\right\}, \tag{18}$$

где $r_1 = r+\nu$, $r_2 = r-\nu$.

Из этих выражений следует, что в отсутствие шума $Q(\lambda, T)$ имеет экспоненциальный вид, что отвечает ПРВ δ-образного типа. В отсутствие сигнала, когда $s(t) = 0$, в (17) остается лишь первый множитель, численные расчеты с использованием которого осуществлены в [4]. В общем случае произвольного сигнала $s(t)$ необходимо пользоваться выражением для ПФ $Q(\lambda, T)$ в целом.

Из всего многообразия возможных функций $s(t)$ рассмотрим случай, когда $s(t) = \text{const}$ и $s^2(t) = \sigma_s$. Тогда третий множитель в (17) равен $\exp(-\lambda\sigma_s)$, а второй

$$Q(\lambda, T) = \exp\{2\upsilon\sigma_x\sigma_s\lambda^2T^{-2}r^{-3}(r_1^2e^{rT}-r_2^2e^{-rT})^{-1}\times$$

$$\times(4\nu^2-2\nu r_1e^{rT}+2\nu r_2e^{-rT}+r_1^2rTe^{rT}-r_2^2rTe^{-rT})\}. \tag{19}$$

На рис. 1 представлены результаты расчета ПРВ $P(\eta)$, выполненные согласно формулам (8), (17), (19). При осуществлении расчетов приняли, что $\langle\eta\rangle = 1,0$; $\nu = 1,0$; $T = 1,0$. Такие значения параметров являются промежуточными между асимптотическими случаями $\nu T \ll 1$, $\nu T \gg 1$. Из рис. 1 видно, что уже десятипроцентная компонента шума $x(t)$ приводит к значительной ширине

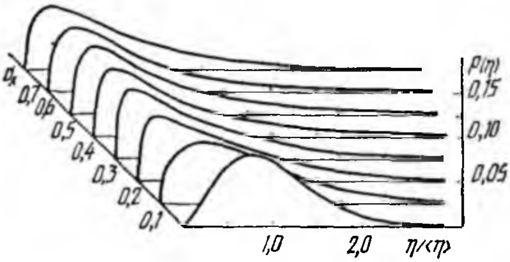

Рис. 1

распределения $P(\eta)$. Ясно, что при $\sigma_x \to 0$ ПРВ стремится к $\sigma(\eta - \sigma s)$ с шириной, равной нулю. Влияние низкоинтенсивного шума на формирование ПРВ $P(\eta)$ иллюстрируется рис. 2, 3. Интенсивность шума составляет проценты и десятые доли процента от суммарной интенсивности.

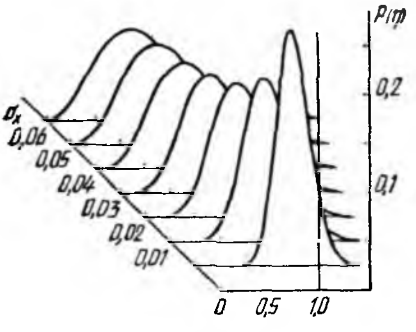

Рис. 2

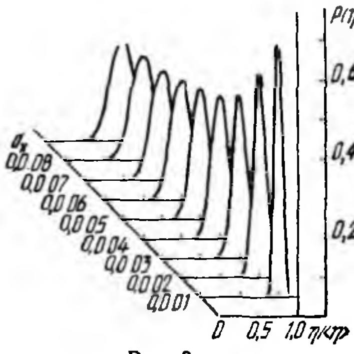

Рис. 3

Первые два момента η при произвольной функции $s(t)$

$$\langle\eta\rangle = \sigma_x + \frac{1}{T}\int_0^T d\tau\, s^2(\tau); \tag{20}$$

$$\langle\eta^2\rangle = \sigma_x^2 \frac{-1 + 2\nu T + \nu^2 T^2 + e^{-2\nu T}}{\nu^2 T^2} + \left[\frac{1}{T}\int_0^T d\tau\, s^2(\tau)\right]^2 + \frac{4\sigma_x}{T^2}\int_0^T d\tau \int_\tau^T d\tau'\, s(\tau')\, e^{\nu(\tau-\tau')}. \tag{21}$$

Тогда дисперсия ПРВ $P(\eta)$

$$\langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2 = \sigma_x^2 \frac{-1 + 2\nu T + e^{-2\nu T}}{\nu^2 T^2} + \\ + \frac{4\sigma_x}{T^2} \int_0^T d\tau \int_\tau^T d\tau' \, s(\tau) \, s(\tau') \, e^{\nu(\tau - \tau')}. \tag{22}$$

Дисперсия содержит линейное по σ_x слагаемое, поэтому в случае низкоинтенсивного шума она и определяет ширину распределения $P(\eta)$. Если $\sigma_x \ll \sigma_s$; $s(\tau) = \text{const} = \sigma_s^{1/2}$, то

$$\left(\frac{\langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2}{\langle \eta \rangle^2} \right)^{1/2} \approx \frac{4\sigma_x}{T} \left(\frac{-1 + \nu T + e^{-\nu T}}{\nu^2 T^2} \right)^{1/2}, \tag{23}$$

для $\nu T \gg 1$ ширина распределения стремится к $(8\sigma_x/\sigma_s)^{1/2}$. Асимптотика $P(\eta)$, приведенная в (4)—(6) имеет гауссов вид относительно своего аргумента.

Таким образом, рассмотрены характеристики помехоустойчивости наблюдаемых величин на выходе квадратичного детектора с накоплением. Прослежена зависимость помехоустойчивости от параметров ν и T, а также влияние на нее шумовой компоненты $x(t)$ в случае, когда ее интенсивность мала относительно интенсивности сигнала. В качестве сигнальной компоненты в полученном выражении для ПФ $Q(\lambda, T)$ может быть выбрана произвольная квадратичноинтегрируемая функция $s(t)$.

Список литературы: 1. *Райс Л.* Теория флуктуационных шумов // Теория передачи электрических сигналов при наличии помех.— М., 1969.— С. 88—238. 2. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники.— М. : Сов. радио, 1969.— 748 с. 3. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы.— М. : Сов. радио, 1977.— 488 с. 4. *Слепян Д.* Флуктуации мощности случайного сигнала // Определение параметров случайных сигналов. К., 1962.— С. 123—146. 5. *Лэкс М.* Флуктуации и когерентные явления.— М. : Мир, 1974.— 299 с.

Поступила в редколлегию 25.03.86