

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Момоту Валерію Миколайовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу
в інженерних мережах

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1223 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель сталого поточкорозподілу

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Козиренко С.І.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 75 с., 5 табл., 1 рис., 15 джерел.

ГРАФ МЕРЕЖІ, ІНЖЕНЕРНА МЕРЕЖА, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СТАЛОГО ПОТОКОРОЗПОДІЛУ, МАТРИЦЯ ГЕССЕ, МЕТОД НЬЮТОНА, МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ПОСТУЛАТИ МЕРЕЖ, СТАТИСТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ.

Об'єкт дослідження – інженерна мережа.

Мета роботи – застосування для розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду.

Метод дослідження – узагальнений метод Ньютона багатовимірної безумовної мінімізації функції з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду.

Для розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах використовувався узагальнений метод Ньютона багатовимірної безумовної мінімізації функції з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду. Розроблено алгоритм, що реалізує даний метод. Здійснена програмна реалізація розробленого алгоритму. Наведено результати обчислювального експерименту.

Розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу дозволяє отримувати повний поточкорозподіл інженерних мереж з урахуванням наявності випадкових помилок вимірювання режимних параметрів. Впровадження її на реальних об'єктах дозволяє підвищити точність розв'язання режимних задач.

ABSTRACT

Explanatory note: 75 pages, 5 tables, 1 image, 15 sources.

ENGINEERING NETWORK, HESSIAN MATRIX, MATHEMATICAL MODEL OF SUSTAINABLE FLOW DISTRIBUTION, NETWORK GRAPH, NETWORK POSTULATES, NEWTON'S METHOD, OPTIMIZATION METHODS, STATISTICAL EVALUATION.

The object of research – the engineering network.

The purpose of the work is to apply the generalized Newton's method with the Hessian matrix reduced to a diagonal form for solving the problem of assessing the state of the sustainable flow distribution model in engineering networks.

Research method – the generalized Newton's method for multidimensional unconditional minimization of a function with the Hessian matrix reduced to a diagonal form.

The generalized Newton's method for multidimensional unconditional minimization of a function with the Hessian matrix reduced to a diagonal form was used to solve the problem of assessing the state of the sustainable flow distribution model in engineering networks. An algorithm implementing this method has been developed. The developed algorithm has been implemented programmatically. The results of a computational experiment are presented.

Solving the problem of assessing the state of the sustainable flow distribution model allows for obtaining a complete flow distribution of engineering networks, taking into account the presence of random measurement errors of operating parameters. Its implementation in real objects allows for increasing the accuracy of solving operational tasks.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів	8
Вступ	9
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	11
1.1 Огляд математичних моделей сталого поточкорозподілу в інженерних мережах	11
1.1.1 Основи побудови моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах	11
1.1.2 Математичне представлення структури інженерної мережі	12
1.1.3 Постулати інженерних мереж	16
1.1.4 Математична модель сталого поточкорозподілу в інженерних мережах з пасивними елементами	18
1.1.5 Умови спостережуваної моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах	21
1.2 Змістовна та формальна постановка задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах	25
1.2.1 Змістовна постановка задачі	25
1.2.2 Формальна постановка задачі	27
1.3 Постановка задач дослідження	30
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу	31
2.1 Підвищення ефективності розв'язання задачі оцінювання стану	31
2.2 Застосування узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду для розв'язання задачі оцінювання стану	34
2.3 Метод Гауса послідовного виключення невідомих	42
Висновки за розділом 2	45
3 Програмна реалізація	47

	7
3.1 Універсальна мова програмування Turbo Pascal	47
3.2 Алгоритм розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого потокорозподілу	49
3.2.1 Алгоритм розв'язання задачі оцінювання стану моделі УПР узагальненим методом Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду	49
3.2.2 Алгоритм методу дихотомії	51
3.3 Опис програми	52
Висновки за розділом 3	56
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	57
Висновки за розділом 4	63
Висновки	64
Перелік джерел посилання	66
Додаток А Лістинг програми	68

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

ІМ – інженерна мережа;

СПР – сталий поточкорозподіл;

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь;

УПР – управління процесами.

ВСТУП

Актуальність теми. Актуальність роботи зумовлена її практичною спрямованістю.

Найбільш складною підсистемою трубопровідних систем енергетики (систем водо-, газо-, нафти-і теплопостачання.) є інженерна мережа (ІМ), яка являє собою багато зв'язкову трубопровідну систему, основним завданням якої є транспорт і розподіл між споживачами рідких або газоподібних продуктів.

При розрахунку режимів функціонування ІМ і розв'язання задач оперативного управління режимами транспорту та розподілу цільових продуктів необхідно мати модель об'єкта управління, в якості якого виступає ІМ, що забезпечує його адекватний опис відносно середніх значень витрат і тисків цільового продукту на входах і виходах мережі. В якості такої моделі використовується модель сталого поточкорозподілу (СПР) в ІМ. Модель СПР враховує фізичні особливості як структури об'єкта управління, так і процесу транспорту і розподілення цільових продуктів в ІМ в сталому режимі. Таким чином, виникає задача побудови моделі СПР в ІМ, яка включає в себе задачу оцінювання стану моделі СПР.

Таким чином, тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

Задача оцінювання стану полягає в оцінюванні режимних параметрів, що описують повний поточкорозподіл в ІМ, на підставі вимірювання лише деяких з них. Основою для розв'язання задачі оцінювання стану є інформація про структуру і параметри моделі СПР, а також про вимірювання режимних параметрів (тисків та витрат) на входах і виходах ІМ, які здійснюються з випадковими помилками. Розв'язання даної задачі вимагає залучення теорії статистичного оцінювання. В загальному випадку задача статистичного оцінювання стану моделі СПР зводиться до задачі нелінійного математичного програмування.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є застосування для розв'язання сформульованої задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах узагальненого методу

Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляді і аналіз математичних моделей сталого поточкорозподілу в інженерних мережах;
- навести постановку задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах;
- провести аналіз способів підвищення ефективності розв’язання задачі оцінювання стану;
- застосувати узагальнений метод Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду для розв’язання задачі оцінювання стану;
- розробити алгоритм, що реалізовує даний метод;
- виконати програмну реалізацію розробленого алгоритму;
- провести обчислювальний експеримент та проаналізувати його результати.

Об’єктом дослідження є інженерна мережа.

Предметом дослідження є методи розв’язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах.

Методи дослідження. У роботі використовується узагальнений метод Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на міжнародній мультидисциплінарній науковій інтернет – конференції «Світ наукових досліджень.» (м. Тернопіль, Україна, м. Ополе, Польща, 20-21 листопада 2024 р.) [1].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Огляд математичних моделей сталого поточкорозподілу в інженерних мережах

1.1.1 Основи побудови моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах

Основою для розв'язання задачі оцінювання стану є модель СПР, яка базується на таких передумовах [2]:

- а) ІМ являє собою систему взаємодії великого числа підсистем трьох типів: активних елементів, пасивних елементів, споживачів;
- б) кожна підсистема i характеризується параметрами і двома змінними величинами: послідовною (витратою) q_i і паралельною (втратою напору) h_i ;
- в) до активних елементів ІМ слід віднести насосні (для водопровідних мереж) або компресорні станції (для газових мереж);
- г) пасивні елементи являють собою ділянки трубопроводу;
- д) в якості споживача в мережі розглядається деяка еквівалентна ділянка, яку називають фіктивною і спрямована від будь-якого вузла мережі до деякої точки з нульовим тиском: ця ділянка характеризується своєю витратою цільового продукту і його напором, а останній завжди збігається з тиском у вузлу мережі, з якого виходить стік;
- е) загальний потік цільового продукту (води або газу), що подається в мережу, дорівнює сумарному потоку, спожитого з мережі;
- ж) у мережі мають місце постулати мереж (закони Кірхгофа):
 - 1) перший закон Кірхгофа полягає в тому, що алгебраїчна сума витрат в будь-якому вузлу мережі дорівнює нулю;
 - 2) другий закон Кірхгофа полягає в тому, що сумарна втрата напору по будь-якому замкнутому циклу також дорівнює нулю.

Зазначені передумови дають можливість розглядати ІМ як сильно зв'язний лінійний граф $G(V, E)$, на якому визначені два закони Кірхгофа [2], який містить $v = \text{Card}(V)$ вершин і $e = \text{Card}(E)$ дуг, де V, E – множини вершин і дуг графа мережі, відповідно. Кожній з дуг поставлені у відповідність ряд активних і пасивних елементів і дві змінні величини: витрата q_i і втрата напору h_i , пов'язані між собою монотонною залежністю, яка визначається параметрами цих елементів.

Сукупність величин \vec{q}_i, \vec{h}_i ($i = 1, 2, \dots, e$) утворює два e -мірних вектори $\vec{q} = [q_1, q_2, \dots, q_e]$, $\vec{h} = [h_1, h_2, \dots, h_e]$, які характеризують стан поточкорозподілу в мережі. З одного боку, їх поточні (наприклад i -ті) компоненти пов'язані залежністю, яка визначається параметрами активних і пасивних елементів відповідної (i -ої) гілки мережі, але незалежною від її геометричної структури. З іншого боку, перший постулат мереж дозволяє знайти залежність між складовими вектор \vec{q} , другий – залежність для компонентів вектор \vec{h} . Ці залежності визначаються тільки графом мережі.

Система e рівнянь для дуг графа мережі спільно з e рівняннями, що випливають із законів Кірхгофа, є математичною моделлю СПР в ІМ, яка однозначно відображає взаємозв'язок між змінними, параметрами і структурою мережі. Ця модель лежить в основі розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР в ІМ.

Розв'язок системи рівнянь моделі СПР дозволяє отримати значення витрат за всіма дугами графа мережі і тисків у всіх вузлах графа мережі при відповідному заданні граничних умов, в якості яких використовуються вимірювання значень витрат і тисків на входах і виходах мережі.

1.1.2 Математичне представлення структури інженерної мережі

Розглянемо кінцевий орієнтований зв'язний лінійний граф з e дугами (орієнтованими гілками) і v вершинами (вузлами) [3]. Математично лінійний

граф однозначно відображається матрицею інциденті A розмірності $(v \times e)$.

Елементи цієї матриці визначаються за умовами:

$$a_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-а дуга інцидентна вершині } k \text{ і направлена до неї;} \\ -1, & \text{якщо } i\text{-а дуга інцидентна вершині } k \text{ і направлена від неї;} \\ 0, & \text{якщо } i\text{-а дуга не інцидентна вершині } k. \end{cases}$$

Деревом графа називається підграф, що містить всі вершини графа і не утворює ні одного замкнутого циклу. Дуги, що входять в дерево, називаються гілками дерева, інші – хордами. Очевидно, що є $v-1$ гілок дерева і $\mu = (e - v + 1)$ хорд.

Будь-якому довільно обраному дереву графа однозначно відповідає $v-1$ головний перетин і фундаментальна система μ циклів. Головний перетин являє собою підмножину дуг графа, що містить гілки дерева і хорди, що з'єднують два піддерева графа, що утворюються з розглянутого дерева після видалення цієї гілки дерева; фундаментальний цикл – підмножина ребер графа, що містить хорду і гілки дерева, що утворюють єдиний простий ланцюг, що з'єднує кінцеві точки цієї хорди.

Для орієнтованого графа $(v-1)$ головний перетин математично описується матрицею головних перетинів $Q = [q_{ij}]$ розмірності $(v-1) \times e$ і рангу $(v-1)$, а система фундаментальних циклів – циклометричною матрицею $B = [b_{ij}]$ розмірності $\mu \times e$ і рангу μ .

