ИЗМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА МЕМБРАННЫХ ПРИБОРОВ ПРИ УМЕНЬШЕНИИ ИХ ГАБАРИТОВ

В. Ф. Прошкин

Харьков

При уменьшении габаритов исходного прибора-оригинала путем изменения размеров каждой из составляющих его деталей может быть получен прибор-модель, отличающийся от оригинала размерами и весом при сохранении той же структурной, кинематической и электрической схем.

Ниже рассматривается изменение характеристик переходного процесса мембранного прибора при уменьшении его габаритов. Уравнение сил, действующих в приборах, обладающих одной степенью свободы, в общем случае выражается зависимостью вида [2], [3]

$$M\ddot{X} + B\dot{X} + SX = f(t), \qquad (1)$$

где M — приведенное значение массы подвижной системы прибора;
B — коэффициент демпфирования подвижной системы прибора;
S — упругая жесткость подвижной системы прибора;
X — отклонение в одну и другую сторону от некоторого среднего положения;
$f(t)$ — внешняя сила.

В уравнении (1) опущена сила кулоновского трения, которую обычно считают постоянной по абсолютной величине. Учет силы трения усложняет исследование собственных движений подвиж-

ной системы прибора, особенно при переменном направлении движения. Поэтому в целях упрощения исследования силой кулоновского трения пренебрегают. Такое упрощение оправдано также и тем, что силы трения на результат исследования уравнения (1) существенного влияния не имеют, так как величина их в приборах достаточно мала.

Однако при исследовании времени переходного процесса подвижной системы прибора силу кулоновского трения необходимо учитывать. В этом случае ее влияние вполне ощутимо [2].

При анализе закона движения подвижной системы прибора под действием внутренних сил (собственное движение), уравнение (1) после введения обозначений

$$\frac{S}{M} = \Omega^2; \quad \frac{B}{M} = 2H$$

принимает вид

$$\ddot{X} + 2H\dot{X} + \Omega^2 X = 0. \tag{2}$$

При начальных условиях

$$t = 0 \begin{cases} X = X_0 \\ \dot{X} = 0 \end{cases}$$

решением (2), в зависимости от соотношения параметров подвижной системы прибора, могут быть следующие выражения.

1. При $H^2 > \Omega^2$

$$X = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \tag{3}$$

где

$$A_1 = \frac{X_0}{2\sqrt{H^2 - \Omega^2}} \cdot \frac{1}{\tau_2}; \quad A_2 = \frac{X_0}{2\sqrt{H^2 - \omega^2}} \cdot \frac{1}{\tau_1};$$

$$\tau_1 = \frac{1}{H - \sqrt{H^2 - \Omega^2}}; \quad \tau_2 = \frac{1}{H + \sqrt{H^2 - \Omega^2}}.$$

В данном случае переходный процесс определяется совокупностью двух составляющих, каждая из которых представляет затухающую экспоненту. Время затухания переходного процесса определяется первой экспонентой (первым слагаемым уравнения (3)):

$$t_n = \tau_1 \ln \frac{A_1}{\Delta X}, \tag{4}$$

где ΔX — зона застоя (статическая погрешность), обусловленная силой кулоновского трения F в кинематических парах подвижной системы прибора и равная [2]

$$\Delta X = \frac{F}{S}.$$

2. При $H^2 = \Omega^2$

$$X = X_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{5}$$

где

$$\tau = \frac{1}{H}, \tag{6}$$

время переходного процесса $t_п$ определяется вторым слагаемым (5), так как наличие множителя $\frac{t}{\tau}$ приводит к затягиванию переходного процесса

$$t_п = \tau \frac{\Delta X}{X_0} \cdot \frac{1}{\alpha}, \tag{7}$$

где α — находится из уравнения

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e^{\frac{\Delta X}{X_0}}. \tag{8}$$

3. При $H^2 < \Omega^2$

$$X = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega_0 t + \varphi), \tag{9}$$

где

$$A = X_0 \frac{\Omega}{\Omega_0}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Omega_0}{H};$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega^2 - H^2}; \quad \tau = \frac{1}{H}.$$

Время переходного процесса определяется из уравнения

$$t_п = \tau \ln \frac{A}{\Delta X}.$$

Рассмотрим изменение закона движения подвижной системы прибора при изменении его габаритов. Ограничимся случаем пропорционального изменения размеров оригинала, когда линейные размеры всех конструктивных элементов механизма прибора уменьшаются в одно и то же число раз, равное K, называемое коэффициентом изменения линейных размеров [1].

