

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Одной из важных задач, возникающих при эксплуатации многониточных линейных участков, является возможность численного моделирования аварийных ситуаций. В работе предлагается численный метод расчета нестационарных неизоотермических режимов течения газа по участку трубопровода. Данный метод отличается от существующих выбором исходного шаблона для аппроксимации производных по пространственной и временной переменной, а также способом решения системы нелинейных уравнений, полученной после применения метода конечных разностей к исходной системе уравнений математической модели. Метод позволяет с более высокой точностью рассчитывать реальные процессы течения природного газа, как в штатных, так и в аварийных ситуациях.

**Ключевые слова:** линейный участок, участок трубопровода, моделирование, нестационарный неизоотермический режим, метод конечных разностей, неравномерная конечно-разностная сетка.

### Введение

Газовая промышленность является одной из важнейших отраслей экономики Украины. Она имеет существенное значение в создании материальной базы для всей страны. Это связано с тем, что природный газ как высокоэффективный энергоноситель, широко применяемый в настоящее время во всех звеньях общественного производства, оказывает прямое воздействие на увеличение выпуска промышленной продукции, рост производительности труда и снижение удельных расходов топлива.

К сожалению, в Украине недостаточно газовых ресурсов для обеспечения нужд собственной экономики, однако у нашей страны есть другой плюс. Украина – транзитное государство.

Через Украину осуществляется транзит российского газа в Европу, поэтому рынок газотранспортных услуг играет немаловажную роль. Пропускная способность всех газопроводов, входящих на территорию Украины из России, составляет более 288 млрд. м<sup>3</sup> газа. Решение топливно-энергетических проблем невозможно без решения основных проблем транспортного комплекса, поэтому актуальность газотранспортной проблемы в нашей стране не вызывает сомнения.

Перспективы развития газовой промышленности Украины связаны с расширением геолого-поисковых работ, увеличением объемов поискового бурения и ускорением промышленного освоения открытых месторождений. Наряду с этим следует широко внедрять достижения научно-технического прогресса, в частности новейших технологий и техники.

Что касается базы для развития газовой промышленности Украины – это как собственные ресурсы природного газа, так и развитая сеть магистральных газопроводов и подземных хранилищ газа.

В Украине уже используются крупные газотранспортные сети, а также планируется их дальнейшее развитие. Также для транспортировки газа в пределах Украины используются газопроводы достаточно большой протяженности. При этом для газотранспортных компаний Украины остается актуальной проблема доставки газа потребителю без потерь.

Решение этой проблемы скрыто в оперативном управлении транспортом газа, которое невозможно без полной автоматизации технологических процессов. А полная автоматизация невозможна без предварительного создания математических моделей и численных методов, которые учитывали бы все особенности режимов течения газа. Надо отметить, что в случае аварийных и штатных ситуаций режимы течения газа являются нестационарными неизоотермическими.

Цель статьи: выбор математической модели нестационарных неизоотермических режимов течения газа (ННРТГ) по участку трубопровода (УТ). Применение метода конечных разностей с использованием неравномерной конечно-разностной сетки и разработка алгоритма для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, описывающих режимы течения газа по участку трубопровода.

### Формальная постановка задачи

Газотранспортная система, с точки зрения описания режимов транспорта газа, состоит из основных элементов: линейных участков (ЛУ) и компрессорных станций (КС).

В работе исследуется УТ длины  $L$  (Рисунок 1).

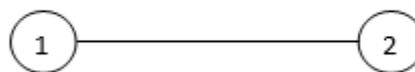


Рис. 1 – Линейный участок трубопровода

Так как один из параметров газового потока на границе участка резко меняет свое значение, то считаем, что режимы транспорта газа по УТ являются нестационарными и неизотермическими. Описывать их можно с помощью функций  $W(x,t)$ ;  $P(x,t)$ ;  $T(x,t)$ , удельного массового расхода, давления и температуры соответственно, заданных в области  $\Lambda = \{(x,t), x \in [0, L], t \in [0, T_{\max}]\}$ , где  $T_{\max}$  – конечное время процесса.

В граничных узлах 1,2 заданы граничные условия 1-го или 2-го типа, т.е. заданы либо давление, либо расход газа, как функция времени, кроме того задана температура поступающего в узел газа. Задано начальное распределение параметров газового потока:

$$\begin{cases} W(x,0) = W_0(x), \\ P(x,0) = P_0(x), \\ T(x,0) = T_0(x), \\ x \in (0, L), \end{cases} \quad (1)$$

где  $W_0(x), T_0(x), P_0(x)$  – заданные функции.

