Приклади Наближеного Відновлення Розривних Функцій Двох Змінних Сумами Фур'є без Явища Гіббса

Олег М. Литвин
кафедра інформаційних комп'ютерних технологій і математики
Українська інженерно-педагогічна академія
Харків, Україна
academ_mail@ukr.net

Олександра Литвин
кафедра прикладної математики
Харківський національний університет радіоелектроніки
Харків, Україна
litvinog@ukr.net

Examples of Approximate Recovery of Discontinuous Functions of Two Variables by Fourier Sums without the Gibbs Phenomenon

Oleg M. Lytvyn
Department of Computer Information technology
Ukrainian engenering-pedagogical academy
Kharkiv, Ukraine
academ_mail@ukr.net

Oleksandra G.Lytvyn
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
litvinog@ukr.net

***Анотація*—Дана робота є продовженням досліджень авторів з наближення розривних функцій, що описують внутрішню структуру 2D тіла з допомогою проекцій, які поступають з комп'ютерного томографа. Пропонується метод побудови сплайн-функції, яка має на вказаних лініях такі ж розриви першого роду, як і наближувана розривна функція. На цій основі будується неперервна функція, для відновлення якої використовується метод О. М. Литвина наближення сумами Фур'є з використанням проекцій. Метод ілюструється на конкретних прикладах наявності однієї та двох ліній розриву. Наведено аналіз результатів. Підтверджується факт зникнення впливу явища Гіббса на кінцевий результат.**

***Abstract*—This work is a continuation of the authors' research on the approximation of discontinuous functions that describe the internal structure of a 2D body using projections coming from a computer tomograph. A method for constructing a spline function is proposed, which has the same discontinuities of the first kind on the indicated lines as the approximate discontinuity function. On this basis, a continuous function is built, for the restoration of which the method of O. M. Lytvyn approximation of Fourier sums using projections.The method is illustrated by specific examples of the presence of one and two rupture lines. The analysis of results is given. The fact of disappearance of the influence of the Gibbs phenomenon on the final result is confirmed.**

Ключові слова—комп'ютерна томографія, реконструкція, зображення, розривна функція, розривний сплайн, сума Фур'є

Keywords—computer tomography, reconstraction, image, discontinuous function, discontinuous spline, sum Fourier

I. Вступ

Задача відновлення функцій за допомогою проекцій виникає в комп'ютерній томографії, коли експериментальними даними є не значення наближуваної функції в окремих точках, а інтеграли вздовж заданої системи ліній – проекцій, які поступають з комп'ютерного томографа. У роботах [1, 2, 3] викладена основна ідея, яка може бути використана для розв'язання поставленої задачі. Ця ідея полягає у виконанні наступних етапів.

1. Вважаємо лінії розриву функції $f(x,y)$ відомими. Будуємо сплайн-функцію $Sp(x,y)$, яка має на вказаних лініях такі ж розриви першого роду, як і наближувана функція. У даній роботі використовуємо метод побудови розривного сплайну, викладений у роботі авторів [1].

2. Знаходимо функцію:

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - Sp(x,y).$$

3. Відновлюємо функцію $\varphi(x,y)$ за допомогою метода скінченних сум Фур'є, наведеного у роботі [4], враховуючи, що ця функція не має розривів. Тобто її можна наближувати з допомогою відповідних сум Фур'є без явища Гіббса. Позначимо цю функцію $\tilde{\varphi}(x,y)$.

4. Використовуємо для аналізу функції $f(x,y)$ суму побудованого вище сплайну та наближення функції $\varphi(x,y)$ сумами Фур'є.

II. Загальна постановка задачі. Приклади

Вважаємо, що область, в якій задана розривна функція $f(x,y)$ повністю належить квадрату $[0,1]^2$ і відомі лінії розриву першого роду функції $f(x,y)$, що є колами з центром у точці $(0{,}5;\ 0{,}5)$, радіуси яких $R_1 < R_2 < \ldots < R_M$.

У загальному випадку задання розривної функції $f(x,y)$ та побудова розривного сплайну $Sp(x,y)$ наведена у роботі [1]. Ілюструємо цей підхід на прикладах наявності однієї та двох ліній розриву для випадку, коли функція $\varphi(x,y)$ неперервна.

Приклад 1. Наближене відновлення розривної функції $f(x,y)$, яка має одну лінію розриву, що є колом.