В этом случае по известным значениям круговой частоты колебания Ω и сопротивлению движению H подвижной системы оригинала можно определить соответствующие параметры для модели [1]

$$\omega = K\Omega; \tag{10}$$

$$h = K^2 H. \tag{11}$$

Уравнение движения подвижной системы модели имеет вид

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

а корни его характеристического уравнения

$$r_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2},$$

или, определяя через параметры оригинала, согласно (10) и (11),

$$r_{1,2} = -K^2H \pm K\sqrt{K^2H^2 - \Omega^2}. \tag{12}$$

Принимая начальные условия равными

$$t = 0 \begin{cases} x = x_0, \\ \dot{x} = 0 \end{cases},$$

получим следующие три случая.

1. Соотношение параметров подвижной системы оригинала таково, что $H^2 > \Omega^2$.

Так как $K > 1$ (рассматривается изменение габаритов оригинала в сторону уменьшения), то $K^2H^2 > \Omega^2$ и, следовательно, переходный процесс в модели будет описываться уравнением

$$x = a_1 e^{-\frac{t}{\tau_{M1}}} - a_2 e^{-\frac{t}{\tau_{M2}}}, \tag{13}$$

где

$$a_1 = \frac{x_0}{2K\sqrt{K^2H^2 - \Omega^2}} \cdot \frac{1}{\tau_{M2}}; \tag{14}$$

$$a_2 = \frac{x_0}{2K\sqrt{K^2H^2 - \Omega^2}} \cdot \frac{1}{\tau_{M1}}; \tag{15}$$

$$\tau_{M1} = -\frac{1}{r_1} = \frac{1}{K^2H^2 - K\sqrt{K^2H^2 - \Omega^2}}; \tag{16}$$

$$\tau_{M2} = -\frac{1}{r_2} = \frac{1}{K^2H^2 + K\sqrt{K^2H^2 - \Omega^2}}. \tag{17}$$

Введем обозначение $\gamma = \frac{\Omega}{H}$ и рассмотрим соотношения

$$\frac{a_1}{A_1} = \frac{x_0}{X_0} \cdot \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{K^2}}\right)\sqrt{1 - \gamma^2}}{(1 + \sqrt{1 - \gamma^2})\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{K^2}}} = \frac{x_0}{X_0} M; \tag{18}$$

$$\frac{a_2}{A_2} = \frac{x_0}{X_0} \cdot \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{K^2}}\right)\sqrt{1 - \gamma^2}}{(1 - \sqrt{1 - \gamma^2})\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{K^2}}} = \frac{x_0}{X_0} N; \tag{19}$$

$$\frac{\tau_{M1}}{\tau_1} = \frac{1}{K^2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma^2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{K^2}}}; \tag{20}$$

$$\frac{\tau_{M2}}{\tau_2} = \frac{1}{K^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{K^2}}}. \tag{21}$$

В табл. 1 приведены значения, вычисленные по (18) — (21).

Таблица 1

γ \ K	M			N			$\tau_{м1} : \tau_1$			$\tau_{м2} : \tau_2$		
	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$
0,1	1,00	1,00	1,00	0,50	0,18	0,08	1,00	1,00	1,00	0,50	0,20	0,10
0,5	0,96	0,94	0,93	0,45	0,17	0,08	1,04	1,06	1,06	0,48	0,19	0,09
0,9	0,70	0,64	0,62	0,23	0,07	0,04	1,23	1,33	1,38	0,41	0,15	0,07

Из идентичности (3) и (13) следует, что в рассматриваемом случае подвижная система оригинала и подвижная система модели перемещаются по апериодическому закону. Численные соотношения параметров, входящих в оба эти уравнения, показывают следующее:

а) переходный процесс как для оригинала, так и для модели определяется первой экспонентой [4];

б) начальное отклонение первой экспоненты модели a_1, как видно из табл. 1, в относительных единицах близко к значению начального отклонения первой экспоненты оригинала A_1 (так как при $\gamma \leqslant 0{,}5$ $M \approx 1$), а также $\tau_{м1} \approx \tau_1$.