Заданы граничные условия:

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} P(0,t) = P^0(t), \\ G(0,t) = G^0(t), \\ T(0,t) = T^0(t), \end{array} \right. & \left[ \begin{array}{l} P(L,t) = P^1(t), \\ G(L,t) = G^1(t), \end{array} \right. \end{cases} \quad (2)$$

где  $G(x,t)$  – массовый расход;  $G(x,t) = W(x,t)s$ ,  $G^0(t), T^0(t), P^0(t), G^1(t), T^1(t), P^1(t)$  – заданные функции,  $s$  – площадь поперечного сечения трубы.

Так как для расчета нестационарных неизотермических режимов транспорта газа по участку трубопровода следует задать начальное распределение параметров газового потока: расходов, давлений и температур, то в качестве такого распределения берется распределение, полученное при условии стационарности режима течения газа.

### Математическая модель ННРТГ по участку трубопровода

Для общего случая нестационарный неизотермический режим транспорта газа по участку трубопровода, представляющему собой цилиндрическую трубу постоянного диаметра, описывается квазилинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных, полученной из общих уравнений Навье-Стокса газовой динамики для одномерного случая. Данная система после некоторых упрощающих систему предположений, имеет вид [1]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + B(x, t, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Phi(x, t, \varphi), \quad (3)$$

$$\text{где } B = \begin{pmatrix} 2\alpha TS \frac{W}{p} & 1 - \alpha TS \frac{W^2}{p^2} & 0 \\ \alpha TS & 0 & 0 \\ \alpha S \frac{T^2}{p} (\gamma - 1) & 0 & \alpha TS \frac{W}{p} \gamma \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\beta TS \frac{W|W|}{p} - \frac{gp}{\alpha TS} \frac{dh}{dx} \\ 0 \\ -\frac{4K}{D} (\gamma - 1) \frac{T}{p} (T - T_{gp}) - g(\gamma - 1) \frac{TW}{p} \frac{dh}{dx} \end{pmatrix} -$$

матрицы, элементы которых заданные непрерывные и непрерывно дифференцируемые в некоторой области изменения своих аргументов функции переменных  $x, t, W, P, T$ ;

$\varphi = (W(x, t), P(x, t), T(x, t))$  – некоторое непрерывно дифференцируемое в области  $\Lambda$  решение уравнения (3).

### Метод и алгоритм решения

Для получения численного решения системы (3) с начальным распределением (1) и граничными условиями (2) разделим отрезок  $[0, L]$  на  $n$  отрезков, длиной  $\Delta x$ , а затем разделим первый и последний отрезки пополам. Получим  $n+2$  отрезков. Первый, второй, последний и предпоследний длиной  $\frac{\Delta x}{2}$ , остальные длиной  $\Delta x$ , а так же  $n+3$  точки разбиения  $x_i, i = \overline{0, n+2}$ .

Таким образом, имеем неравномерную конечно-разностную координатную сетку.

На рисунках 2 – 3 изображены шаблоны для аппроксимации производных в начале участка:

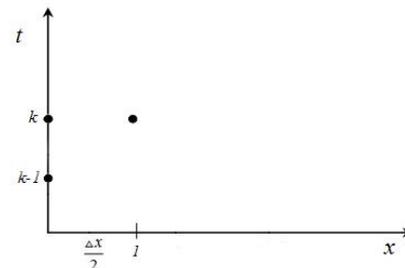


Рис. 2 – Шаблон для аппроксимации производных в начале участка в нулевой точке

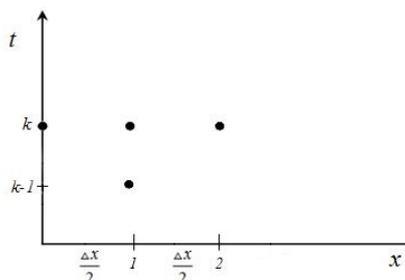


Рис. 3 – Шаблон для аппроксимации производных в начале участка в первой точке

На рисунках 4–5 изображены шаблоны для аппроксимации производных в конце участка, а на рисунке 6 изображён шаблон для аппроксимации производных в  $i$ -й точке:

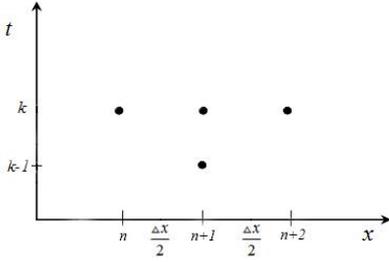


Рис. 4 – Шаблон для аппроксимации производных в конце участка в  $(n+1)$ -й точке