Елементи матриці Q визначають з умов:

$$q_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-а дуга належить } j\text{-му перетину і її напрямок в перерізі} \\ & \text{збігається з напрямком гілки дерева з номером } j; \\ -1, & \text{якщо } i\text{-а дуга належить } j\text{-му перетину і її напрямок в перерізі} \\ & \text{протилежний напрямку гілки дерева з номером } j; \\ 0, & \text{якщо } i\text{-а дуга не належить } j\text{-му перетину.} \end{cases}$$

Елементи матриці B дорівнюють:

$$b_{ri} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-а дуга входить в } r\text{-й фундаментальний цикл і її напрямок} \\ & \text{співпадає з напрямком хорди в цьому циклі;} \\ -1, & \text{якщо } i\text{-а дуга входить в } r\text{-й фундаментальний цикл і її напрямок} \\ & \text{протилежний напрямку хорди в цьому циклі;} \\ 0, & \text{якщо } i\text{-а дуга не входить в } r\text{-й фундаментальний цикл.} \end{cases}$$

Оскільки в кожний перетин входить тільки одна гілка дерева, а в кожен фундаментальний цикл – лише одна хорда графа, матриця Q містить $v-1$ одиничний базисний вектор-стовпець з номерами, що відповідають гілкам дерева, а матриця B – μ одиничних базисних вектор-стовпців, номери яких відповідають номерам хорд графа.

Між матрицями A , Q , B існує взаємозв'язок. Матриця головних перетинів Q і відповідне їй дерево можуть бути отримані в результаті ряду елементарних перетворень матриці інцидентів A в матрицю, що містить $v-1$ незалежний одиничний вектор-стовпець і нульовий останній рядок [2]. Взаємозв'язок між матрицями Q , B визначається основною теоремою топології мереж:

$$BQ' = QB' = 0. \quad (1.1)$$

Алгоритм 1. Процес перетворення матриці A і Q складається з $(v-1)$ кроків. На першому кроці визначають провідний (головний) елемент першого рядка. В якості головного може бути обраний будь-який елемент рядка, відмінний від нуля. Якщо він від'ємний, то всі елементи рядка множать на -1 . Потім рядок послідовно додають до всіх рядків, що містять -1 в направляючому стовпці (стовпці з провідним елементом), і віднімають з рядків, що містять у цьому стовпці 1. Далі вибирають головний елемент другого рядка і всю процедуру повторюють знову тільки щодо рядків, що містять відмінні від нуля елементи в

стовпці з провідним елементом другого рядка, і процес повторюється.

Після $(v-1)$ -го кроку матриця A перетвориться в матрицю, що містить $(v-1)$ одиничний незалежний вектор-стовпець і нульовий останній рядок. Викреслюючи цей рядок, отримуємо матрицю головних перетинів для дерева, утвореного дугами графа з номерами, що відповідають номерам одиничних векторів-стовпців.

Переставимо стовпці матриць Q , B таким чином, щоб перші $(v-1)$ стовпці відповідали гілкам обраного дерева, а решта – μ хордам. Така процедура перестановки відповідає перенумерації дуг графа, в результаті якої гілкам дерева привласнюють номери від 1 до $(v-1)$, а хордам – від v до e .

При цьому Q і B приймуть вигляд:

$$Q = [I / Q_2], \quad (1.2)$$

$$B = [B_1 / I], \quad (1.3)$$

де I – одинична матриця розмірності $v-1$ в Q і μ в B ;

Q_2 – підматриця розмірності $(v-1) \times \mu$;

B_1 – підматриця розмірності $\mu \times (v-1)$.

Підставивши вирази (1.2), (1.3) в співвідношення (1.1), отримаємо:

$$Q_2 = -B_1'. \quad (1.4)$$

Наступний алгоритм визначає процедуру отримання B із Q .

Алгоритм 2. Стовпці матриці Q перегруповують, щоб упорядкувати Q відповідно до виразу (1.2). На основі формули (1.4) визначають B_1 і згідно із співвідношенням (1.3) знаходять B з перегрупованими стовпцями. Відновлюючи первісний порядок проходження стовпців, визначаємо матрицю B .

1.1.3 Постулати інженерних мереж

Перший закон Кірхгофа стверджує, що алгебраїчна сума послідовних змінних, поставлених у відповідність дугам графа інженерної мережі, які інциденті будь-якого вузла або належать будь-якому перетину, дорівнює нулю. Закон сформулюється в матричному вигляді як:

$$A\bar{q} = 0, \text{ або } Q\bar{q} = 0, \quad (1.5)$$

де $\bar{q} = [q_1, q_2, \dots, q_e]$ – витрата (послідовна змінна).

Згідно з другим законом Кірхгофа, нулю дорівнює алгебраїчна сума паралельних змінних, поставлених у відповідність дугам графа мережі, що належить будь-якому замкнутому циклу.

Цей закон записується в матричній формі наступним чином

$$B\bar{h} = 0, \quad (1.6)$$

де $\bar{h} = [h_1, h_2, \dots, h_e]$ – втрата напору (паралельна змінна).

Для більш компактного математичного уявлення законів Кірхгофа виберемо дерево графа мережі так, як це було зроблено раніше, тобто гілкам дерева дамо номери від l до $v-l$, а хордам – від v до e . В результаті такої нумерації будуть справедливі співвідношення (1.2) – (1.4), а вектори \bar{q} , \bar{h} розіб'ються на два складових вектори:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

У виразах (1.7), (1.8) i -ті компоненти $(v-1)$ - мірних векторів \bar{q}_1, \bar{h}_1 відповідають послідовній і паралельній змінним i -ої гілки дерева; r -ті компоненти μ - мірних векторів \bar{q}_2, \bar{h}_2 – послідовній і паралельній змінним r -ої хорди графа інженерної мережі.

Підставляючи вирази (1.7), (1.2) в формулу (1.5), а вирази (1.8), (1.3) в формулу (1.6), отримуємо наступні залежності для першого і другого постулатів інженерних мереж:

$$\bar{q}_1 = -Q_2 \bar{q}_2, \quad (1.9)$$

$$\bar{h}_2 = -B_1 \bar{h}_1. \quad (1.10)$$

Залежності (1.9), (1.10) свідчать про те, що значення послідовної змінної в гілках дерева мережі є комбінацією значень послідовних змінних в хордах, а значення паралельної змінної в хорді – лінійною комбінацією значень паралельних змінних в гілках дерева. З урахуванням виразу $h_i(-q_i) = -h(q_i)$ перший і другий постулати мереж можна виразити тільки через матрицю Q_2

$$\bar{q}_1 = -Q_2 \bar{q}_2; \quad \bar{h}_2 = Q_2' \bar{h}_1. \quad (1.11)$$

На відміну від (1.11), перший і другий постулати мереж можна виразити тільки через матрицю B_1 :

$$\bar{h}_2 = -B_1 \bar{h}_1; \quad \bar{q}_1 = B_1' \bar{q}_2. \quad (1.12)$$

Вирази (1.12) в алгебраїчній формі мають наступний вигляд:

$$q_i = \sum_{r=v}^e b_{1ri} q_r \quad (i = \overline{1, v-1}); \quad (1.13)$$

$$h_r = -\sum_{i=1}^{v-1} b_{1ri} h_i (r = \overline{v, e}). \quad (1.14)$$

При побудові математичних моделей сталого поточкорозподілу для різних класів інженерних мереж найчастіше використовуються постулати мереж у вигляді (1.13), (1.14).

1.1.4 Математична модель сталого поточкорозподілу в інженерних мережах з пасивними елементами

Модель СПР відображає інформацію про структуру, параметри і фізичні процеси, що протікають в ІМ, і може бути записана у векторному вигляді:

$$\bar{w}(\bar{c}, \bar{z}) = 0, \quad (1.15)$$

де \bar{w} – вектор функцій, який визначається графом мережі;

\bar{c} – вектор фіксованих параметрів моделі;

\bar{z} – вектор змінних параметрів моделі.

Вираз (1.15) відображає запис моделі сталого поточкорозподілу у найзагальнішому випадку.

Розглянемо окремий випадок загальної математичної моделі СПР, коли в якості ділянок враховуються тільки пасивні ділянки мережі, тобто ділянки трубопроводу. Крім того, до цієї моделі не будемо включати залежності для температурного розрахунку ІМ. Температурний розрахунок виконується тільки для систем магістрального газопроводу.

Кожна i -та дуга графа мережі, $i \in E$, характеризується витратами q_i і втратою напору h_i , пов'язаних між собою монотонною залежністю, яка визначається параметрами c_i :

$$h_i = h_i(q_i), i \in E. \quad (1.16)$$

Залежність $h_i(q_i)$ має такі властивості:

$$\frac{dh_i(q_i)}{dq_i} \geq 0, \quad (1.17)$$

$$h_i(-q_i) = -h_i(q_i). \quad (1.18)$$

Вираз (1.17) означає, що залежність $h_i(q_i)$ є монотонно зростаючою функцією q_i . Вираз (1.18) означає, що залежність $h_i(q_i)$ є непарною функцією q_i .

У більшості випадків для пасивних елементів різних класів ІМ залежність (1.16) може бути апроксимована наступною формулою [2]:

$$h_i = P_{iH}^\alpha - P_{iK}^\alpha = c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1}, i \in E, \quad (1.19)$$

де P_{iH} , P_{iK} – тиск на початку і кінці i -ї ділянки мережі;

c_i – гідравлічний опір i -ї ділянки мережі, причому $c_i > 0$;

χ_i – коефіцієнт нелінійної i -ї ділянки мережі, причому $\chi_i \geq 1$;

α – показник ступеня при значеннях тисків на початку і на кінці ділянки мережі відповідно.

Для пасивних ділянок магістрального газопроводу в виразі (1.19) приймається $\alpha = 2$, $\chi = 2$, і математичну модель можна представити у вигляді:

$$h_i = P_{iH}^2 - P_{iK}^2 = c_i q_i |q_i|, i \in E. \quad (1.20)$$

Вираз (1.20) і залежність для гідравлічного опору c_i виходять з рівняння збереження кількості руху для стаціонарної течії газу з дозвуковою швидкістю і приведені в роботі [4].

Для водопровідних і міських газових мереж середнього і низького тиску $\alpha = 1$, і залежність (1.19) можна представити в наступному вигляді:

$$h_i = P_{iH} - P_{iK} = c_i q_i |q_i|, \quad i \in E. \quad (1.21)$$

Вирази для гідравлічних опорів в залежності (1.21) наведені в роботах [2, 4].

Система e рівняння вигляду (1.19) для дуг графа мережі спільно з e рівняннями, що впливають із законів Кірхгофа, є математичною моделлю СПР в ІМ.

Конкретизуємо систему рівнянь моделі СПР.