Следовательно, с точностью до 10% параметры переходных процессов оригинала и модели можно считать эквивалентными.

Время переходного процесса подвижной системы модели

$$t_{пм} = \tau_{м1} \ln \frac{a_1}{\Delta x}. \tag{22}$$

Выразим $t_{пм}$ через параметры оригинала. Для этого примем начальное отклонение подвижной системы модели от положения равновесия (в момент $t = 0$) равным

$$x_0 = \frac{X_0}{K}, \tag{23}$$

т. е. в относительных единицах такое же, как и в оригинале.

Тогда из (18)

$$a_1 = \frac{A_1}{K} M.$$

Можно показать, что при пропорциональном изменении оригинала силы кулоновского трения f и упругая жесткость s подвижной системы модели определяются через соответствующие параметры оригинала как [1]

$$f = \frac{1}{K^2} \cdot F; \quad s = \frac{S}{K}.$$

Следовательно, зона застоя модели в функции зоны застоя оригинала

$$\Delta x = \frac{l}{s} = \frac{1}{K}\Delta X. \qquad (24)$$

После подстановки значений Δx и a_1 в (22), полагая $\tau_{м1} = \tau_1$ и $M = 1$, получим

$$t_{пм} = \tau_1 \ln \frac{A_1}{\Delta X} = t_п,$$

т. е. время переходного процесса подвижной системы модели в случае пропорционального изменения оригинала такое же, как и время переходного процесса оригинала (с точностью до 10%).

В процессе эксплуатации прибора-оригинала измеряется некоторый параметр Q в пределах от Q_{min} до Q_{max}, что соответствует отклонению подвижной системы прибора от X_{min} до X_{max}. Абсолютная величина погрешности измерения параметра Q, обусловленная наличием сил кулоновского трения:

$$\Delta Q = \frac{\Delta X}{X_{max} - X_{min}}(Q_{max} - Q_{min}).$$

Относительная погрешность прибора

$$\delta Q = \frac{\Delta Q}{Q_{max} - Q_{min}}.$$

При пропорциональном изменении размеров оригинала пределы отклонения подвижной системы модели равны $\frac{1}{K}(X_{max} - X_{min})$ при тех же пределах изменения измеряемой величины Q (так как функции прибора не меняются при уменьшении его габаритов).

Тогда абсолютная и относительная погрешности модели

$$\Delta q = \frac{\Delta x}{\frac{1}{K}(X_{max} - X_{min})}(Q_{max} - Q_{min}) = \Delta Q; \qquad (25)$$

$$\delta q = \frac{\Delta q}{Q_{max} - Q_{min}} = \delta Q, \qquad (26)$$

т. е. при пропорциональном уменьшении габаритов мембранного прибора его погрешность от наличия сил кулоновского трения не изменяется.

2. Соотношение параметров подвижной системы оригинала таково, что $H^2 = \Omega^2$, тогда, помня, что $K > 1$, имеем $K^2H^2 > \Omega^2$.

В этом случае корни характеристического уравнения (12) модели будут вещественными, отрицательными и разными, а переходный процесс подвижной системы модели описывается уравнением (13).