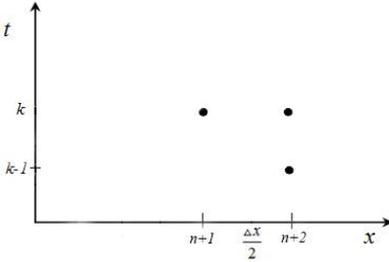


Рис. 5 – Шаблон для аппроксимации производных в конце участка в  $(n+2)$ -й точке

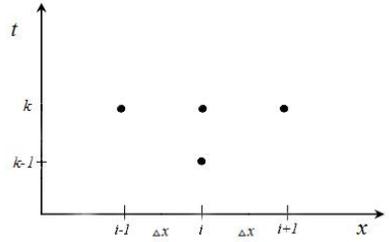


Рис. 6 – Шаблон для аппроксимации производных в  $i$ -й точке

Общая формула для нахождения производной  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i^k$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i^k = \begin{cases} \frac{2(\varphi_i^k - \varphi_0^k)}{\Delta x}, i = 0, \\ \frac{\varphi_2^k - \varphi_0^k}{\Delta x}, i = 1, \\ \frac{3\varphi_2^k + \varphi_3^k - 4\varphi_1^k}{3\Delta x}, i = 2, \\ \frac{\varphi_{i+1}^k - \varphi_{i-1}^k}{2\Delta x}, i = \overline{3, n-1}, \\ \frac{4\varphi_{n+1}^k - 3\varphi_n^k - \varphi_{n-1}^k}{3\Delta x}, i = n, \\ \frac{\varphi_{n+2}^k - \varphi_n^k}{\Delta x}, i = n+1, \\ \frac{2(\varphi_{n+2}^k - \varphi_{n+1}^k)}{\Delta x}, i = n+2. \end{cases} \quad (4)$$

Общая формула для нахождения  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_i^k$  будет иметь вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_i^k = \frac{\varphi_i^k - \varphi_i^{k-1}}{\Delta t}, \quad i = \overline{0, n+2}. \quad (5)$$

С учётом формул (4) и (5) получим следующую систему разностных уравнений.

При  $i=0$ :

$$\frac{1}{\Delta t} \varphi_0^k - \frac{2}{\Delta x} B_0^k \varphi_0^k + \frac{2}{\Delta x} B_0^k \varphi_1^k = \Phi_0^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_0^{k-1}. \quad (6)$$

При  $i=1$  уравнение имеет вид

$$-\frac{1}{\Delta x} B_1^k \varphi_0^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_1^k + \frac{1}{\Delta x} B_1^k \varphi_2^k = \Phi_1^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_1^{k-1}. \quad (7)$$

Для  $i=2$  получим

$$\frac{1}{\Delta t} \varphi_2^k - \frac{4}{\Delta x} B_2^k \varphi_1^k + \frac{3}{\Delta x} B_2^k \varphi_2^k + \frac{1}{\Delta x} B_2^k \varphi_3^k = \Phi_2^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_2^{k-1} \quad (8)$$

Для промежуточных точек при  $i = \overline{3, n-1}$

получим уравнения:

$$-\frac{1}{2\Delta x} B_i^k \varphi_{i-1}^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_i^k + \frac{1}{2\Delta x} B_i^k \varphi_{i+1}^k = \Phi_i^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_i^{k-1}. \quad (9)$$

Аналогично получаем уравнения для точек

$i = \overline{n, n+2}$ .

Решением полученной системы (6)–(9), дополненной уравнениями для точек  $i = \overline{n, n+2}$ ,

является вектор

$$\varphi^k = (\varphi_0^k, \varphi_1^k, \varphi_2^k, \dots, \varphi_i^k, \dots, \varphi_n^k, \varphi_{n+1}^k, \varphi_{n+2}^k) = (W_0^k, P_0^k, T_0^k, W_1^k, P_1^k, T_1^k, \dots, W_{n+2}^k, P_{n+2}^k, T_{n+2}^k).$$

Нелинейную систему (6)–(9), дополненную уравнениями для точек  $i = \overline{n, n+2}$ , начальными и граничными условиями, будем решать методом Ньютона.