Задана інформація:

- M – кількість ліній розриву, $M = 1$;
- $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ – задані функції для побудови тестової розривної функції $f(x,y)$;
- радіус кола R_1 і його центр $(0{,}5;0{,}5)$;
- проекційні дані для функції $f(x,y)$.

Розв'язання задачі виконується так:

1. Побудова функції $f(x,y)$.

Задаємо функцію:

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y), & w_1(x,y) > 0; \\ \dfrac{f_1(x,y) + f_2(x,y)}{2}, & w_1(x,y) = 0; \\ f_2(x,y), & w_1(x,y) < 0, \end{cases}$$

$$w_1(x,y) = R_1 - \sqrt{(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2}\ .$$

2. Побудова сплайну $Sp(x,y)$.

$$Sp(x,y) = \begin{cases} \dfrac{w_1(x,y)}{R_1} f_1(0{,}5;0{,}5) + \\ + \left(1 - \dfrac{w_1(x,y)}{R_1}\right) f_{1,N}(x,y),\ w_1(x,y) > 0; \\ \dfrac{f_1(x,y) + f_2(x,y)}{2},\ w_1(x,y) = 0; \\ \dfrac{w(x,y)}{w(x,y) - w_1(x,y)} f_{2,N}(x,y) + \\ + \dfrac{-w_1(x,y)}{w(x,y) - w_1(x,y)} Of_2(x,y),\ w_1(x,y) < 0. \end{cases}$$

3. Формули для функцій, використаних для побудови сплайну.

$$f_{1,N}(x,y) = f_1\big(X(x,y), Y(x,y)\big),$$
$$X(x,y) = x - w_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} w_1(x,y),$$
$$Y(x,y) = y - w_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y} w_1(x,y).$$

$$f_{2,N}(x,y) = f_2\big(X(x,y), Y(x,y)\big),$$
$$X(x,y) = x - w_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} w_1(x,y),$$
$$Y(x,y) = y - w_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y} w_1(x,y).$$

$$w(x,y) = x(1-x)\,y(1-y),$$

$$O_1 f_2(x,y) = \frac{x-1}{0-1} f_2(0,y) + \frac{x-0}{1-0} f_2(1,y),$$

$$O_2 f_2(x,y) = \frac{y-1}{0-1} f_2(x,0) + \frac{x-0}{1-0} f_2(x,1),$$

$$O_1 O_2 f_2(x,y) = \frac{x-1}{0-1} O_2 f_2(0,y) + \frac{x-0}{1-0} O_2 f_2(1,y),$$

$$Of_2(x,y) = O_1 f_2(x,y) + O_2 f_2(x,y) - O_1 O_2 f_2(x,y).$$

4. Побудова неперервної функції $\varphi(x,y)$.

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - Sp(x,y).$$

5. Застосування методу О. М. Литвина [4] для знаходження коефіцієнтів Фур'є з використанням проекцій для функції $\varphi(x,y)$. Вважаються відомими відповідні проекційні дані. Отримаємо функцію $\tilde{\varphi}(x,y)$.

6. Наближене відновлення функції $f(x,y)$.

$$\tilde{f}(x,y) = Sp(x,y) + \tilde{\varphi}(x,y).$$

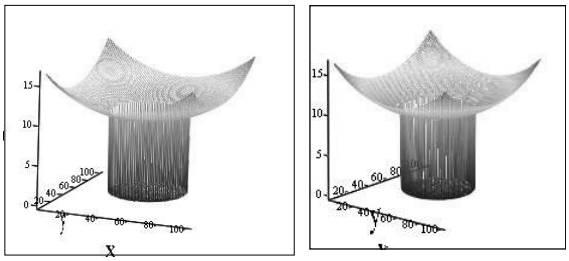
У чисельному експерименті для прикладу 1 задавались функції:

$$f_1(x,y) = k_1 \sin\left((x-0,5)^2 + (y-0,5)^2\right),$$

$$f_2(x,y) = k_2 e^{(x-0,5)^2+(y-0,5)^2},$$

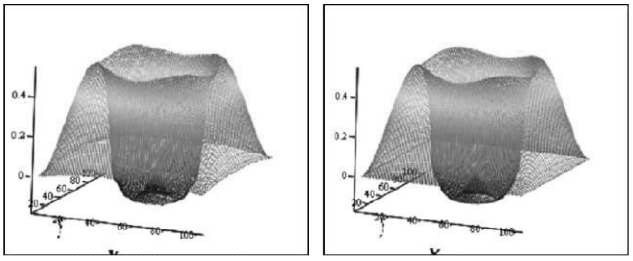
де k_1, k_2 – задані числа. Радіус кола $R_1 = 0,25$, центр кола $(0,5;0,5)$.

