

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЙВАНИЯ ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАДИАЛЬНОГО ДИПОЛЯ ОДИНОЧНЫМ ПОЛУПРОЗРАЧНЫМ КОНУСОМ С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

Введение

Задачам рассеивания электромагнитных волн на идеально проводящих структурах посвящены работы [1 – 3]. Однако для практических приложений большой интерес представляют собой задачи дифракции на неидеально проводящих телах, в частности диэлектрических поверхностях. Конические структуры благодаря своим широкополосным свойствам нашли широкое применение в радиотехнике, радиофизике, радиоизмерениях. В отличие от задач дифракции волн на идеально проводящих конусах, решение которых было найдено как аналитически, так и численно, решение задачи рассеивания волн на диэлектрических конусах получено только численно [4]. Аналитические решения позволяют качественно изучить структуру рассеянного поля, его характерные особенности, а также свойства рассеивающих поверхностей, которые трудно выявить численно. В связи с отсутствием аналитического решения для диэлектрического конуса были предложены модельные задачи рассеивания волн на неидеально проводящих конусах [5]. Однако в краевых условиях импедансного типа, которые были использованы в таких задачах, отсутствует параметр, который содержит угол раскрытия конуса, влияющий на точность решения рассматриваемой задачи. Незамкнутые полупрозрачные поверхности, способные пропускать и отражать падающее поле, являются моделями неидеально проводящих структур и применяются в качестве элементов современных радиоэлектронных приборов. Наличие щелей на поверхности рассеивающего тела расширяет рамки их использования, но и усложняет процесс решения подобных задач в связи с появлением ребер, влияние которых также необходимо учитывать.

Цель работы – исследование модельной электродинамической задачи возбуждения электрическим радиальным диполем одиночного полупрозрачного конуса с периодическими продольными щелями, получение численных, а также аналитических решений.

Постановка задачи. Метод решения

В работе рассматривается задача о возбуждении одиночного полупрозрачного конуса с периодически прорезанными вдоль образующих конуса N щелями (рис. 1).

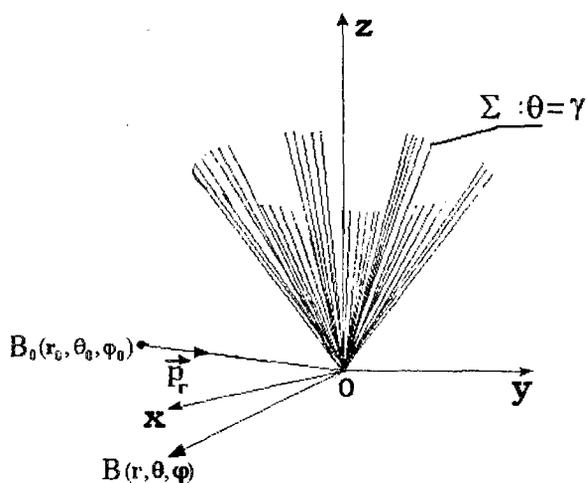


Рис. 1. Полупрозрачный конус с продольными щелями

В качестве источника возбуждения рассматривается электрический радиальный диполь, поле которого изменяется во времени согласно гармоническому закону вида $e^{ia\omega t}$, $a = \pm 1$. Для удобства решения задачи вводится сферическая система координат r, θ, φ с началом в вершине конуса. Коническая поверхность Σ в данной системе координат определяется уравнением $\theta = \gamma$; d – угловая ширина щели, середина которой проходит через плоскость $\varphi = 0$. Искомое полное электромагнитное поле \vec{E}, \vec{H} представляется в виде суммы поля источника \vec{E}_0, \vec{H}_0 и поля, рассеянного конической структурой \vec{E}_1, \vec{H}_1 :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1,$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1,$$

Полное электромагнитное поле удовлетворяет следующим условиям:

1. Уравнениям Максвелла;
2. Краевому условию на поверхности конуса

$$\begin{cases} \vec{n} \times \left\{ \vec{n} \times \left[\vec{E}^+ + \vec{E}^- \right] \right\} = 2\tilde{P}^{(1)} \vec{n} \times L \left[\vec{H}^+ - \vec{H}^- \right], \\ \vec{n} \times \vec{E}^+ - \vec{n} \times \vec{E}^- = 0; \quad \Sigma : \theta = \gamma; \end{cases}$$

$$\tilde{P}^{(1)} = \frac{w}{q} W_1 \sin \gamma, \quad w = \sqrt{\mu/\varepsilon}, \quad q = iak, \quad \vec{E}^\pm = \vec{E} \Big|_{\theta=\gamma \pm 0}, \quad k - \text{волновое число};$$

3. Условию на бесконечности в пространстве;
4. Условию ограниченности энергии.