Получаем линейную систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_0^k} & \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_1^k} & \dots & \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_0^k} & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_1^k} & \dots & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_0^k} & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_1^k} & \dots & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} \end{bmatrix}_{\varphi^{k,s-1}} \begin{pmatrix} \delta \varphi_0^{k,s} \\ \dots \\ \delta \varphi_i^{k,s} \\ \dots \\ \delta \varphi_{n+2}^{k,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0^{k,s-1} \\ \dots \\ \psi_i^{k,s-1} \\ \dots \\ \psi_{n+2}^{k,s-1} \end{pmatrix},$$

или в более общем виде

$$\left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^k} \right]_{\varphi^{k,s-1}} \delta \varphi^{k,s} = \psi^{k,s-1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

где  $\varphi^{k,s}$  – вектор решения системы на  $s$ -й итерации;

$\varphi_i^{k,s}$  ( $i = 0, 1, \dots, n+2$ ) – компоненты вектора  $\varphi^{k,s}$ ;

$\psi^{k,s-1}$  – вектор невязок на  $(s-1)$ -й итерации;

$\delta\varphi^{k,s}$  – вектор поправок к неизвестным на  $s$ -й итерации, т.е.  $\varphi^{k,s} = \varphi^{k,s-1} - \delta\varphi^{k,s}$ .

Далее находятся компоненты векторов невязок, матрица производных  $\left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^k} \right]$  с их учетом будет иметь следующую структуру:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_0^k} & \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_1^k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \psi_1^k}{\partial \varphi_0^k} & \frac{\partial \psi_1^k}{\partial \varphi_1^k} & \frac{\partial \psi_1^k}{\partial \varphi_2^k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_2^k}{\partial \varphi_1^k} & \frac{\partial \psi_2^k}{\partial \varphi_2^k} & \frac{\partial \psi_2^k}{\partial \varphi_3^k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_{i-1}^k} & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_i^k} & \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_{i+1}^k} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_n^k}{\partial \varphi_{n-1}^k} & \frac{\partial \psi_n^k}{\partial \varphi_n^k} & \frac{\partial \psi_n^k}{\partial \varphi_{n+1}^k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \varphi_n^k} & \frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \varphi_{n+1}^k} & \frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_{n+1}^k} & \frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы  $\left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^k} \right]$  – это матрицы размерности  $(3 \times 3)$ :

$$\frac{\partial \psi_0^k}{\partial \varphi_1^k} = \frac{2}{\square x} B_0^k;$$

$$\frac{\partial \psi_1^k}{\partial \varphi_0^k} = -\frac{1}{\square x} B_1^k;$$

$$\frac{\partial \psi_1^k}{\partial \varphi_2^k} = \frac{1}{\square x} B_1^k;$$

$$\frac{\partial \psi_2^k}{\partial \varphi_1^k} = -\frac{4}{3\square x} B_2^k;$$

$$\frac{\partial \psi_2^k}{\partial \varphi_3^k} = \frac{1}{3\square x} B_2^k;$$

При  $i = \overline{3, n-1}$ :

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_{i-1}^k} = -\frac{1}{2\square x} B_i^k;$$

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_{i+1}^k} = \frac{1}{2\square x} B_i^k.$$

А также

$$\frac{\partial \psi_n^k}{\partial \varphi_{n-1}^k} = -\frac{1}{3\square x} B_n^k;$$

$$\frac{\partial \psi_n^k}{\partial \varphi_{n+1}^k} = \frac{4}{3\square x} B_n^k;$$

и

$$\frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \varphi_n^k} = -\frac{1}{\square x} B_{n+1}^k;$$

$$\frac{\partial \psi_{n+1}^k}{\partial \varphi_{n+2}^k} = \frac{1}{\square x} B_{n+1}^k;$$

$$\frac{\partial \psi_{n+2}^k}{\partial \varphi_{n+1}^k} = -\frac{2}{\square x} B_{n+2}^k.$$

Элементы матриц  $\frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_i^k}, i = 0, \dots, n+2$ , находятся отдельно.

С учётом найденных производных находятся все элементы матрицы Якоби  $\left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^k} \right]$ .

Опишем алгоритм расчета режима течения газа по УТ для  $k$ -го временного слоя.

1) Вычисление компонент вектора невязок  $\psi^{k,s-1}$  с учетом решения, полученного на  $(s-1)$ -й итерации.

2) Вычисление элементов матриц  $\frac{\partial \psi_i^k}{\partial \varphi_i^k}$  для всех точек  $i = 0, \dots, n+2$  разбиения УТ, а также остальных элементов матрицы Якоби  $\left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \varphi^k} \right]$ .

3) Определение поправок путем решения линейной системы алгебраических уравнений (10).

4) Вычисление новых значений неизвестных параметров газового потока на  $s$ -й итерации

$$\phi_i^{k,s} = \phi_i^{k,s-1} - \delta\phi_i^{k,s}, i = \overline{0, n+2}.$$

5) Проверка сходимости  $\|\psi^{k,s}\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность. Если заданная точность не достигнута, то переходим к п.1, в противном случае к п.6.