Значения начальных отклонений a_1 и a_2, а также постоянные времени $\tau_{м1}$ и $\tau_{м2}$, выраженные через параметры оригинала, найдем из (14)—(17) с учетом (6)

$$a_1 = x_0 \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}} = x_0 P; \tag{27}$$

$$a_2 = x_0 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}} = x_0 T; \tag{28}$$

$$\frac{\tau_{м1}}{\tau} = \frac{1}{K^2} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}}; \tag{29}$$

$$\frac{\tau_{м2}}{\tau} = \frac{1}{K^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}}. \tag{30}$$

В табл. 2 приведены значения, вычисленные по (27)—(30). Как видно из таблицы, переходный процесс подвижной системы модели определяется первой экспонентой ввиду быстрого затухания второй экспоненты.

Таблица 2

K	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$
P	1,21	1,06	1,03
T	0,21	0,06	0,03
$\tau_{м1} : \tau$	1,72	1,91	2,00
$\tau_{м2} : \tau$	0,29	0,11	0,05

Время переходного процесса модели по отношению к времени переходного процесса оригинала может быть найдено из (22) и (7) с учетом (23), (24) и (27)

$$\frac{t_{пм}}{t_п} = \frac{\tau_{м1}}{\tau} \cdot \frac{\alpha X_0}{\Delta X} \ln \frac{X_0}{\Delta X} P. \tag{31}$$

С помощью (8) и табл. 2 можно показать, что численное значение правой части уравнения (31) имеет практически постоянное значение; в рассматриваемом диапазоне изменения параметров оригинала и коэффициента изменения линейных размеров K, оно приближенно равно 1,22, т. е. $t_{пм} \approx 1{,}22 t_п$.

Увеличение времени переходного процесса подвижной системы модели по сравнению с оригиналом объясняется тем, что в оригинале соотношение параметров подвижной системы обеспечивало критический апериодический процесс, характеризующийся, как известно, минимальным временем переходного процесса (минимальным временем успокоения).

Отметим также, что для рассматриваемого случая соотношения параметров оригинала $H^2 = \Omega^2$ справедливы зависимости (25) и (26), т. е. неизменность абсолютной и относительной погреш-

ностей прибора, обусловленных наличием сил кулоновского трения при уменьшении его габаритов.

3. Соотношение параметров подвижной системы оригинала таково, что $H^2 < \Omega^2$, т. е. движение подвижной системы оригинала к положению равновесия носит колебательный характер (9).

Мы этот случай не рассматриваем, так как колебательный характер движения подвижной системы прибора нежелателен, и мембранные приборы с таким характером движения подвижной системы, как правило, не проектируются.

В мембранных приборах, имеющих апериодический характер движения подвижной системы, характер движения подвижной системы прибора к положению равновесия, время переходного процесса, абсолютная и относительная погрешности, обусловленные наличием сил кулоновского трения, не изменяются при пропорциональном уменьшении габаритов этих приборов.

В частном случае, если характер движения подвижной системы прибора был апериодическим критическим, время переходного процесса при пропорциональном уменьшении габаритов мембранного прибора увеличится относительно времени переходного процесса исходного прибора приблизительно на 20%.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Михайлов, В. Ф. Прошкин. Виброустойчивость мембранных приборов при уменьшении их габаритов. Сб. «Приборы и системы автоматики», вып. 16. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.

2. С. С. Тихменев. Элементы точных приборов. Оборонгиз, 1956.

3. С. П. Тимошенко. Теория колебаний в инженерном деле. Гостехиздат, 1939.

4. Д. В. Васильев, Г. С. Филиппов. Основы теории и расчета следящих систем. Госэнергоиздат, 1959.

УЧЕТ ЭНЕРГИИ УХОДЯЩЕГО ПОТОКА ПРИ ЭКОНОМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ВОДОПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ

Э. Н. Рыбников

Харьков

С учетом математической модели установившегося потокораспределения [1] функция щели, представляющая собой приведенные суммарные затраты на строительство и эксплуатацию сети при экономическом расчете, имеет вид

$$V = \sum_{r=1}^{l}\left(\frac{M_r}{\overline{h_r^m}} + C_r h_r\right) + \sum_{t=s+2}^{m}\left(\frac{M_t}{\overline{h_t^m}} + C_t h_t\right) + \sum_{r=l+1}^{s} C_r \Delta h_r^c. \qquad (1)$$