Наводимо геометричну інтерпретацію заданої функції $f(x,y)$ та її наближення $\tilde{f}(x,y)$; побудованої функції $\varphi(x,y)$ та її наближення $\tilde{\varphi}(x,y)$ при заданому порядку суми Фур'є $N = 16$.



ZT BZFSp

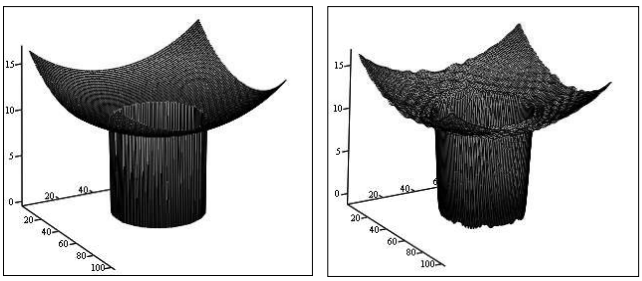
Рис. 1. Зображенняфункції $f(x,y)$ та $\tilde{f}(x,y)$



BZF ZT

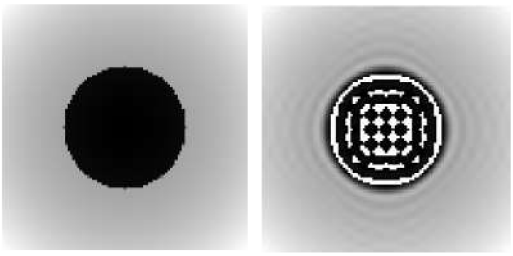
Рис. 2. Зображенняфункції $\varphi(x,y)$ та $\tilde{\varphi}(x,y)$

Для порівняння наводимо також зображення функції $f^*(x,y)$, яке отримано при безпосередньому використанні методу сум Фур'є для розривної функції $f(x,y)$. На рис. 3, 4 видно присутність осциляцій, що відповідає наявності явища Гіббса. Цей факт знайшов відображення і далі в таблиці 1 при підрахунку похибок.



ZT BZF

Рис. 3. Зображенняфункції $f(x,y)$ та $f^*(x,y)$



ZT·KK BZF·KK

Рис. 4. Напивтонове зображенняфункції $f(x,y)$ та $f^*(x,y)$

Порівняння похибок, наведених у табл. 1, також показує переваги запропонованого методу для відновлення розривних функцій.

ТАБЛИЦЯ I. ПОРІВНЯННЯ ПОХИБОК ДЛЯ ПРИКЛАДУ 1

	No.	**Максимальна відносна**	**Середньо-квадратична**	**Середня абсолютна**
Приклад 1 Без впливу явища Гіббса	4	0,223	0,038	0,029
	8	0,141	0,018	0,012
Приклад 1 З впливом явища Гіббса	16	0,083	0,0079	0,0046
	16	0,317	0,643	0,258

Приклад 2. Наближене відновлення розривної функції $f(x,y)$, яка має дві лінії розриву, що є концентричними колами.

Задана інформація:

- M – кількість ліній розриву, $M = 2$;
- $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $f_3(x,y)$ – задані функції для побудови тестової розривної функції $f(x,y)$;
- радіуси кіл R_1, R_2, їх центр $(0,5;0,5)$;
- проекційні дані для функції $f(x,y)$.

Розв'язання задачі виконується так:

1. Побудова функції $f(x,y)$.

Задаємо функцію:

$$f(x,y)=\begin{cases} f_1(x,y),\ 0 \le w(x,y) < R_1; \\ \dfrac{f_1(x,y)+f_2(x,y)}{2},\ w(x,y)=R_1; \\ f_2(x,y),\ R_1 < w(x,y) < R_2; \\ \dfrac{f_2(x,y)+f_3(x,y)}{2},\ w(x,y)=R_2; \\ f_3(x,y), \\ \left(w(x,y) > R_2\right) \wedge \left(x(1-x)y(1-y) \ge 0\right), \end{cases}$$

$$w(x,y)=\sqrt{(x-0,5)^2+(y-0,5)^2}\ .$$

2. Побудова сплайну $Sp(x,y)$.