Для удобства решения задачи вводим потенциалы Дебая v , таким образом осуществляя переход от исходной электродинамической задачи к краевой задаче математической физики. В соответствии со структурой полного поля, общий потенциал Дебая представляется в виде суммы потенциалов:

$$v = v_0 + v_1.$$

где v_0 – потенциал источника, v_1 – потенциал, характеризующий отраженное от конической структуры поле. Воспользуемся интегральными преобразованиями Конторовича – Лебедева, вследствие чего получаем следующие выражения для искомого потенциала:

$$v_1 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh}(\pi\tau) \hat{v}_1 \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad \hat{v}_1 = \int_0^{+\infty} v_1 \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 &= -a_{0,\tau} b_{0,\tau} U_{0,\tau}(\theta, \varphi), \\ U_{0,\tau}(\theta, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \frac{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\pm \cos \gamma)} e^{inN\varphi}. \end{aligned} \quad (1)$$

$K_{i\tau}(qr)$ – функция Макдональда, $a_{0,\tau}$, $b_{0,\tau}$ – известные коэффициенты, $P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\pm \cos \theta)$ – функция Лежандра первого рода. Знак «+» в (1) соответствует области $0 < \theta < \gamma$, а «-» – области $\gamma < \theta < \pi$. x_n – неизвестные коэффициенты, являющиеся решениями следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 + 2W \frac{N|n|}{n} (1 - \varepsilon_n) \right) x_n e^{inN\varphi} &= 1 \text{ на лентах конуса,} \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} N \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_n) x_n e^{inN\varphi} &= 0 \text{ на щелях конуса,} \end{aligned}$$

где ε_n – известный матричный коэффициент, причем $\varepsilon_n = O(n^{-2})$ при $n \gg 1$.

Используя аппарат рядов Фурье, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$x_p = \frac{1}{2\kappa_p^{(v)}} WB_{0,p} - \frac{1}{2\kappa_p^{(v)}} W \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_{n,p} x_n, \quad (2)$$

где

$$B_{0,p} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \frac{\sin(n-p) \frac{\pi dN}{2}}{n-p}, n \neq p, \\ 1 - \frac{dN}{2}, n = p, \end{cases}, \quad \frac{\pi dN}{2} \kappa_p^{(\nu)} = N(p+\nu) \frac{|p|}{p} (1-\varepsilon_p).$$

ν – известная величина.

При таком способе возбуждения на поверхности полупрозрачного конуса наводится только поверхностный радиальный ток, плотность которого в случае осесимметричного возбуждения имеет вид:

$$j_r = \frac{2ik}{\sin \gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inN\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} a_0(\tau, k) |n| (1-\varepsilon_n) x_n d\tau,$$

где

$$a_0(\tau, k) = \frac{\pi}{2r_0} \tau h \pi \tau e^{\pi\tau} H_{i\tau}^{(2)}(kr_0) \frac{1}{\sqrt{r_0}} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma),$$

$H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)$ – функция Ханкеля второго рода.

Случай узких конических секторов. Аналитическое решение

В случае узких конических секторов, при $1 - \frac{dN}{2\pi} \ll 1$, искомый потенциал Дебая принимает вид

$$v_1 = -\frac{2}{\pi^2} \beta \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} e^{i(m+nN)\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau sh \pi \tau a_\tau b_\tau}{G_{m+nN}(W) - 1 + \beta} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \gamma)} d\tau + O\left(\frac{1}{W} \beta^2 \ln \frac{1}{\beta}\right),$$

где $\beta = 1 - \frac{dN}{2\pi}$, a_τ , b_τ – известные коэффициенты,

$$G_{m+nN}(W) = 2W \frac{(-1)^{m+nN} ch \pi \tau \Gamma(1/2+i\tau+m+nN)}{\pi \Gamma(1/2+i\tau-m-nN)} \frac{1}{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos \gamma)}.$$

В случае осесимметричного возбуждения при $\theta_0 = \pi$, $m = 0$ получаем следующее выражение для потенциала Дебая:

$$v_1 = -\frac{2}{\pi^2} \beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inN\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau sh \pi \tau a_\tau b_\tau}{G_{nN}(W) - 1 + \beta} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{nN}(\pm \cos \gamma)} d\tau + O\left(\frac{1}{W} \beta^2 \ln \frac{1}{\beta}\right).$$

Численный эксперимент

В работе получены зависимости значений модулей коэффициентов СЛАУ (2) от параметров задачи возбуждения полупрозрачного конуса с одной продольной щелью.