Доповнимо реальну мережу нульовою вершиною і фіктивними ділянками, що з'єднують цю вершину з усіма входами і виходами мережі. Входами мережі є всі її вузлові вершини, через які в мережу надходить цільовий продукт, а її виходами – всі вузлові вершини, через які здійснюються відбір цільового продукту. Отриманий граф містить e дуг і v вершин. Множину E дуг графа мережі можна уявити як $E = M \cup K$, де M – множина дуг графа мережі, що відповідають реальним ділянкам мережі; $K = L \cup N$ – множина фіктивних ділянок мережі; L , N – множини дуг, відповідних входів і виходів мережі, відповідно. Виберемо дерево графа мережі, тоді $E = E_1 \cup E_2$, де E_1 , E_2 – множина дуг, відповідних гілками дерева і хордам. Відзначимо, що нульова вершина є початковою для дуг, відповідних входів мережі, і кінцевою для дуг, відповідних виходів мережі. В цьому випадку система рівнянь математичної моделі СПР представлена в наступному вигляді [5]:

$$f_r = h_r + \sum_{i \in E_1} b_{1ri} h_r, \quad r \in E_2, \quad (1.22)$$

$$f_r = \sum_{r \in E_2} b_{1ri} q_r, \quad i \in E_1, \quad (1.23)$$

де

$$h_i(q_i) = \Psi_i(P_{iH}, P_{iK}) = c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1}, \quad i \in M, \quad (1.24)$$

$$h_j = -P_j^\alpha, \quad j \in L, \quad (1.25)$$

$$h_j = P_j^\alpha, \quad j \in N, \quad (1.26)$$

де P_j – тиск на початку ($j \in N$) або на кінці ($j \in \alpha$) j -ї фіктивної дуги;

b_{1ri} – елемент циклометричної матриці B_1 , побудованої для гілок дерева графа мережі.

Розв'язок системи рівнянь (1.22), (1.23) з урахуванням виразів (1.24) – (1.26) дозволяє визначити значення витрат у всіх дугах графа мережі і значення тисків на всіх входах і виходах мережі. Визначення значення тисків проміжних вузлах мережі здійснюється після розв'язання системи рівнянь (1.22), (1.23) методом підстановки відповідно з виразами (1.24).

1.1.5 Умови спостережуваності моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах

Під спостережуваністю моделі СПР в ІМ розуміють можливість оцінити всі компоненти векторів тиску і витрат в результаті непрямих або безпосередніх вимірювань тільки деяких з цих компонент [6].

Сформулюємо умови спостережуваності для моделі СПР, представленої системою рівнянь (1.22), (1.23). Дана система містить $m + l + n$ рівнянь і $m + 2l + 2n$ змінних, в якості яких є витрати q_i , $i \in M \cup L \cup N$ і тиски P_j , $j \in L \cup N$. В цьому випадку вектор стану \bar{Z} має такий вигляд: $\bar{Z} = \{q_i, i \in M \cup L \cup N; P_j, j \in L \cup N\}$. Він містить $e = l + m + n$ невідомих витрат і $l + n$ невідомих тисків, де $m = \text{Card}(M)$, $l = \text{Card}(L)$, $n = \text{Card}(N)$.

Інженерна мережа буде спостерігатися, якщо можна оцінити всі компоне-

нти вектора \bar{Z} , тобто розв'язати систему рівнянь (1.22), (1.23). Таким чином, умови спостережуваності моделі СПР еквівалентні умовам можливості розв'язання системи рівнянь (1.22), (1.23).

Спочатку розглянемо необхідні умови оцінювання компонент вектор стану \bar{Z} в результаті розв'язання системи рівнянь (1.22), (1.23) в алгебраїчному сенсі (за мінімумом вимірювань), а потім ці ж умови при розв'язанні системи рівнянь (1.22), (1.23) в статистичному сенсі (при надмірній кількості вимірювань).

Перетворимо систему рівнянь (1.22), (1.23) шляхом підстановки виразів (1.24) – (1.26) в (1.22). В результаті отримаємо таку систему рівнянь:

$$\varphi_r(q_r, r \in E_2; P_j, j \in L \cup N) = 0, r \in E_2. \quad (1.27)$$

Можна показати, що ІМ, що містить $e = l + m + n$ дуг, може бути спостережуваною в тому випадку, якщо проведено принаймні $k \geq s$, де $s = l + n$, вимірювань компонент вектор стану \bar{Z} .

Система рівнянь (1.27) містить $e_2 = \text{Card}(E_2)$ рівнянь і $e_2 + s$ невідомих, тобто є невизначеною, де $s = l + n$. Якщо розглядати вимірювання як додаткові рівняння, що виконуються в середньому, або вважати вимірювання точними, то система рівнянь (1.27) може бути визначеною і перевизначеною.

Нехай $k = s$. Провівши $k = s$ вимірювання, ми можемо доповнити систему (1.27) k рівняннями вигляду:

$$\tilde{z}_i = z_i + \xi_i, i = 1, 2, \dots, k, \quad (1.28)$$

де \tilde{z}_i – вимірювання значення i -ї компоненти вектор стану;

z_i – фактичне значення i -ї компоненти вектор стану;

ξ_i – помилка виміру i -ї компоненти вектор стану.

Система рівнянь (1.28) містить k рівнянь і $2k$ невідомих, оскільки неві-

домими є як z , так і ξ . Система (1.27), (1.28) містить $e_2 + k$ рівнянь і $e_2 + 2k$ невідомих, тобто є невизначеною. Нехтуючи помилками вимірювань, тобто вважаючи $\xi_i = 0$, або розглядаючи вимірювання як додаткові рівняння, що виконуються в середньому, систему (1.28) представимо у вигляді:

$$\tilde{z}_i = z_i, \quad i=1,2,\dots,k. \quad (1.29)$$

Доповнюючи систему (1.27) рівнянням вигляду (1.29) отримаємо нову систему рівнянь (1.27), (1.29), яка містить $e_2 + k$ рівнянь і $e_2 + k$ невідомих. Підставивши рівняння (1.29) в систему (1.27), отримаємо систему рівнянь (1.27), яка містить e_2 рівнянь і e_2 невідомих.

Таким чином, необхідною умовою того, щоб система (1.27), (1.29) була визначеною, є умова $k = l + n$.

Однак ця необхідна умова не є достатньою. Це означає, що з точки зору спостережливості ІМ істотний склад k вимірювань компонент вектор стану Z .

Прийнято називати детерміновану систему топологічно-спостережуваною, якщо число і склад вимірювань в ній таке, що ранг матриці системи рівнянь моделі спільно з рівняннями для вимірювань змінних не менше числа невідомих, що визначають стан систем. Поняття топологічної спостережуваності має сенс застосовувати до ІМ.

Інженерна мережа, що містить e дуг, із яких $s = l + n$ є входами або виходами, називається топологічно-спостережуваною, у тому випадку, якщо ранг матриці системи рівнянь (1.27) відносно оцінюваних витрат і тисків дорівнює їх сумарній кількості [6].

Можна показати, що для того, щоб ІМ, що містить e дуг, із яких $s = l + n$ відповідають входам або виходам мережі, була топологічно-спостережуваною, необхідно і достатньо привести $k = s$ лінійно незалежних вимірювань компонент вектор стану \bar{Z} .

При $k = s$ кількість оцінюваних змінних дорівнює e_2 , отже, необхідно до-

вести, що ранг матриці Якобі системи рівнянь (1.27) буде дорівнювати e_2 . Як впливає з теореми 1 і 2 теорії неявних функцій [7], ранг матриці Якобі системи рівнянь (1.27) буде дорівнювати e_2 в тому випадку, якщо ця система містить e_2 невідомих і e_2 лінійно незалежних рівнянь. Оскільки всі рівняння системи (1.27) лінійно незалежні, то ранг матриці (1.27) може бути менше e_2 в тому випадку, якщо при додаванні k рівнянь вигляду (1.29) деякі із рівнянь стануть перевизначеними, а сама система (1.27) залишиться невизначеною. Практично це означає, що проведені вимірювання повинні бути лінійно незалежними.

Розглянемо можливі випадки.

Нехай здійснено s вимірювань тиску на всіх входах і виходах мережі. Оскільки всі виміри P_j , $j \in L \cup N$ лінійно незалежні, то ранг матриці Якобі буде дорівнювати e_2 і ІМ буде топологічно-спостережуваною.

Нехай здійснено s вимірювань витрат на всіх входах і виходах мережі. Відповідно до вищевикладеного, необхідні умови виконані, однак серед наведених вимірювань тільки $s - 1$ лінійно незалежні, отже, ранг матриці нібито буде дорівнювати $e_2 - 1$, що не задовольняє визначенню топологічної спостережуваності ІМ.

Таким чином, для того щоб отримати s лінійно незалежних вимірювань, необхідно до проведених $s - 1$ лінійно незалежних вимірювань витрат додати одне вимірювання тиску на останньому вході або виході мережі.

Нехай здійснено $k = s$ вимірювань, причому в деяких вузлах виміряно тиск, а в деяких – витрати. Тоді отримані вимірювання будуть лінійно незалежні в тому випадку, якщо виконуються умови взаємозалежності змінних рівнянь моделі СПР.

Розглянемо випадок, коли виконується $k > s$ вимірювань компонент вектор \bar{Z} .

Інженерна мережа, яка містить e дуг, із яких $l + n$ відповідають входам або виходам мережі, при проведенні $k > s$ вимірювань компонент вектор стану Z може бути спостережувана в тому випадку, якщо вона принаймні топологічно-спостережувана.

Розглянемо систему рівнянь (1.27), (1.29), де $k > s$. Ця система буде містити $e_2 + k$ рівнянь і $e_2 + s$ невідомих, тобто отримуємо систему, кількість рівнянь в якій більше числа невідомих. Це є наслідком припущення про рівність всіх помилок вимірювання ξ_i , $i = 1, 2, \dots, k$ нулю. В цьому випадку необхідно розглядати повну систему рівнянь (1.27), (1.28), що містить e_2 рівнянь і $e_2 + 2k$ невідомих. Розв'язок такої системи можливо тільки в статистичному сенсі. Для цього будують деяку функцію від помилок вимірювань і розв'язують таку задачу:

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \rightarrow \min_{Z \in \Omega}, \quad (1.30)$$

де область Ω визначається системою рівнянь (1.27).

Таким чином, з множини розв'язків системи рівнянь (1.27) вибирається таке, яке забезпечує мінімум функції (1.30). Для того, щоб система рівнянь (1.27) мала хоча б один розв'язок, необхідно, щоб інженерна мережа була топологічно-спостережуваною, а матриця Якобі мала ранг, рівний e_2 .

1.2 Змістовна та формальна постановка задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах

1.2.1 Змістовна постановка задачі

Будемо розглядати окремий випадок загальної математичної моделі СПР, коли в якості ділянок враховуються тільки пасивні ділянки мережі (ділянки трубопроводу).

Вектором стану \bar{Z} називається вектор режимних параметрів, що повністю описує поточкорозподіл мережі. Компонентами його є витрати у всіх дугах мережі і тиски у всіх вузлах мережі.

Для розв'язання системи рівнянь моделі СПР і отримання всіх компонент вектору стану повинні виконуватися умови спостережуваності, які для ІМ, що містить l входів n виходів, зводяться до того, що сумарна кількість вимірювань режимних параметрів (витрат і тисків) на входах і виходах мережі має дорівнювати хоча б $l + n$. На кожному вході або виході має бути відомо вимірювання або тиску, або витрати, причому має бути відомо хоча б одне вимірювання тиску.

Якщо кількість вимірювань режимних параметрів дорівнює сумарній кількості входів і виходів мережі, тобто $s = l + n$, то система рівнянь моделі СПР може бути розв'язана алгебраїчно і має місце завдання гідравлічного розрахунку ІМ [4]. При цьому точність отриманих оцінок стану не задовільна, тому що не враховується наявність помилок вимірювання тисків і витрат на входах і виходах ІМ.

Для підвищення точності отримання оцінок стану доцільно, щоб кількість вимірювань режимних параметрів перевищувало сумарну кількість входів і виходів ІМ, тобто має виконуватися вимога $s > l + n$, що свідчить про надмірність вимірювань. У цьому випадку розв'язок може бути отримано статистично і має місце задача оцінювання стану моделі СПР [4], розв'язання якої дозволяє отримати оцінки всіх компонент вектору стану на підставі вимірювання лише їх частини. При цьому враховується наявність випадкових помилок вимірювання тисків і витрат на входах і виходах мережі, які при розв'язанні задачі оцінювання стану моделі СПР пригнічуються.