6) Конец расчета временного слоя.

Преимущество данной неявной конечно-разностной схемы перед другими состоит в том, что его устойчивость не зависит от выбора параметров  $\Delta t$  и  $\Delta x$ , что позволяет значительно сократить время расчета на ЭВМ режима течения газа по УТ. Для решения поставленной задачи расчета ННРТГ для УТ был создан программный продукт, написанный в математическом пакете Mathematica 8.0., позволяющий рассчитывать параметры газового потока по УТ на каждом временном слое, которые зависят от начального распределения и граничных условий.

## Выводы

Выбрана математическая модель ННРТГ по УТ, для решения уравнений математической модели применен метод конечных разностей с использованием неравномерной конечно-разностной сетки, разработан метод и алгоритм решения полученной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа.

В результате ряда проведенных численных экспериментов было показано, что использование неравномерного шаблона позволяет более точно описывать режимы вблизи границ участка трубопровода, более полно описывать переходные процессы, в том числе в аварийных и нештатных ситуациях, что позволяет более точно прогнозировать последствия аварий и выбирать меры для их предотвращения.

### Список литературы

1. Гусарова И.Г., Боярская Ю.В. Классы задач моделирования и численного анализа нестационарных режимов работы газотранспортной системы // Восточно-Европейский журнал. - 3/6(45) 2010. - С.26-32.

2. Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов / Под ред. В.Е. Селезнева. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 436 с.

3. Тевяшев А.Д., Гусарова И.Г., Каминская А.В. Математические модели и методы анализа нестационарных процессов течения газа в многониточных линейных участках газотранспортной системы // Трубопроводные системы энергетики: Методические и прикладные проблемы моделирования / Новицкий Н.Н., Сухарев М.Г., Тевяшев А.Д. и др. -Новосибирск: Наука, 2015. - 476с. (С.193-204)

4. Каминская А.В., Гусарова И.Г. Численный анализ режимов работы газораспределительных сетей высокого давления // Радиоэлектроника и информатика. – 2011. – №3(54). – С.50–54.

5. Chen, Z. Finite Elements Methods and Their Applications / Zhangxin Chen. — Leipzig: Springer-Yerlag Berlin Heidelberg, 2005. – 410 p.

**Рецензент:** канд. физ.-мат.наук, доцент В.М. Задачин, Харьковский национальный экономический университет, Харьков.

**Автори:** ГУСАРОВА Ірина Григоріївна  
Харківський національний університет радіоелектроніки, кандидат технічних наук, доцент. Роб. тел. – 702-14-36, E-mail – gusar555m@mail.ru

**МЕЛІНЕВСЬКИЙ Дмитро Віталійович**  
Харківський національний університет радіоелектроніки, студент. Роб. тел. – 702-14-36, E-mail – dmelinevskiy@gmail.com

### Чисельне модулювання режимів течії газу методом кінцевих різниць

І.Г. Гусарова, Д.В. Меліневський

Однією з важливих задач, що виникають при експлуатації багатониткових лінійних ділянок, є

можливість чисельного моделювання аварійних ситуацій. У роботі пропонується чисельний метод розрахунку нестационарних неізотермічних режимів течії газу по ділянці трубопроводу. Даний метод відрізняється від існуючих способом вибору шаблону для апроксимації похідних по просторовій та часовій змінній, а також способом розв'язку системи нелінійних рівнянь, отриманої після застосування методу скінчених різниць до вихідної системи рівнянь математичної моделі. Метод дозволяє з більшою високою точністю розраховувати реальні процеси течії природного газу як у штатних, так і в аварійних ситуаціях.

**Ключові слова:** лінійна ділянка, ділянка трубопроводу, моделювання, нестационарний неізотермічний режим, метод кінцевих різниць, нерівномірна скінчено-різницева сітка.

### Numerical simulation of flow regimes GAS finite difference method

Husarova Iryna, D.V. Melinevskiy

One of the important problems arising from the operation of a multi-line sites is the ability of the numerical simulation of emergency situations. A numerical method for the calculation of non-stationary non-isothermal gas flow regimes on the section of the pipeline. This method differs from the existing method for selecting a template derivative approximation to the spatial and temporal variable, and method of solution systems of nonlinear equations obtained after applying the method of finite differences to the original system of equations of mathematical models. The method allows to calculate more accurately the actual processes of flow of natural gas in the staff and in emergency situations.

**Keywords:** linear section, section of the pipeline, modeling, transient non-isothermal mode, the finite difference method, non-uniform finite-difference grid.