$$Sp(x,y)=\frac{R_1-w(x,y)}{R_1} f_1(0,5;0,5)+$$

$$+\frac{w(x,y)}{R_1} f_1\left(X1(x,y),Y1(x,y)\right),$$

$$X1(x,y)=x-\left(w(x,y)-R_1\right)\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$Y1(x,y)=y-\left(w(x,y)-R_1\right)\frac{\partial w}{\partial y},$$

якщо $0 < w(x,y) < R_1$,

$$Sp(x,y)=\frac{f_1(x,y)+f_2(x,y)}{2},$$

якщо $w(x,y)=R_1$.

$$Sp(x,y)=\frac{w(x,y)-R_2}{R_1-R_2} f_2\left(X1(x,y)Y1(x,y)\right)+$$

$$+\frac{w(x,y)-R_1}{R_2-R_1} f_2\left(X2(x,y)Y2(x,y)\right),$$

$$X1(x,y)=x-\left(w(x,y)-R_1\right)\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$Y1(x,y)=y-\left(w(x,y)-R_1\right)\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$X2(x,y)=x-\left(w(x,y)-R_2\right)\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$Y2(x,y)=y-\left(w(x,y)-R_2\right)\frac{\partial w}{\partial y},$$

якщо $R_1 < w(x,y) < R_2$,

$$Sp(x,y)=\frac{f_2(x,y)+f_3(x,y)}{2},$$

якщо $w_2(x,y)=R_2$.

$$Sp(x,y)=\frac{\Omega(x,y) f_3\left(X2(x,y),Y2(x,y)\right)}{\Omega(x,y)+\left(w(x,y)-R_2\right)}+$$

$$+\frac{Of_3(x,y)(w-R_2)}{\Omega(x,y)+\left(w(x,y)-R_2\right)},$$

$$X2(x,y)=x-\left(w(x,y)-R_2\right)\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$Y2(x,y)=y-\left(w(x,y)-R_2\right)\frac{\partial w}{\partial y},$$

якщо $\left(w(x,y) > R_2\right) \wedge \left(x(x-1)y(y-1) \ge 0\right)$.

$$\Omega(x,y)=x(1-x)y(1-y).$$

Далі пункти 3), 4), 5), 6) аналогічні наведеним у прикладі 1.Зокрема,

$$O_1 f_3(x,y)=\frac{x-1}{0-1} f_3(0,y)+\frac{x-0}{1-0} f_3(1,y),$$

$$O_2 f_3(x,y)=\frac{y-1}{0-1} f_3(x,0)+\frac{x-0}{1-0} f_3(x,1),$$

$$O_1O_2 f_3(x,y)=\frac{x-1}{0-1} O_2 f_3(0,y)+\frac{x-0}{1-0} O_2 f_3(1,y),$$

$$Of_3(x,y)=O_1 f_3(x,y)+O_2 f_3(x,y)-O_1O_2 f_3(x,y),$$

У чисельному експерименті для прикладу 2 задавались функції:

$$f_1(x,y)=k_1 \sin\left((x-0,5)^2+(y-0,5)^2\right),$$

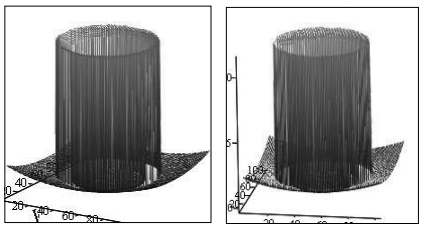
$$f_2(x,y)=k_2 e^{(x-0,5)^2+(y-0,5)^2},$$

$$f_3(x,y) = b_0 + b_1(w - R_2) + b_2(w - R_2)^2 + b_3(w - R_2)^3,$$

де $k_1, k_2, b_0, b_1, b_2, b_3$ задані числа. Радіуси кіл $R_1 = 0,25$, $R_2 = 0,35$, центр кіл $(0,5;0,5)$.

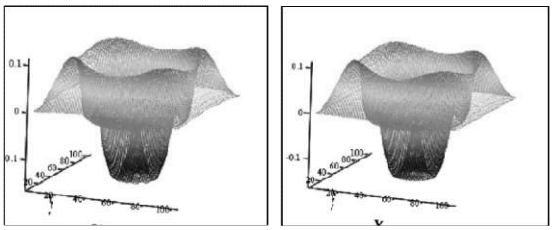
$$R_1 = 0,25,\ R_2 = 0,35.$$

Наводимо геометричну інтерпретацію заданої функції $f(x,y)$ та її наближення $\tilde{f}(x,y)$; побудованої функції $\varphi(x,y)$ та її наближення $\tilde{\varphi}(x,y)$ при заданому порядку суми Фур'є $N = 16$.