Таким чином, змістовна постановка задачі оцінювання стану моделі СПР в ІМ полягає в наступному.

Відомі структура ІМ, задана у вигляді графа $G(V, E)$, значення параметрів реальних ділянок мережі (ділянок трубопроводу), результати вимірювань тисків і витрат на входах і виходах мережі і їх дисперсії, причому кількість вимірювань перевищує сумарну кількість входів і виходів мережі.

Потрібно отримати оцінки істинних значень величин тисків і витрат на входах і виходах мережі, які вимірюються, а також всіх невідомих, але функці-

онально пов'язаних з ними компонентів вектору стану, тобто витрат за всіма дугами і тисків на всіх входах і виходах ІМ.

1.2.2 Формальна постановка задачі

Сформулюємо математичну постановку задачі оцінювання стану моделі СПР в ІМ.

Нехай структура ІМ задана у вигляді графа $G(V, E)$. Відомі параметри реальних ділянок мережі c_i , $i \in M$, а також вимірювання значень тисків \tilde{P}_i , $i \in L^P \cup N^P$ і витрат \tilde{q}_j , $j \in L^q \cup N^q$, де L^P , N^P – множина фіктивних дуг, відповідних входів і виходів мережі, де відбувалося вимірювання тисків; L^q , N^q – множина фіктивних дуг, відповідних входів і виходів мережі, де проводилися вимірювання витрат. Відомі також дисперсії виміряних величин тисків $\sigma_{P_i}^2$, $i \in L^P \cup N^P$ і витрат $\sigma_{q_j}^2$, $j \in L^q \cup N^q$. Кількість вимірювань s перевищує сумарну кількість входів і виходів ІМ, тобто $s = l^P + n^P + l^q + n^q > l + n$, де $l^P = \text{Card}(L^P)$, $n^P = \text{Card}(N^P)$, $l^q = \text{Card}(L^q)$, $n^q = \text{Card}(N^q)$. Виконання даної умови відповідає виконанню умов топологічної ідентифікованості ІМ.

Потрібно отримати оцінки істинних значень тисків P_i , $i \in L^P \cup N^P$ і витрат q_j , $j \in L^q \cup N^q$, що вимірюються, а також всіх функціонально пов'язаних з ними змінних q_i , $i \in M \cup L \cup N$; P_j , $j \in L \cup N$, що характеризують потекорозподіл в ІМ, тобто оцінити всі компоненти вектор стану Z .

Для побудови процедури оцінювання будемо використовувати метод максимальної правдоподібності [8] Вибір методу максимальної правдоподібності обумовлений тим, що оцінки максимальної правдоподібності асимптотично незміщені, асимптотично нормальні, асимптотично ефективні, а для нормального закону розподілу – ефективні.

Вимірювання значень тисків \tilde{P}_i , $i \in L^P \cup N^P$ і витрат \tilde{q}_j , $j \in L^q \cup N^q$ можна представити в такому вигляді:

$$\tilde{P}_i = P_i + \varepsilon_{P_i}, \quad i \in L^P \cup N^P, \quad (1.31)$$

$$\tilde{q}_j = q_j + \varepsilon_{q_j}, \quad j \in L^q \cup N^q, \quad (1.32)$$

де P_i , q_j – істинне значення тисків і витрат;

ε_{P_i} , ε_{q_j} – помилки вимірювань тисків і витрат, відповідно.

Помилки вимірювання ε_{P_i} , ε_{q_j} в виразах (1.31), (1.32) є незалежні випадкові величини з нульовими математичними сподіваннями і дисперсіями $\sigma_{P_i}^2$, $\sigma_{q_j}^2$ і розподілені по нормальному закону. Вирази для щільності розподілу ймовірностей помилок вимірювань ε_{P_i} , ε_{q_j} мають такий вигляд:

$$p(\varepsilon_{P_i}) = \sigma_{P_i}^{-1} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(\tilde{P}_i - P_i)^2}{2\sigma_{P_i}^2} \right], \quad i \in L^P \cup N^P, \quad (1.33)$$

$$p(\varepsilon_{q_j}) = \sigma_{q_j}^{-1} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(\tilde{q}_j - q_j)^2}{2\sigma_{q_j}^2} \right], \quad j \in L^q \cup N^q. \quad (1.34)$$

Оскільки помилки вимірювань ε_{P_i} , $i \in L^P \cup N^P$ і ε_{q_j} , $j \in L^q \cup N^q$ статистично незалежні, спільна функція щільності розподілу ймовірностей дорівнює добутку функцій щільності розподілу ймовірностей (1.33), (1.34) помилок вимірювань, і функція максимальної правдоподібності з урахуванням статистичних властивостей помилок вимірювань прийме такий вигляд [9]:

$$L = (2\pi)^{-\frac{l^P + n^P + l^q + n^q}{2}} \prod_{i \in L^P \cup N^P} \sigma_{P_i}^{-1} \prod_{j \in L^q \cup N^q} \sigma_{q_j}^{-1} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i \in L^p \cup N^p} \sigma_{P_i}^{-2} (\tilde{P}_i - P_i)^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j \in L^q \cup N^q} \sigma_{q_j}^{-2} (\tilde{q}_j - q_j)^2 \right]. \quad (1.35)$$

Потрібно знайти такі значення P_i , $i \in L^p \cup N^p$; q_j , $j \in L^q \cup N^q$, які доставляли б максимум функції (1.35) і задовольняли моделі СПР.

Функції L і $\ln L$ мають оптимальні значення при одних і тих же значеннях аргументів (наслідок монотонно зростаючого характеру функції $\ln L$), що дозволяє формулювати задачу оцінювання стану як задачу максимізації функції $\ln L$. Перейдемо до натурального логарифму функції максимальної правдоподібності L :

$$\begin{aligned} \ln L = & -\frac{l^p + n^p + l^q + n^q}{2} \ln(2\pi) - \sum_{i \in L^p \cup N^p} \ln \sigma_{P_i} - \sum_{j \in L^q \cup N^q} \ln \sigma_{q_j} - \\ & -\frac{1}{2} \sum_{i \in L^p \cup N^p} \sigma_{P_i}^{-2} (\tilde{P}_i - P_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j \in L^q \cup N^q} \sigma_{q_j}^{-2} (\tilde{q}_j - q_j)^2. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Максимум функції (1.36) досягається в разі, якщо:

$$y = \sum_{i \in L^p \cup N^p} \sigma_{P_i}^{-2} (\tilde{P}_i - P_i)^2 + \sum_{j \in L^q \cup N^q} \sigma_{q_j}^{-2} (\tilde{q}_j - q_j)^2 \rightarrow \min_{q_j, P_i \in \Omega}, \quad (1.37)$$

де Ω – область, яка визначається рівняннями моделі СПР (1.22), (1.23).

Таким чином, формальна постановка задачі оцінювання стану моделі СПР призводить до задачі мінімізації нелінійної функції мети (1.37) при обмеженнях у вигляді системи рівностей (1.22), (1.23). Дана задача відноситься до класу умовної оптимізації і в повному вигляді запишеться в такому вигляді:

$$y = \sum_{i \in L^p \cup N^p} \sigma_{P_i}^{-2} (\tilde{P}_i - P_i)^2 + \sum_{j \in L^q \cup N^q} \sigma_{q_j}^{-2} (\tilde{q}_j - q_j)^2 \rightarrow \min_{q_j, P_i \in \Omega}, \quad (1.38)$$

$$\Omega: f_r = h_r + \sum_{i \in E_1} b_{1ri} h_i = 0, r \in E_2; \quad (1.39)$$

$$q_i = \sum_{r \in E_2} b_{1ri} q_r, i \in E_1. \quad (1.40)$$

1.3 Постановка задач дослідження

На підставі проведеного аналізу предметної області та формальної постановці можна дійти висновку, що для розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах необхідно використовувати оптимізаційні методи.

Метою кваліфікаційної роботи є застосування для розв'язання сформульованої задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

- навести постановку задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах;
- проаналізувати можливість підвищення ефективності розв'язання задачі оцінювання стану;
- застосувати узагальнений метод Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду для розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах;
- розробити алгоритм, що реалізовує даний метод;
- виконати програмну реалізацію розробленого алгоритму;
- показати працездатність запропонованого алгоритму на прикладі розрахунку ділянки інженерної мережі.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОЦІНЮВАННЯ СТАНУ МОДЕЛІ СТАЛОГО ПОТОКОРОЗПОДІЛУ

2.1 Підвищення ефективності розв'язання задачі оцінювання стану

Вибір методу розв'язання задачі (1.38) – (1.40) істотно залежить від конкретного уявлення рівнянь моделі СПР (1.39) – (1.40).

В роботі [4] розглянуто розв'язання сформульованої задачі при використанні наступного вибору дерева графа мережі.

Виберемо дерево графа мережі таким чином, щоб його гілками стали реальні ділянки мережі і фіктивну ділянку, відповідну входу мережі. Дамо йому номер 1. Тоді всі фіктивні дуги, відповідні входам і виходам мережі (крім першої) стануть хордами, а реальні ділянки будуть частково хордами, частково гілками дерева. Кожна з множин M , L , N розіб'ється на дві, відповідних гілкам дерева M_1 , L_1 , N_1 і хордам – M_2 , L_2 , N_2 , при чому $N_1 = \emptyset$, $N_2 \equiv N$. У цьому випадку задача оцінювання стану моделі СПР може бути сформульована у такому вигляді:

$$y = \sum_{i \in L^p \cup N^p} \sigma_{P_i}^{-2} (\tilde{P}_i - P_i)^2 + \sum_{j \in L^q \cup N^q} \sigma_{q_j}^{-2} (\tilde{q}_j - q_j)^2 \rightarrow \min_{q_j, P_i \in \Omega}, \quad (2.1)$$

$$\Omega: f_r = c_r q_r |q_r|^{\chi_r - 1} + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1} = 0, r \in M_2; \quad (2.2)$$

$$f_r = P_r^\alpha - P_1^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1} = 0, r \in N_2; \quad (2.3)$$

$$f_r = P_1^\alpha - P_r^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1} = 0, r \in L_2; \quad (2.4)$$

$$q_i = \sum_{r \in E_2} b_{1ri} q_r, i \in M_1 \cup L_1. \quad (2.5)$$

Система рівнянь (2.2) – (2.5) являє собою систему $m + l + n$ рівнянь відно-

сно $m + 2l + 2n$ змінних $q_i, i \in M \cup L \cup N$ і $P_j, j \in L \cup N$. Таким чином, маємо $m + l + n$ залежних змінних і $l + n$ незалежних. Віднесемо до незалежних змінних витрати у фіктивних хордах $q_i, j \in L_2 \cup N_2$ і тиск P_1 .

Згідно (2.5), $q_i, i \in M_1 \cup L_1$ є функціями від $q_r, r \in M_2 \cup L_2 \cup N_2$. Тоді вираз (2.2) після підстановки в нього $q_i, i \in M_1$ з виразу (2.5) являє собою систему m_2 рівнянь відносно $m_2 + l_2 + n_2$ змінних $q_r, r \in M_2 \cup L_2 \cup N_2$. Тут $m_2 = \text{Card}(M_2)$, $l_2 = \text{Card}(L_2)$, $n_2 = n = \text{Card}(N_2)$. Рівняння (2.3), (2.4) є рівняннями зв'язку і дозволяють явно висловити змінні $P_r, r \in L_2 \cup N_2$ через $P_1: q_i, i \in M_1$, тобто як функції від $P_1: q_r, r \in M_2 \cup L_2 \cup N_2$.

