УДК 519.85

С. В. ЯКОВЛЕВ, канд. физ.-мат. наук, И. В. ГРЕБЕННИК

СВОЙСТВА ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВ k-РАССТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ И БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Пусть $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$. Рассмотрим множество A_n^k k-расстановок (размещений) без повторений [1]. Элементами этого множества являются упорядоченные наборы $a=(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k})$ из k различных символов множества M. Элементы могут отличаться друг от друга как символами, так и порядком их следования. Множество сочетаний без повторений C_n^k состоит из возможных наборов $c=(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_k})$ по k символов из n, отличающихся только составом символов в каждом наборе $c^i \in C_n^k$. Не теряя общности, будем считать, что в каждом наборе $c^i \in C_n^k$ элементы упорядочены по возрастанию $c_1^i \leqslant c_2^i \leqslant ... \leqslant c_k^i$. Из каждого набора $c^i \in C_n^k$ можно образо-

* *Князева В. Ф.* Максимальные абелевы подгруппы группы 1-треугольных матриц над произвольным полем//Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 12. С. 13—16.

вать $k!$ перестановок. Проделав такую операцию со всеми наборами $c^i \in C_n^k$, получим множество A_n^k. Таким образом, A_n^k представимо в виде

$$A_n^k = \bigcup_{l=1}^{N} P_k^l,$$

где $N = \mathrm{Card}\, C_n^k$, P_k^l — множество перестановок из k символов, принадлежащих набору $c^l \in C_n^k$.

Осуществим биекцию множеств A_n^k и P_k^l на подмножества E_n^k и $E_k^{(l)}$ евклидова пространства R^k. Элементу $a \in A_n^k$ поставим в соответствие $x \in E_n^k$ по правилу $a_i = x_i$, $i = \overline{1,k}$. Элементу $p^l \in p_k^l$ поставим в соответствие элемент $e^l \in E_k^{(l)}$ по правилу $p_j^l = e_j^l$, $j = \overline{1,k}$, $i = \overline{1,N}$. Очевидно, что $E_n^k = \bigcup_{l=1}^{N} E_k^{(l)}$.

Доказана теорема [2], которая дает представление множества $F_k^{(i)}$ как пересечения многогранника и границы гиперсферы.

Теорема 1. *Точки множества $E_k^{(i)}$ и только они удовлетворяют системе*

$$\sum_{j=1}^{k} e_j^l = \sum_{j=1}^{k} c_j^l; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} e_{s_j}^{l} \geq \sum_{j=1}^{m} c_j^l; \tag{2}$$

$$\forall m \in I_{k-1},\ s_j \in I_k,\ s_l \neq s_j\ \forall l \neq j;\ j, l \in I_n;$$

$$\sum_{j=1}^{k} (e_j^l)^2 = \sum_{j=1}^{k} (c_j^l)^2. \tag{3}$$

Здесь и далее I_r — множество первых r натуральных чисел. Многогранник, описываемый системой (1), (2), называется перестановочным многогранником [3, 4]. *Обозначим его Π_k, а замкнутое множество, ограниченное гиперсферой* (1), (3), *обозначим $\bar{S}_{k-1}^l$. С учетом приведенных рассуждений можно сформулировать следующую теорему о представлении множества E_n^k.*

Теорема 2. *Множество E_n^k представимо в виде объединения множеств вершин перестановочных многогранников Π_k, причем никакие два многогранника Π_k^i и Π_k^j $(i \neq j)$ не имеют общих вершин, т. е.*

$$E_n^k = \bigcup_{i=1}^{N} [\Pi_k^l \cap \bar{S}_{k-1}^l] = \bigcup_{l=1}^{N} E_k^{(l)},$$

где $N = \mathrm{Card}\, C_n^k$, а Π_k^l и $\bar{S}_{k-1}^l$ определяются соотношениями (1), (2) и (1) (3) соответственно.

Рассмотрим множество сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^k$. Его элементами являются всевозможные наборы $\overline{c}=(\overline{c}_1, \overline{c}_2, ..., \overline{c}_k)$ по k символов из n, причем каждый из символов $\overline{c}_i$ может повторяться в наборе $\overline{c}$ от 1 до k раз $(\overline{c}_i \in M)$. Наборы $\overline{c}^i \in \overline{C}_n^k$ отличаются друг от друга только составом символов в каждом наборе. Не теряя общности, будем считать, что $\forall \overline{c}^i \in \overline{C}_n^k$ $\overline{c}_1^i \leqslant \overline{c}_2^i \leqslant ... \leqslant \overline{c}_k^i$. Каждый набор $\overline{c}^i \in \overline{C}_n^k$ порождает множество перестановок с повторениями $P^i_{k(n_1,n_2,...,n_t)}$ $\left(\sum_{i=1}^{t} n_i = k\right)$.