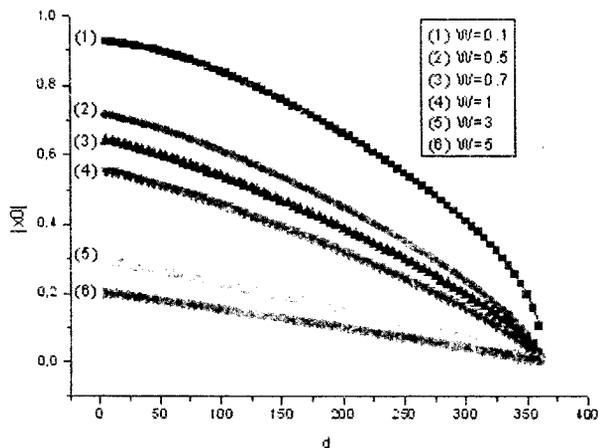


Рис. 2. Зависимость $|x_0|$ от ширины щели при разных значениях параметра полупрозрачности

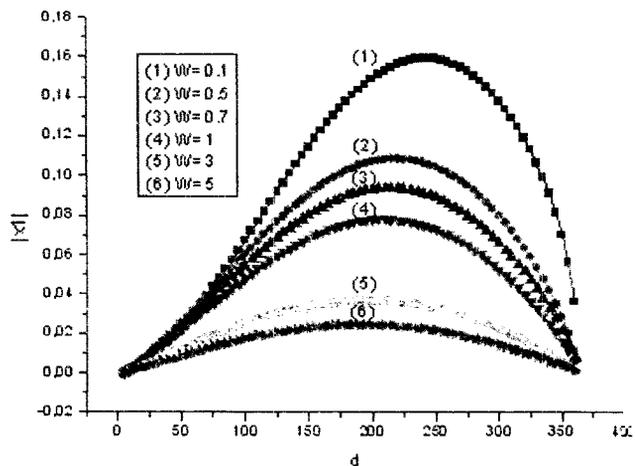


Рис. 3. Зависимость $|x_1|$ от ширины щели при разных значениях параметра полупрозрачности

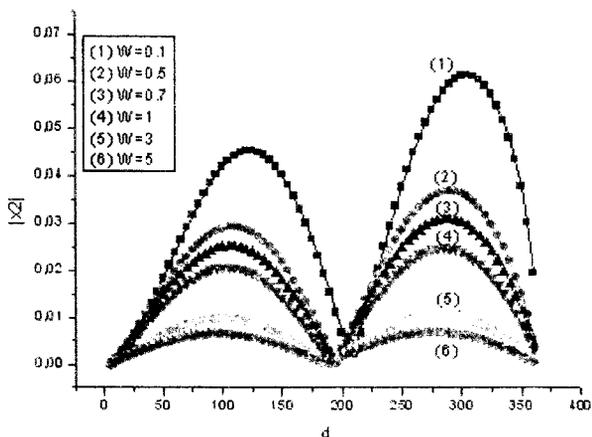


Рис. 4. Зависимость $|x_2|$ от ширины щели при разных значениях параметра полупрозрачности

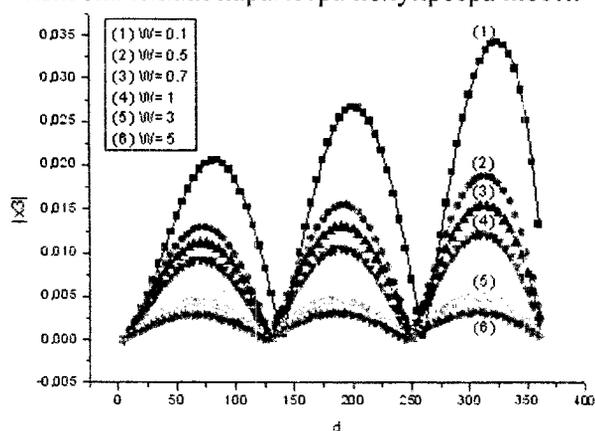


Рис. 5. Зависимость $|x_3|$ от ширины щели при разных значениях параметра полупрозрачности

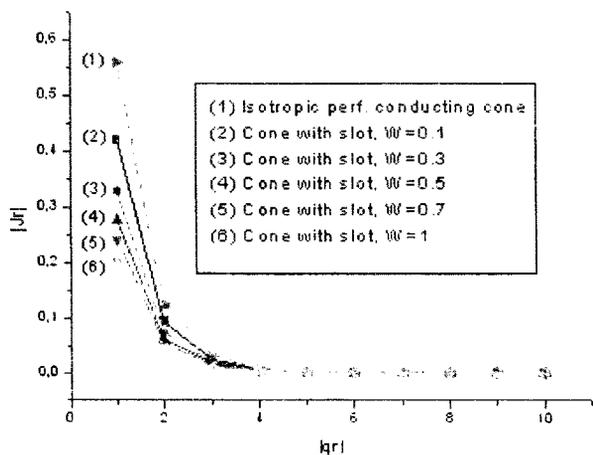


Рис. 6. Зависимость $|j_r|$ от $|q_r|$ при различных значениях параметра полупрозрачности при $\gamma = \pi/6$, $d = \pi/10$, $\varphi = d/2 + \pi/90$, а также аналогичная зависимость для сплошного идеально проводящего конуса