Підстановка значень змінних $q_i, i \in M_1$ з виразу (2.5) в рівняння (2.2) – (2.4), а потім $P_r, r \in L_2 \cup N_2; q_i, i \in L_1$ з рівнянь (2.3) – (2.5) у вираз (2.1) дозволяє знизити порядок завдання (2.1) – (2.5) і звести її до наступної [4]:

$$y = y(\bar{q}_s, \bar{q}_t, P_1) \rightarrow \min_{\bar{q}_s, \bar{q}_t, P_1 \in P}, \quad (2.6)$$

$$P: f_r(\bar{q}_s, \bar{q}_t) = 0, r \in M_2. \quad (2.7)$$

Тут $\bar{q}_s = \{q_j, j \in M_2\}$, $\bar{q}_t = \{q_j, j \in L_2 \cup N_2\}$.

Таким чином, задача оцінювання стану моделі СПР зводиться до задачі мінімізації нелінійної функції цілі (2.6) при обмеженнях вигляду (2.7). Метод розв'язання задачі (2.6), (2.7) розглянуто в роботі [10]. Він дозволяє перейти від задачі умовної оптимізації (2.6), (2.7) до задачі безумовної оптимізації, використовуючи так звані перші і другі умовні частинні похідні функції цілі по незалежних змінних. Розв'язання даної задачі здійснювалося при використанні диференціального алгоритму [10].

Однак такий метод розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР має недолік, який полягає в тому, що система рівнянь (2.7) не може бути розв'язана алгебраїчно і, отже, на кожній ітерації необхідно:

– розв'язувати систему нелінійних рівнянь (2.7) для визначення залежних змінних q_r , $r \in M_2$ за поточними значеннями незалежних змінних q_r , $r \in L_2 \cup N_2$;

– перші і другі умовні похідні функції, що мінімізується, по незалежних змінних не мають аналітичних виразів і можуть обчислюватися тільки через перші і другі частинні похідні функції цілі і обмежень задачі в точці, що призводить до значних тимчасових витрат на кожній ітерації і вимагає великих обсягів проміжних обчислень.

Таким чином, розглянутий підхід до розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР не є ефективним ні за часом машинного рахунку, ні за обсягом займаної пам'яті.

Підвищення ефективності розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР може бути досягнуто за рахунок використання топологічних властивостей графа мережі і способу вибору незалежних змінних [11].

Для мережі, кожен вузол якої є або входом, або виходом, тобто $v = l + n$, дерево графа мережі вибирається таким чином, щоб його гілками стали всі фіктивні дуги, відповідні входам і виходам мережі, тобто $E_1 = L \cup N$. Тоді всі дуги, відповідні реальним ділянкам мережі, стануть хордами, тобто $E_2 \equiv M$. В цьому випадку допустима область буде описуватися системою рівнянь моделі СПР такого вигляду:

$$c_r q_r |q_r|^{\chi_r - 1} + \sum_{j \in N} b_{1rj} P_j^\alpha - \sum_{j \in L} b_{1rj} P_j^\alpha = 0, r \in M; \quad (2.8)$$

$$q_i = \sum_{r \in M} b_{1ri} q_r, i \in L \cup N. \quad (2.9)$$

Отже, задача оцінювання стану моделі СПР є задачею мінімізації функції (2.1) при обмеженнях (2.8), (2.9).

Система рівнянь (2.8), (2.9) являє собою систему $m + l + n$ рівнянь відносно $m + 2l + 2n$ змінних q_i , $i \in M \cup L \cup N$ і P_j , $j \in L \cup N$. Розділимо змінні за-

вдання на залежні і незалежні. До незалежних змінних віднесемо тиск в дугах, відповідний входам і виходам мережі P_j , $j \in L \cup N$, до залежних – витрати q_i , $i \in M \cup L \cup N$. Вираз (2.8) дозволяє явно виразити витрати в хордах q_r , $r \in M$ через тиск на входах і виходах мережі P_j , $j \in L \cup N$ і, відповідно (2.9), витрати в гілках дерева також є явними функціями від тисків P_j , $j \in L \cup N$.

Запропоновані способи вибору дерева графа мережі і розбиття на залежні і незалежні змінні дозволили, на відміну від підходу, розглянутого раніше, рівняння моделі (2.8), (2.9) подати в алгебраїчно розв'язаному вигляді, перші і другі умовні похідні функції, що мінімізується, по незалежних змінних отримувати як похідні складної функції, що обчислюється аналітично, і фактично звести задачу мінімізації з нелінійними обмеженнями у вигляді рівностей, тобто задачі умовної оптимізації, до такого вигляду [5]:

$$y(P_i, i \in L \cup N) \rightarrow \min_{P_i, i \in L \cup N}. \quad (2.10)$$

Задача (2.10) є задачею багатовимірної безумовної оптимізації тільки відносно незалежних змінних.

Перераховані вище переваги другого підходу визначають його використання для розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР.

2.2 Застосування узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду для розв'язання задачі оцінювання стану

Квадратична функція, що мінімізується (2.1) – опукла. Підстановка ж залежних змінних q_i , $i \in M \cup L \cup N$ з рівнянь (2.8), (2.9) в функцію цілі (2.1) призводить до отримання функції тільки від незалежних змінних P_j , $j \in L \cup N$, яка

вже не є опуклою. Тому для розв'язання задачі (2.1), (2.8), (2.9) використовуються модифікації методів другого порядку, що дозволяють знайти мінімум функції в разі її не опуклості, зокрема узагальнений метод Ньютон з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду, модифікований метод покоординатного спуску, узагальнений метод Ньютон з використанням лінеаризованих рівнянь моделі СПР [10, 11].

Розглянемо узагальнений метод Ньютон з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду.

Основне рекурентне співвідношення для узагальненого метода Ньютон має наступний вид [13]:

$$\bar{P}^{(k+1)} = \bar{P}^{(k)} + \lambda^{(k)} \Delta \bar{P}^{(k)}, \quad (2.11)$$

де $\Delta \bar{P}^{(k)}$ – напрямний вектор на k -ої ітерації, що визначає напрямок руху;

$\bar{P}^{(k+1)}$ – вектор значень незалежних змінних на $(k+1)$ -ої ітерації;

$\lambda^{(k)}$ – параметр, що характеризує величину кроку у вибраному напрямку.

Напрямний вектор на k -ої ітерації визначається наступним чином:

$$\Delta \bar{P}^{(k)} = (S^{(k)})^{-1} \left(\frac{\delta y}{\delta \bar{P}} \right)^{(k)}. \quad (2.12)$$

У формулі (2.12) $\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{P}} \right)^{(k)}$ – вектор перших умовних похідних, обчислений на k -й ітерації; $S^{(k)}$ – матриця Гессе, обчислена на k -й ітерації.

Метод Ньютон гарантує збіжність, якщо матриця Гессе додатно визначена [13]. Проте при розв'язання задачі оцінювання стану ця вимога не виконується, а узагальнений метод Ньютон не дає збіжність. Ця обставина привела до необхідності застосувати додаткові перетворення, що роблять матрицю Гессе додатно визначеною на кожному етапі мінімізації. В роботі [13] розглянута

схема апроксимації матриці Гессе на основі аналізу власних значень, яка забезпечує додатну визначеність наближення, в роботах [8, 13] наведено метод Марквардта для переходу від довільної до додатної визначеної матриці. Фіакко і Мак-Кормик [14] запропонували модифікацію узагальненого метода Ньютона, яка дозволяє обійти складності, зв'язані з вимогами додатної визначеності матриці Гессе і з тим, що в точці $\bar{P}^{(K)}$ взагалі може не існувати матриці, зворотної $S^{(K)}$. В роботі [10] приведена дещо інше трактування цієї модифікації, зв'язаної з приведенням матриці $S^{(K)}$ до діагонального вигляду.

Розкладемо функцію y в ряд Тейлора в околиці точки $\bar{P}^{(K)}$, обмежуючись квадратичними членами:

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{d\bar{P}} \right)^{(K)} \Delta \bar{P} + \frac{1}{2} \Delta \bar{P}' S^{(K)} \Delta \bar{P}. \quad (2.13)$$

Будемо шукати такий приріст змінних $\Delta \bar{P}$, який мінімізує квадратичну форму (2.13).

Припустимо, що є деяке лінійне перетворення $U^{(K)}$ координат \bar{P} в $\bar{\xi}$, що приводить квадратичну форму (2.13) до діагонального вигляду, тобто

$$\begin{aligned} \Delta y &= \left(\frac{dy}{d\bar{\xi}} \right)^{(K)} \Delta \bar{\xi}^{(K)} + \frac{1}{2} \Delta \bar{\xi}^{(K)'} B^{(K)} \Delta \bar{\xi}^{(K)} = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{dy}{d\bar{\xi}_j} \right)^{(K)} \Delta \bar{\xi}_j^{(K)} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{d\bar{\xi}_j^2} \right)^{(K)} (\Delta \bar{\xi}_j^{(K)})^2 \right] = \sum_{j=1}^n \Delta y_j (\Delta \bar{\xi}_j^{(K)}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

В даному виразі $\Delta \bar{\xi}_j^{(K)}$ – напрямний вектор у новій системі координат $\bar{\xi}$:

$$\Delta \bar{\xi}_j^{(K)} = U^{(K)} \Delta \bar{P}^{(K)}, \quad (2.15)$$

де $\left(\frac{dy}{d\xi_j}\right)^{(k)}$ – j -та складова n -мірного вектору:

$$\left(\frac{dy}{d\bar{\xi}}\right)^{(k)} = \left(\frac{dy}{d\bar{P}}\right)^{(k)} (U^{-1})^{(k)}, \quad (2.16)$$

а $\left(\frac{d^2y}{d\xi_j^2}\right)^{(k)}$ – значення j -го діагонального елемента b_{jj} матриці $B^{(k)}$.

Формули (2.15), (2.16) дозволяють перейти від системи координат \bar{P} до системи координат $\bar{\xi}$.

Квадратична форма (2.14) представлена в сепарабельному вигляді, що дає змогу здійснювати аналіз кожного параметра окремо, вибір напрямку руху $\Delta\xi_j$ по кожній з нових координат ξ_j незалежний і зводиться до мінімізації n квадратичних функцій однієї змінної $\Delta y_j(\Delta\xi_j)$.

При цьому можливі три випадки. Розглянемо можливі випадки, які можуть виникнути в процесі мінімізації.

Перший випадок:

$$\left(\frac{d^2y}{d\xi_j^2}\right)^{(k)} > 0, \quad \left(\frac{dy}{d\xi_j}\right)^{(k)} \neq 0. \quad (2.17)$$

Тоді $\Delta y_j(\Delta\xi_j)$ опукла і її мінімум $\Delta\xi_j^{(k)}$ може бути визначеною з даного виразу

$$\Delta\xi_j^{(k)} = -\left(\frac{dy}{d\xi_j}\right)^{(k)} / \left(\frac{d^2y}{d\xi_j^2}\right)^{(k)}. \quad (2.18)$$

Другий випадок:

$$\left(\frac{d^2 y}{d\xi_j^2}\right)^{(K)} < 0, \quad \left(\frac{dy}{d\xi_j}\right)^{(K)} \neq 0. \quad (2.19)$$

В такому випадку функція $\Delta y_j(\Delta \xi_j)$ увігнута, і напрямок руху, пов'язаний зі зменшенням її значення, протилежний розміщенню точки максимуму.