Образовав всевозможные перестановки с повторениями из всех элементов множества $\overline{C}_n^k$, очевидно, получим множество $\overline{A}_n^k$ k-расстановок (размещений) с повторениями [1]. Таким образом, $\overline{A}_n^k$ представимо в виде

$$\overline{A}_n^k = \bigcup_{i=1}^{L} P^i_{k(n_1,n_2,...,n_t)},$$

где $L = \text{Card}\ \overline{C}_n^k$.

Осуществим описанным выше способом биекцию множеств $\overline{A}_n^k$ и $P^i_{k(n_1,...,n_t)}$ на множества $\overline{E}_n^k$ и $\overline{E}^{(i)}_{k(n_1,...,n_t)}$ $\forall i = \overline{1,L}$. Здесь $\overline{E}_n^k = \bigcup_{i=1}^{L} \overline{E}^{(i)}_{k(n_1,...,n_t)}$. Распространив теорему 1 на множества $\overline{E}^{(i)}_{k(n_1,...,n_t)}$, получим, что точки $\overline{E}^{(i)}_{k(n_1,...,n_t)}$ удовлетворяют системе (1)—(3). Многогранник, описываемый (1), (2) для $\overline{E}^{(i)}_{k(n_1,...,n_t)}$ обозначим

$$\Pi^i_{k(\overline{e}_1,...,\overline{e}_k)} \quad (\overline{e} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_k) \in \overline{E}^{(i)}_{k(n_1,...,n_t)}).$$

Теорема 3. *Множество $\overline{E}_n^k$ представимо в виде объединения множеств вершин общих перестановочных многогранников $\Pi^i_k(\overline{e}_1, ..., \overline{e}_k)$, причем никакие два многогранника не имеют общих вершин, т. е.*

$$\overline{E}_n^k = \bigcup_{i=1}^{L} [\Pi^i_{k(\overline{e}_1,...,\overline{e}_k)} \cap S_{k-1}],$$

где $L = \text{Card}\ \overline{C}_n^k$.

В [4] дано описание так называемого многогранника размещений. Он является совокупностью всех решений следующей системы неравенств:

$$\sum_{i=1}^{|\omega|} a_{n-i+1} \leqslant \sum_{i\in\omega} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{|\omega|} a_i \forall \omega \subset J_k. \quad (4)$$

Многогранник размещений, как следует из [4], служит выпуклой оболочкой множества E_n^k.

Теорема 4. *Множество E_n^k симметрично относительно гиперплоскостей вида $x_i - x_j = 0$, где начало координат находится точке $a^\circ = (a_0, a_0, \dots, a_0)$, $a_0 = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{a_j\}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y^1 \in E_n^k$ $y^1 = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_k)$. Расстояние d^1 от точки y^1 до плоскости (5)

$$d^1 = \frac{y_i - y_j}{\sqrt{2}}.$$

Точке y^1 соответствует точка $y^2 = (y_1, \dots, y_j, \dots, y_i, \dots, y_k)$, расстояние которой до плоскости (5)

$$d^2 = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{2}} = -d^1.$$

Следовательно, точки y^1, y^2 лежат по разные стороны от плоскости (5). Кроме того, $y^2 \in E_n^k$, так как отличается от y^1 лишь порядком следования координат. Отсюда точки y^1, $y^2 \in E_n^k$ симметричны относительно плоскости $x_i - x_j = 0$. Из произвольности выбора i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant k)$ и точки $y^1 \in E_n^k$ вытекает утверждение теоремы. Аналог теоремы 4 для множества перестановок с повторениями, погруженного в R^k, доказан [6].

Число плоскостей вида (5) равно $k(k-1)/2$. Кроме того, аналогично можно показать, что множество $\bar{E}_n^k$ симметрично относительно гиперплоскостей вида (5) в предположении, что начало координат находится в точке a^0.