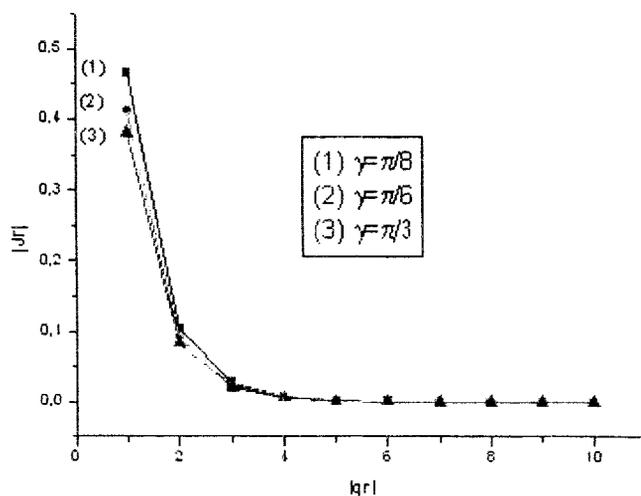


Рис. 7. Зависимость $|j_r|$ от $|q_r|$ при различных значениях угла раскрытия конуса при $W = 0.7$, $d = \pi/10$, $\varphi = d/2 + \pi/90$

На рис. 2 – 5 представлены графики зависимостей модулей коэффициентов x_0 , x_1 , x_2 , x_3 системы линейных алгебраических уравнений (2) от ширины щели при различных значениях параметра полупрозрачности. Из графиков можно заключить, что наибольшие значения коэффициентов достигаются при небольших значениях параметра полупрозрачности. При увеличении данного параметра значения коэффициентов уменьшаются. Также эти значения уменьшаются при расширении щели, что обусловлено уменьшением площади рассеивающей поверхности конуса. На рис. 6 и 7 представлены зависимости модуля одной из составляющих плотности поверхностного тока $|j_r|$ в зависимости от параметров задачи. Из вида графиков на рис. 6 можно заключить, что при увеличении параметра полупрозрачности модуль плотности поверхностного тока уменьшается. Также уменьшение этих значений происходит при удалении от вершины конуса источника, т.е. при увеличении значения $|qr|$, а при $|qr| > 4$ значения становятся близкими к нулю. На рис. 7 показаны зависимости модуля плотности поверхностного тока от $|qr|$ при различных значениях угла полураскрыва конуса. Таким образом, при увеличении угла полураскрыва конуса наблюдается уменьшение плотности поверхностного тока вследствие увеличения площади поверхности конуса.

Заключение

В работе впервые рассмотрена задача возбуждения полупрозрачного конуса с продольными щелями электрическим радиальным диполем с учетом угла полураскрыва конуса и изменения параметра полупрозрачности в зависимости от расстояния до его вершины. Моделирование поверхностных свойств такой структуры проводится с помощью усредненных краевых условий, содержащих угол раскрыва конуса. Задача решается с привлечением интегральных преобразований и аппарата рядов Фурье. Используемый метод решения позволяет получить численные и аналитические решения для особых случаев структуры. Проведено исследование зависимостей коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений от параметров задачи. Исследовано поведение радиальной составляющей плотности поверхностного тока при осесимметричном возбуждении полупрозрачного конуса с одной щелью, получены аналитические результаты для частного случая структуры с узкими коническими секторами. В результате анализа полученных численных результатов можно делать вывод о том, что при осесимметричном возбуждении решение для полубесконечного конуса могут быть использованы при анализе свойств конечного незамкнутого полупрозрачного конуса.

Список литературы: 1. Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции : пер с нем.; под ред. Г.Д. Малюжинца. – М. : Мир, 1964. – 428с. 2. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн: Пер. с англ. ; под ред. М.Л. Левина. – М. : Мир. – 1978. – Т1. – 552с.; Т2. – 558с. 3. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков : Изд-во Харьк. ун-та. 1971. – 400с. 5. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. – М. : Радио и связь, 1987. – 272с. 5. Bernard J.M.L., Lyalinov M.A. Electromagnetic scattering by a smooth convex impedance cone // J. of Appl. Math. – 2004. – V.69. – P.285-333.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 11.07.2011