Крок $\Delta \xi_j^{(K)}$ можна взяти таким, щоб його абсолютне значення дорівнювало відстані до точки максимуму:

$$\Delta \xi_j^{(K)} = \left(\frac{dy}{d\xi_j}\right)^{(K)} / \left(\frac{d^2 y}{d\xi_j^2}\right)^{(K)}. \quad (2.20)$$

Третій випадок:

$$\left(\frac{d^2 y}{d\xi_j^2}\right)^{(K)} < 0, \quad \left(\frac{dy}{d\xi_j}\right)^{(K)} = 0. \quad (2.21)$$

Функція $\Delta y_j(\Delta \xi_j^{(K)})$ увігнута, і ми знаходимося в її максимумі. Для функції $\Delta y_j(\Delta \xi_j^{(K)})$ точка $\xi_j^{(K)}$ може виявитись сідловою. Рух в будь-яку сторону в вздовж координати ξ_j приводить до зменшення Δy_j .

Після вибору $\Delta \bar{\xi}^{(K)}$ у відповідності з (2.17) – (2.21) повертаємося до старої системи координат і визначимо напрямний вектор:

$$\Delta \bar{P}^{(K)} = (U^{-1})^{(K)} \Delta \bar{\xi}^{(K)}. \quad (2.22)$$

Параметр $\lambda^{(K)}$ визначається в результаті мінімізації функції $y(\bar{P}^{(K)} + \lambda^{(K)} \Delta \bar{P}^{(K)})$ одним із методів одновимірної оптимізації. Нове значення $\bar{P}^{(K+1)}$ визначається за формулою (2.11).

Основна складність при реалізації цього методу – перетворення матриці $S^{(K)}$ до діагонального вигляду. Перетворення матриці квадратичної форми до діагонального вигляду, еквівалентне доповненню квадратичної форми до повного квадрату (метод Лагранжа), може бути отримано за допомогою Гауссових виключень, які використовуються при розв’язанні систем лінійних рівнянь [10]. Після n кроків процедури Гауссових виключень вихідна матриця $S^{(K)}$ буде перетворена в трикутну матрицю $U^{(K)}$ з одиничною діагоналлю, а n головних елементів утворять діагональну матрицю $B^{(K)}$.

Процес приведення матриці Гессе до діагонального вигляду є не чим іншим, як приведення цільової функції до канонічної форми, а елементи діагональної матриці $B^{(K)}$ є власними значеннями матриці $\frac{1}{2}S(\bar{P}^{(K)})$.

Аналіз елементів діагональної матриці дає уявлення про геометричну інтерпретацію цільової функції [13]. Так, усі додатні елементи матриці свідчать про опуклість функції, від’ємні – про увігнутість, якщо пара елементів має протилежні знаки, то функція є сідловою. Різниця в абсолютних значеннях елементів діагональної матриці $B^{(K)}$ говорить про орієнтацію ліній рівнів функції цілі.

Таким чином, умови (2.17) – (2.21) дозволяють встановити напрям достатньо швидкого зменшення функції $y(\bar{P})$, якщо вона знаходиться в околі або безпосередньо в точці максимуму чи в сідловій точці, що є непосильним завданням для більшості методів безумовної оптимізації. Більше того, цей метод дозволяє визначити напрямок зменшення функції $y(\bar{P})$ у випадку, якщо матриця $S^{(K)}$ вироджена, оскільки й тоді можна перетворити її в діагональну матрицю [10].

Цей метод не дозволяє визначити напрямний вектор тільки в тому випадку, якщо матриця $S^{(K)}$ є додатною напіввизначеною, а $\left(\frac{dy}{dP}\right)^{(K)} = 0$, тобто точка

$\bar{P}^{(k)}$ задовольняє необхідним умовам точки локального мінімуму функції $y(\bar{P})$.

Отримаємо вирази для визначення перших та других похідних мінімізуємої функції (2.1) по незалежних змінних $P_j, j \in L \cup N$.

Розглянемо аналітичний вираз для визначення перших умовних похідних $\frac{\delta y}{\delta P_j}, j \in L \cup N$:

$$\frac{\delta y}{\delta P_j} = 2\sigma_{P_j}^{-2}(\tilde{P}_j - P_j) + 2 \sum_{k \in L^q \cup N^q} \sigma_{q_k}^{-2}(\tilde{q}_k - q_k) \frac{\delta q_k}{\delta P_j}, j \in L^p \cup N^p. \quad (2.23)$$

У випадку, якщо у вузлі, відповідному початку або кінцю j -ї дуги, не проводилося вимірювання тиску, вираз для $\frac{\delta y}{\delta P_j}$ відрізняється від виразу (2.23)

та має вид:

$$\frac{\delta y}{\delta P_j} = 2 \sum_{k \in L^q \cup N^q} \sigma_{q_k}^{-2}(\tilde{q}_k - q_k) \frac{\delta q_k}{\delta P_j}, j \in (L \cup N) / (L^p \cup N^p). \quad (2.24)$$

Для визначення $\frac{\delta q_k}{\delta P_j}, k \in L^q \cup N^q, j \in L \cup N$ використаємо вираз (2.9) для

$q_k, k \in L^q \cup N^q$, отримаємо:

$$\frac{\delta q_k}{\delta P_j} = \sum_{r \in M} b_{1rk} \frac{\delta q_r}{\delta P_j}, j \in L \cup N, k \in L^q \cup N^q. \quad (2.25)$$

Вираз для $\frac{\delta q_r}{\delta P_j}, r \in M, j \in L \cup N$ отримаємо внаслідок диференціювання

(2.8), представивши $q_r, r \in M$ як неявну функцію від $P_j, j \in L \cup N$:

$$\frac{\delta q_r}{\delta P_j} = \frac{\alpha P_j^{\alpha-1} b_{1rj}}{\chi_r c_r |q_r|^{\chi_r-1}}, \quad j \in L, \quad (2.26)$$

$$\frac{\delta q_r}{\delta P_j} = -\frac{\alpha P_j^{\alpha-1} b_{1rj}}{\chi_r c_r |q_r|^{\chi_r-1}}, \quad j \in N. \quad (2.27)$$

Визначимо елементи матриці S других умовних похідних функцій цілі по незалежним змінним $\frac{\delta^2 y}{\delta P_i \delta P_j}$, $i, j \in L \cup N$.

Діагональні елементи матриці S для випадку, коли присутнє вимірювання тиску в вузлі, відповідному початку чи кінцю j -ої дуги, визначаються відповідно з наступним виразом:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta P_j^2} = \sigma_{P_j}^{-2} + 2 \sum_{K \in L^q \cup N^q} \sigma_{q_k}^{-2} \left[\left(\frac{\delta q_k}{\delta P_j} \right)^2 + (q_k - \tilde{q}_k) \frac{\delta^2 q_k}{\delta P_j^2} \right], \quad j \in L^p \cup N^p. \quad (2.28)$$

В іншому випадку, а також для недіагональних елементів, вираз для $\frac{\delta^2 y}{\delta P_i \delta P_j}$ приймає вигляд:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta P_i \delta P_j} = 2 \sum_{K \in L^q \cup N^q} \sigma_{q_k}^{-2} \left[\left(\frac{\delta q_k}{\delta P_i} \right) \left(\frac{\delta q_k}{\delta P_j} \right) + (q_k - \tilde{q}_k) \frac{\delta^2 q_k}{\delta P_i \delta P_j} \right],$$

$$i, j \in L^p \cup N^p; \quad i, j \in L \setminus L^p \cup N \setminus N^p. \quad (2.29)$$

Значення $\frac{\delta q_k}{\delta P_i}$, $\frac{\delta q_k}{\delta P_j}$, $i, j \in L \cup N$ визначаються з (2.25), вираз для

$\frac{\delta^2 q_k}{\delta P_i \delta P_j}$, $k \in L^q \cup N^q$ виходить в результаті диференціювання (2.29) і має вид:

$$\frac{\delta^2 q_k}{\delta P_i \delta P_j} = \sum_{r \in M} b_{1rk} \frac{\delta^2 q_r}{\delta P_i \delta P_j}, \quad k \in L^q \cup N^q, \quad j \in L \cup N. \quad (2.30)$$

Використовуючи залежність (2.8) і правило знаходження других похідних неявних функцій, знаходимо

$$\frac{\delta^2 q_r}{\delta P_i \delta P_j} = \pm \frac{b_{1ri} b_{1rj} \alpha^2 P_j^{\alpha-1} P_i^{\alpha-1}}{\chi_r^2 c_r^2 |q_r|^{2\chi_r-1}}. \quad (2.31)$$

Вираз (2.31) береться зі знаком “-”, якщо $i \in L, j \in L$ або $i \in N, j \in N$ і зі знаком “+”, якщо $i \in L, j \in N$ або $i \in N, j \in L$.

Як видно з приведених виразів, аналітичні вирази для обчислення перших і других умовних похідних не являються громіздкими, тому елементом незручності, зв’язаного з необхідністю їх обчислення, можна нехтувати і використовувати для вирішення розглянутої задачі методи другого порядку.

2.3. Метод Гаусса послідовного виключення невідомих

Процедура Гауссових виключень дозволяє перетворити матрицю других умовних похідних $S^{(K)}$ в трикутну матрицю $U^{(K)}$ з одиничною діагоналлю, а n головних елементів утворять діагональну матрицю $B^{(K)}$.

Метод Гаусса є прямим методом розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) [15].

Нехай потрібно розв’язати СЛАР

$$A\bar{x} = \bar{b}. \quad (2.32)$$

де $A=(a_{ij})$ – матриця коефіцієнтів розмірності $n \times n$;

\bar{x} – вектор-стовпець невідомих розмірності n ;

\bar{b} – вектор-стовпець вільних членів розмірності n .

У розгорнутому вигляді СЛАР можна записати в такому вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.33)$$

Метод Гаусса полягає в тому, що елементарними перетвореннями над рядками матриці вона приводиться до трикутного вигляду з головною діагоналлю, що складається з одиничних елементів (прямий хід методу Гаусса); отримана система з трикутною матрицею розв'язується у явному вигляді (зворотний хід методу Гаусса).

Розглянемо прямий хід методу Гаусса.

Позначимо $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $b_i^{(0)} = b_i$, $i, j = 1, \dots, n$.

Переходимо до першого кроку виключень ($k=1$).

Нехай $a_{11} \neq 0$.

Розділимо перше рівняння системи (2.33) на a_{11} , запишемо його у вигляді

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = y_1, \quad (2.34)$$

де $c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$, $j = 2, \dots, n$, $y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$.

Помножимо рівняння (2.34) на a_{i1} і віднімемо з i -го ($i = 2, \dots, n$) рівняння системи (2.33).

У результаті система (2.33) набуде вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = y_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nm}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{array} \right. \quad (2.35)$$

де $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - c_{1j}a_{i1}$, $b_i^{(1)} = b_i - y_1a_{i1}$, $i, j = 2, \dots, n$.

Вираз (2.35) відображає систему лінійних рівнянь після першого ($\kappa=1$) кроку Гауссових виключень.

Далі цей процес застосовується до підматриці $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})$, $i, j = 2, \dots, n$, до виконання $k = n$ кроків.