Теорема 5. *Множество $\bar{E}_n^k$ лежит на семействе гиперплоскостей $\{T_i^r\}$ вида*

$$x_r = a_i, \ i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Доказательство. Уравнению $x_r = a_i$ удовлетворяют все точки $\bar{E}_n^k$, у которых r-я координата равна a_i. На r-м месте может находиться только один из элементов множества M. Таким образом, все точки $\bar{E}_n^k$ лежат на семействе гиперплоскостей T^r. Таких семейств $\{T_i^r$ можно построить ровно k.

При $k \leqslant n$ множество $E_n^k \subset \bar{E}_n^k$. Значит, E_n^k также лежит на семействе гиперплоскостей $\{T^r\}$ вида (6).

Теорема 6. *Множество E_n^k лежит на семействах k-плоскостей $\{T_s^t\}_i$ вида*

$$\frac{s}{k-s} x_1 + \frac{s}{k-s} x_2 + \dots + \frac{s}{k-s} x_{k-s} - x_{k-s+1} - \dots - x_k + a_t^{s(i)} = 0 \tag{7}$$

$$t = 1, 2, \dots, \gamma_s < \frac{k!}{s!(k-s)!}; \ s \in \{1, 2, \dots, k-1\};$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \ N = \operatorname{Card} C_n^k.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 мно жество $E_n^k = \bigcup_{i=1}^{N} E_k^{(i)}$, где $N = \text{Card}\, C_n^k$. По теореме 2 [6] каждо множество $E_k^{(i)}$ лежит на семействе k-плоскостей вида

$$\frac{s}{k-s}x_1 + \frac{s}{k-s}x_2 + \ldots + \frac{s}{k-s}x_{k-s} - x_{k-s+1} - \ldots - x_k + a_t^s = 0$$

где $t = 1, 2, \ldots, \gamma_s \leqslant \frac{k!}{s!\,(k-s)!}$, $s \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

При этом число γ_s плоскостей, образующих семейство $\{T_s^t\}$ не превышает $\frac{k!}{s!\,(k-s)!}$. Если для каждого $E_k^{(i)}$ построить се мейство $\{T_s^t\}_i$, то все множество таких плоскостей ($i = \overline{1,N}$ будет содержать множество E_n^k. Оценка числа k-плоскосте в этих семействах равна $C_n^k C_k^s = \frac{n!}{s!\,(n-k)!\,(k-s)!}$.

Рассмотрим множество $E_k^{(i)} \subset E_n^k \subset R^k$. Как показано выше его элементами являются образы всевозможных перестановок без повторений из k символов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, выбранных и множества M. По теореме 6 множество $E_k^{(i)}$ лежит на семей стве гиперплоскостей $\{T_s^t\}_i$, причем $T_{k-1}^t \in \{T_s^t\}_i$. Все точки $E_k^{(i)}$ принадлежащие T_{k-1}^t, имеют одно и то же значение коорди наты x_k. Обозначим множество всех таких точек через $E_k^{t_i}$. Справедливо соотношение $E_k^{t_i} = E_{k-1}^{t_i} \times x_k$, где $x_k \in R^1$ и може принимать одно из значений $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$; $E_{k-1}^{t_i}$ — множе ство точек, координатами которых являются первые k — координат точек $E_k^{t_i}$, $E_k^{t_i} \subset R^{k-1}$.

Рассуждая аналогично, можно провести дальнейшее разложе ние $E_{k-1}^{t_i}$. Из теоремы 6 следует, что $E_k^{(i)} = \bigcup_{t_i=1}^{s} E_k^{t_i}$. Тогда

$$E_k^{(i)} = \bigcup_{t_i=1}^{\gamma_s} [E_{k-1}^{t_i} \times x_k];$$

$$E_n^k = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{t_i=1}^{\gamma_s} [E_{k-1}^{t_i} \times x_k].$$

Приведенные метрические свойства «погруженных» множест k-расстановок представляют интерес для задач оптимизаци широкого класса, заданных на этих множествах.

Список литературы: 1. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М., 1969. 328 с. 2. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике//Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 3. С. 134—136. 3. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные геометрического проектирования. К., 1986. 276 с. 4. *Емиличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981. 344 с. 5. *Стоян Ю. Г.* Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. Х., 1980. 22 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения, № 85). 6. *Стоян Ю. Г.* Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство. Х., 1982. 33 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения, № 173).

Поступила в редколлегию 25.12.87