ZT BZFSp

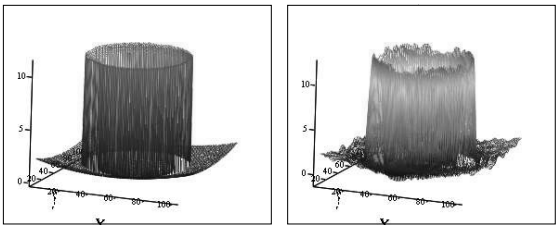
Рис. 5. Зображення функції $f(x,y)$ та $\tilde{f}(x,y)$



BZF ZT

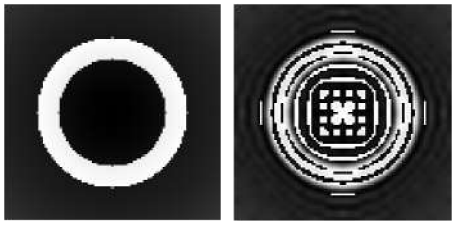
Рис. 6. Зображенняфункції $\varphi(x,y)$ та $\tilde{\varphi}(x,y)$

Для порівняння наводимо також зображення функції $f^*(x,y)$, яке отримано при безпосередньому використанні методу сум Фур'є для розривної функції $f(x,y)$. На рис. 7,8 видно присутність осциляцій, що відповідає наявності явища Гіббса. Цей факт знайшов відображенняі далі в табл. 2 при підрахунку похибок.



ZT BZF

Рис. 7. Зображення функції $f(x,y)$ та $f^*(x,y)$



ZT·KK BZF·KK

Рис. 8. Напивтонове зображенняфункції $f(x,y)$ та $f^*(x,y)$

Порівняння похибок, наведених у табл. 2, також показує переваги запропонованого методу для розривних функцій.

ТАБЛИЦЯ II. ПОРІВНЯННЯ ПОХИБОК ДЛЯ ПРИКЛАДУ 2

	No.	**Максимальна відносна**	**Середньо-квадратична**	**Середня абсолютна**
Приклад 1 Без впливу явища Гіббса	4	0,553	0,021	0,016
	8	0,223	0,0055	0,0040
Приклад 1 З впливом явища Гіббса	16	0,128	0,0025	0,0016
	16	0,493	0,987	0,509

III. ВИСНОВКИ

1. У розглянутих прикладах різниця між наближуваною функцією $f(x,y)$ і розривним сплайном $Sp(x,y)$ є неперервною функцією, що дозволяє наближувати її з використанням методу скінченних сум Фур'є з проекційними даними.

2. Збільшення порядку скінченних сум Фур'є приводить до зменшення похибки наближення функції $f(x,y)$. При цьому для обчислення коефіцієнтів Фур'є використовуються проекції.

3. Явище Гіббса в наближуваній функції відсутнє.

4. Запропонований метод є одним з ефективних підходів уникнення явища Гіббса, який виникає при наближенні сумами Фур'є розривних функцій двох змінних.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] O. M. Lytvyn, O. G. Lytvyn, O. O. Lytvyn and V. I. Mezhuyev,«The Method of Reconstructing Discontinuous Functions Using Projections Data and Finite Fourier Sums»,The IX International Scientific and Practical Conference *«Information Control Systems &Technologies (ICST-2020)»*, 24–26 of September 2020, Odessa, pp. 661–673.

[2] О. М. Литвин, О. Г. Литвин,«Про один підхід до наближення розривних функцій з використанням проекцій і скінченних сум Фур'є»,*Обчислювані методи і системи перетворення інформації*: зб. пр..V-ї наук.-техн. конф., Львів, 4–5 жовтня 2018 р. Львів: ФМІ НАНУ, 2018, с. 8–11.

[3] О. М. Литвин, О. Г. Литвин,«Метод відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проекцій і скінченних сум Фур'є»,7-а Міжнародна науково-технічна

конференція *«Інформаційні системи та технології ІСТ-2018»*, 10–15 вересня 2018 р., Харків-Коблеве, 2018, с. 120–122.

[4] О. М. Литвин, «Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії»,*Системний аналіз, управління і інформаційні технології:* Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. Збірка наукових праць. Випуск 125. Харків: ХДПУ, 2000, с. 27–35.