Формули, які реалізують прямий хід Гаусса, для кроків $k = 1, \dots, n-1$ мають вигляд:

$$c_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad j = k+1, \dots, n, \quad y_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad (2.36)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}c_{kj}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}y_k, \quad i, j = k+1, \dots, n. \quad (2.37)$$

Якщо $k = n$, обчислення відбуваються за формулою:

$$y_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}. \quad (2.38)$$

Після проведення обчислень за формулами (2.36) – (2.38) для $k = 1, \dots, n$ (які складають прямий хід методу Гаусса) система (2.33) набуде вигляду

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \dots & + & c_{1,n-1}x_{n-1} & + & c_{1n}x_n & = & y_1, \\ & & x_2 & + & \dots & + & c_{2,n-1}x_{n-1} & + & c_{2n}x_n & = & y_2, \\ & & & & \dots & & & & \dots & & \dots \\ & & & & & & x_{n-1} & + & c_{n-1,n}x_n & = & y_{n-1}, \\ & & & & & & & & x_n & = & y_n. \end{array} \quad (2.39)$$

У матричному вигляді систему (2.39) можна записати

$$C\bar{x} = \bar{y}, \quad (2.40)$$

де C – матриця трикутного вигляду з головною діагоналлю, що складається з одиничних елементів.

Таким чином, внаслідок застосування методу Гаусса система лінійних рівнянь (2.32) перетворена до системи (2.40).

Розв’язок системи (2.40) з трикутною матрицею може бути знайдено безпосередньо (методом послідовного виключення невідомих у порядку x_n, x_{n-1}, \dots, x_1):

$$x_n = y_n, \quad x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j, \quad i = n-1, \dots, 1. \quad (2.41)$$

Обчислення за формулами (2.41) складають зворотний хід методу Гаусса.

Описана схема називається ще схемою Гаусса єдиного ділення.

Елементи $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ називаються головними елементами.

Матрицю C з системи (2.40) можна розглядати як матрицю $U^{(K)}$, яка використовується в узагальненому методі Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду. Елементи $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ утворюють головну діагональ діагональної матриці $B^{(K)}$.

Висновки за розділом 2

У цьому розділі здійснено вибір та обґрунтування методу розв’язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах, наведені всі розрахункові формули.

Розглянуто шляхи підвищення ефективності розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах. До них відносяться використання топологічних властивостей графа мережі і спеціальний спосіб вибору залежних та незалежних змінних в процесі оптимізації.

Для розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах розглянуто застосування узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду.

Як допоміжний метод при реалізації узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду розглянуто метод Гаусса послідовного виключення невідомих.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Універсальна мова програмування Turbo Pascal

Turbo Pascal є однією з найбільш відомих інтегрованих серед програмування (IDE), яка була популярна в 1980–1990-х роках. Вона була розроблена компанією Borland на основі Pascal, створеного Ніклаусом Віртом. Turbo Pascal здобула популярність завдяки своїй швидкості, ефективності та доступності. Її особливістю була інтеграція редактора коду та компілятора в одному середовищі, що значно спростило процес розробки програм. Завдяки цьому IDE стала першопрохідцем у своїй сфері, впроваджуючи підхід "все-в-одному" для розробників.

Turbo Pascal – це універсальна та потужна мова програмування, яка широко застосовувалася для створення прикладних програм, навчальних розробок та наукових обчислень. Її основними перевагами є простота у використанні, висока швидкість виконання коду, структурований підхід до програмування та наявність інтегрованого середовища розробки.

В рамках цього проєкту мова Turbo Pascal була обрана для програмної реалізації методів оцінювання стану моделі СПР в інженерних мережах. Вибір пояснюється кількома ключовими факторами:

- оптимізація обчислень;
- зручність розробки;
- модульна структура.

Turbo Pascal дозволяє виконувати складні математичні операції з високою швидкістю завдяки своєму ефективному компілятору. Це критично важливо для роботи з великими масивами даних та проведення багатокрокових ітераційних розрахунків.

Інтегроване середовище Turbo Pascal 7.0 забезпечує зручний текстовий редактор, автоматизацію процесів компіляції та налагодження, що значно полегшує розробку програмного забезпечення.

Turbo Pascal підтримує модульність, що дозволяє розділяти програму на окремі компоненти. Це спрощує процес розробки, тестування та подальшого обслуговування програмного продукту.

У розробленому пакеті прикладних програм було реалізовано наступні функціональні можливості:

- математичні обчислення;
- експорт даних.

Реалізований алгоритм оцінювання стану інженерних мереж базується на математичних моделях, які відображають математичний опис графа мережі, основні постулати інженерних мереж, а також враховують залежності для ділянок трубопроводу різних класів інженерних мереж. Програма проводить автоматичні розрахунки на основі введених даних.

Можливість експорту даних полягає в тому, що програма дозволяє зберігати результати обчислень у зовнішніх текстових файлах для їх подальшого аналізу.

Додатково в розробці було враховано специфіку роботи в операційному середовищі Windows 7, що включає використання сумісних драйверів для графічного режиму та забезпечення чіткого, та стабільного виконання програмного коду.

Turbo Pascal дозволив реалізувати алгоритми, необхідні для аналізу сталого поточкорозподілу (СПР), ефективно і з мінімальними ресурсними витратами.

Таким чином, Turbo Pascal залишається важливим інструментом у сфері розробки, завдяки своїй історичній значимості та внеску в обчислювальну техніку. Навіть сьогодні її підхід надихає розробників створювати ефективні та компактні рішення. Вибір цієї мови програмування для задачі оцінювання стану моделі СПР обґрунтований її надійністю, ефективністю та легкістю інтеграції в існуючі системи.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу

3.2.1 Алгоритм розв'язання задачі оцінювання стану моделі УПР узагальненим методом Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду

Розглянемо алгоритм розв'язання задачі оцінювання стану моделі УПР узагальненим методом Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду.

Крок 1. Початок.

Крок 2. Обираємо початкове наближення змінних P_j , $j \in L \cup N$.

Крок 3. Визначаємо значення залежних змінних q_i , $i \in M \cup L \cup N$ відповідно виразам (2.8), (2.9),

Крок 4. Визначаємо значення цільової функції (2.1).

Крок 5. Згідно виразам (2.23) – (2.27) обчислюємо значення перших умовних похідних від цільової функції за незалежними змінними $\frac{\delta y}{\delta P_j}$, $j \in L \cup N$.

Крок 6. Згідно виразам (2.28) – (2.31) визначаємо елементи матриці S других умовних похідних функцій цілі по незалежним змінним $\frac{\delta^2 y}{\delta P_i \delta P_j}$, $i, j \in L \cup N$.

Крок 7. Перевіряємо виконання необхідних умов точки мінімуму функції y :

$$\max_{j \in L \cup N} \left| \frac{\delta y}{\delta P_j} \right| < \delta, \quad (3.1)$$

де δ – деяка попередньо задана точність.

Враховуючи специфічні властивості функції цілі (2.1), мінімізація функції y виконується до тих пір, поки не виконається наступне співвідношення:

$$\max_{j \in L \cup N} |\Delta P_j| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Величина ε вибирається з технологічних міркувань.

Крок 8. Для перевірки достатніх умов точки мінімуму, а також для вибору напрямку кроку ΔP_j , $j \in L \cup N$ у випадку не виконання необхідних і достатніх умов точки мінімуму приводимо матрицю других похідних $S^{(K)}$ до діагонального виду, використовуючи процедуру Гауссових виключень. Отримаємо матрицю перетворень $U^{(K)}$ і діагональну матрицю $B^{(K)}$ з головних елементів в процесі перетворень. Аналізуємо значення елементів головної діагоналі матриці $B^{(K)}$. Якщо всі елементи головної діагоналі додатні, тоді матриця других умовних похідних $S^{(K)}$ додатно визначена, що відповідає виконанню достатніх умов точки мінімуму.

Крок 9. Якщо одночасно виконується співвідношення (3.1) або (3.2), і матриця других умовних похідних додатно визначена, то процес мінімізації закінчується, тобто переходимо до кроку 13. Інакше переходимо до кроку 10.

Крок 10. Обираємо напрямок кроку ΔP_j , $j \in L \cup N$. Значення $\left(\frac{dy}{d\bar{\xi}_j} \right)^{(K)}$ отримаємо з виразу (2.16),

$$\left(\frac{d^2 y}{d\bar{\xi}^2} \right)^{(K)} = B^{(K)}.$$

Аналізуючи значення перших і других похідних $\frac{dy}{d\bar{\xi}_j}$, $\frac{d^2 y}{d\bar{\xi}_j^2}$, $j \in L \cup N$, і використовуючи співвідношення (2.17) – (2.21), обираємо величину $\Delta \bar{\xi}_j$,

$j \in L \cup N$. У відповідності з виразом (2.22) отримаємо напрямок кроку $\Delta P_j^{(k)}$, $j \in L \cup N$.

Крок 11. Визначимо параметр $\lambda^{(k)}$, регулюючий величину кроку на k -ій ітерації, мінімізуючи $y(\lambda^{(k)})$ методом дихотомії. Одновимірною оптимізацією виконується до тих пір, поки не виконається умова

$$\max_{j \in L \cup N} (P_j^{K,r,2} - P_j^{K,r,1}) < \varepsilon,$$

де $P_j^{K,r,2}$, $P_j^{K,r,1}$ – значення верхньої і нижньої границі інтервалу невизначеності для змінної P_j на k -ій ітерації після r етапів одновимірної оптимізації.

Крок 12. Використовуючи (2.11), визначаємо значення незалежних змінних P_j , $j \in L \cup N$ на $(k+1)$ -му кроці, і переходимо до кроку 3.

Крок 13. Кінець.

3.2.2 Алгоритм методу дихотомії

Розглянемо найпростіший одновимірний метод безумовної оптимізації – метод дихотомії. Цей метод є методом прямого пошуку. У ньому при пошуку екстремуму цільової функції використовуються тільки обчислені значення цільової функції.

Нехай $y(x)$ є функція. Необхідно знайти x , що доставляє мінімум (або максимум) функції $y(x)$ на інтервалі $[a, b]$ з заданою точністю ε , тобто знайти

$$x = \arg \min y(x), \bar{x} \in [a, b].$$

Алгоритм методу дихотомії містить наступні етапи.

Крок 1. Вводимо значення a , b .

Крок 2. Вважаємо $k = 0$, $a_k = a$, $b_k = b$.

Крок 3. Визначаємо $\tilde{x}^{(k)} = (a_k + b_k) / 2$; $x_1^{(k)} = \tilde{x}^{(k)} - \varepsilon / 2$; $x_2^{(k)} = \tilde{x}^{(k)} + \varepsilon / 2$.

Крок 4. Обчислюємо $y = (x_1^{(k)})$ і $y = (x_2^{(k)})$.

Крок 5. Порівнюємо $y = (x_1^{(k)})$ і $y = (x_2^{(k)})$:

– якщо $y(x_1^{(k)}) \geq y(x_2^{(k)})$, то вважаємо $a_{k+1} = \tilde{x}^{(k)}$, $b_{k+1} = b_k$;

– якщо $y(x_1^{(k)}) < y(x_2^{(k)})$, то вважаємо $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \tilde{x}^{(k)}$.

Крок 6. Перевіряємо виконання умови $|b_{k+1} - a_{k+1}| \leq \varepsilon$. Якщо умова не виконується, то вважаємо $k = k + 1$ і переходимо до кроку 3, інакше переходимо до кроку 7.

Крок 7. Вважаємо $x^* = (a_{k+1} + b_{k+1}) / 2$.

Крок 8. Виводимо x^* .

3.3 Опис програми

Розроблений метод розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР в ІМ програмно реалізований у вигляді пакета прикладних програм на мові Turbo Pascal в операційному середовищі Windows 7.

До складу пакету прикладних програм входять такі процедури: PZAK, WZAK, FCELI, PR1Y, PR2Y, GAUSS.

Процедура PZAK застосовується для обчислення значень залежних змінних q_i , $i \in L \cup N$ (витрат в гілках дерева графа мережі) відповідно до першого закону Кірхгофа.

Процедура WZAK застосовується для обчислення значень залежних змінних q_i , $i \in M$ (витрат в хордах графа мережі) відповідно до другого закону Кірхгофа.

Процедура FCELI застосовується для обчислення значень функцій цілі.

Процедура PR1Y застосовується для обчислення перших умовних похідних $\frac{\delta y}{\delta P_j}$, $j \in L \cup N$ від функції цілі за незалежними змінними.

Процедура PR2Y застосовується для формування матриці S других умовних похідних $\frac{\delta^2 y}{\delta P_i \delta P_j}$, $i, j \in L \cup N$ від функції цілі за незалежним змінним.

Процедура GAUSS застосовується для приведення матриці других похідних S до діагонального виду за допомогою процедури Гауссових послідовних виключень. Внаслідок отримуємо матрицю перетворень U і діагональну матрицю B з головних елементів в процесі перетворень.

Для розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР необхідна інформація про структуру ІМ, значення гідравлічних опорів ділянок трубопроводу ІМ, вимірювання значень режимних параметрів на входах і виходах мережі і їх дисперсіях.

У зв'язку з цим, початковими даними для пакета прикладних програм є:

а) для ділянок трубопроводу:

- 1) номер вузла, що відповідає початку дуги графа мережі;
- 2) номер вузла, що відповідає кінцю дуги графа мережі;
- 3) довжина ділянки трубопроводу;
- 4) внутрішній діаметр ділянки трубопроводу;

б) для фіктивних ділянок графа мережі:

- 1) номер вузла, що відповідає початку дуги;
- 2) номер вузла, що відповідає кінцю дуги;

в) для вузлів, що відповідають входам і виходам мережі:

- 1) номер вузла, що відповідає входу або виходу мережі;
- 2) вимірювання значення тиску;
- 3) дисперсія тиску;
- 4) вимірювання значення витрати;
- 5) дисперсія витрати.

Завдання інформації про структуру мережі у вигляді вузлових пар дозволяє побудувати граф мережі, вибрати дерево графа мережі і сформувати цикломатричну матрицю програмно. Розрахунок гідравлічних опорів для ділянок трубопроводу здійснюється за заданими значеннями довжин і внутрішніх діаметрів ділянок трубопроводу.

Для фіктивних дуг, що відповідають входам мережі, номер початку дуги задається рівним нулю, а для фіктивних дуг, що відповідають виходам мережі, задається рівним нулю номер кінця дуги.

Особливістю організації введення початкових даних є автоматичний підрахунок числа ділянок трубопроводу, фіктивних ділянок, відповідних входам і виходам мережі. Також автоматично формуються масиви початкових даних відповідної розмірності.

При введенні даних про вимірювання значень режимних параметрів на входах і виходах мережі формуються масиви номерів вузлів з заданими значеннями витрат і тисків, а також масиви їх значень і значень дисперсій.

Така організація введення початкових даних дозволяє оперативну зміну інформації про структуру мережі, склад вимірювань і про значення вимірювань режимних параметрів на входах і виходах мережі.

Початкові дані вводяться з текстового файлу.

Результатами розрахунку є:

- а) для ділянок трубопроводу – оцінки значень витрат;
- б) для фіктивних дуг, що відповідають входам і виходам мережі:
 - 1) оцінки значень тиску;
 - 2) оцінки значень витрати.

Результати розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР надаються у табличному вигляді.

Лістинг програми наведено у Додатку А.

Для ефективної роботи програмного продукту необхідно забезпечити як мінімальні, так і рекомендовані системні параметри, що гарантують стабільну роботу програми навіть у режимі підвищеного навантаження.

Для роботи даного програмного продукту необхідно виконання деяких програмних та апаратних вимог:

а) операційна система Windows 7 (32-bit або 64-bit). Ця ОС обрана за її стабільність, низькі системні вимоги та широке розповсюдження в період створення програмного забезпечення;

б) середовище розробки - Turbo Pascal 7.0. Для роботи необхідно мати повноцінно налаштоване інтегроване середовище розробки, що включає редактор коду, компілятор та налагоджувач;

в) процесор Intel (R) Core (TM) i3 із тактовою частотою 2,1 ГГц або вищий. Він забезпечує достатню продуктивність для виконання складних обчислень та роботи з графічними режимами;

г) оперативна пам'ять 2 ГБ, як мінімум. Цей об'єм пам'яті дозволяє безперебійно працювати програмі навіть за умови одночасного виконання інших завдань у системі;

г) жорсткий диск 1,5 МБ вільного місця на HDD. Простір використовується для встановлення програми, зберігання тимчасових файлів, результатів обчислень та журналу роботи;

д) екран з мінімальною роздільною здатністю 640x480 пікселів, що відповідає стандартним вимогам Turbo Pascal для відображення графічної інформації.

До додаткових вимог можна віднести такі:

- доступ до принтера для друку звітів (опційно);
- стабільне джерело живлення для забезпечення тривалої роботи без переривань.

Розроблений програмний продукт є компактним, невибагливим до ресурсів і може бути використаний як на сучасних, так і на застарілих системах, які відповідають зазначеним вимогам. Оптимізація алгоритмів дозволяє забезпечити стабільність і високу швидкість роботи програми навіть на мінімальних апаратних конфігураціях.

Висновки за розділом 3

У цьому розділі було розглянуто програмну реалізацію розробленого методу розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР в інженерних мережах. Розроблений метод розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР в ІМ програмно реалізований у вигляді пакета прикладних програм на мові Turbo Pascal в операційному середовищі Windows 7.

Розглянуто опис та основні характеристики універсальної мови програмування Turbo Pascal.

Розроблено алгоритм, що реалізовує узагальнений метод Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду. Розглянуто алгоритм методу дихотомії.

Розглянуто опис програми, що реалізує алгоритм розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах, сформовано перелік процедур, опис початкових даних та результатів розрахунку. Розглянуто деякі програмні та апаратні вимоги, які необхідно виконати для роботи даного програмного продукту.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Задача оцінювання стану моделі СПР розв'язувалася для ділянки водопровідної мережі, граф якої наведено на рис. 4.1.

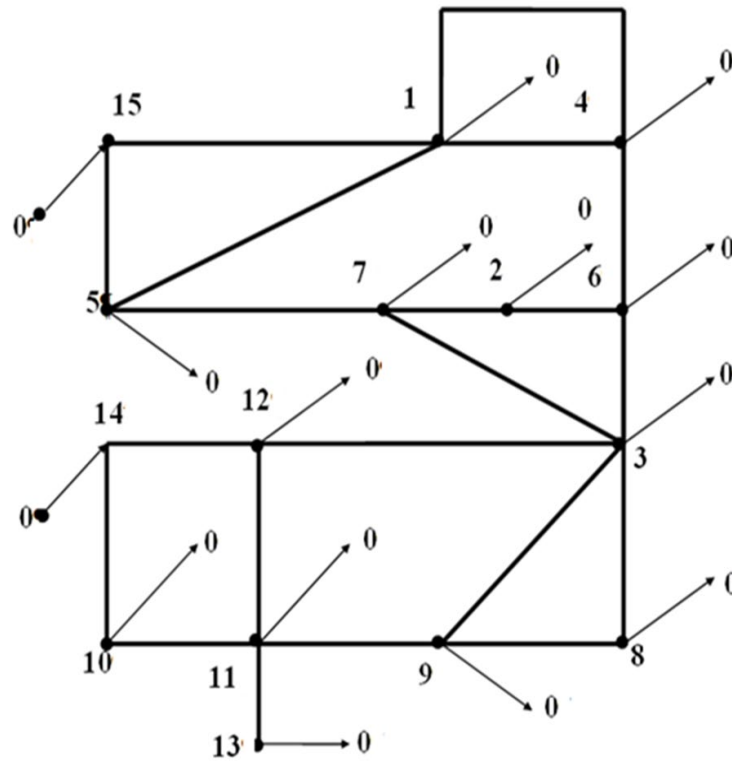


Рисунок 4.1 – Граф ділянки водопровідної мережі

Кожен вузол графа мережі є або входом, або виходом мережі. Кожна дуга графа мережі відповідає реальній ділянці водопровідної мережі, тобто ділянці трубопроводу.

Граф мережі містить 15 вузлів, два з яких є входами мережі (вузли 14 і 15), а решта – виходами, і 21 дугу, кожна з якої відповідає ділянці трубопроводу.

У таблиці 4.1 наведені довжини і внутрішні діаметри ділянок трубопроводу водопровідної мережі.

Таблиця 4.1 – Параметри ділянок трубопроводу мережі

№ п/ц	Вузлова пара	Довжина (км)	Діаметр (м)
1	14-12	0,244	0,500
2	14-10	1,537	0,500
3	10-11	0,392	0,500
4	12-11	0,892	0,500
5	11-13	0,600	0,300
6	11-9	0,736	0,500
7	12-3	1,255	0,500
8	3-9	1,133	0,200
9	9-8	0,925	0,500
10	8-3	0,988	0,500
11	3-6	0,551	0,500
12	7-3	0,468	0,500
13	7-2	0,389	0,500
14	2-6	0,472	0,400
15	6-4	1,405	0,400
16	5-7	0,619	0,500
17	15-1	1,430	0,600
18	15-5	0,976	0,700
19	5-1	1,239	0,400
20	1-4	2,561	0,300
21	1-4	0,847	0,500

Для водопровідних мереж значення коефіцієнта нелінійної $\chi = 2$, а показник ступеня при значеннях тисків $\alpha = 1$. Модель СПР для ділянки трубопроводу має вигляд:

$$P_{iH} - P_{iK} = c_i q_i |q_i|, i \in M.$$

Гідрравлічний опір ділянки трубопроводу c_i , $i \in M$ обчислюється за формулою:

$$c_i = 0,001736 \frac{l_i}{d_i^{5,3}}, i \in M,$$

де l_i – довжина i -ої ділянки трубопроводу;

d_i – внутрішній діаметр i -ої ділянки трубопроводу.

Розв'язання задачі оцінювання стану для даної ділянки водопровідної мережі здійснювалося при повному складі вимірювань, тобто $n_p = n_q = 15$, де n_p , n_q – кількість вимірювань тисків та витрат, відповідно. Початковими даними були вимірювання значень тисків \tilde{P}_i , $i \in L \cup N$ і витрат \tilde{q}_j , $j \in L \cup N$ на всіх входах і виходах мережі, а також значення дисперсії цих величин.

У таблиці 4.2 наведено початкові дані для розв'язання задачі оцінювання моделі сталого поточкорозподілу (СПР) мережі. Результати її розв'язання у вигляді оцінок значень тисків на всіх входах і виходах мережі P_i , $i \in L \cup N$ і витрат за всіма дугами графа мережі q_i , $i \in M \cup L \cup N$ наведено у таблицях 4.3, 4.4.

Таблиця 4.2 – Початкові дані для розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР

Вузлова пара	Вимірювання значень тисків	Дисперсії тисків	Вимірювання значень витрат	Дисперсії витрат
0-14	76,66	0,598	0,9263	$0,846 \cdot 10^{-4}$
0-15	71,60	0,522	0,7522	$0,562 \cdot 10^{-4}$
10-0	69,22	0,476	0,1190	$0,144 \cdot 10^{-5}$
11-0	68,29	0,465	0,0997	$0,100 \cdot 10^{-5}$
12-0	71,80	0,511	0,1421	$0,196 \cdot 10^{-5}$

Кінець таблиці 4.2

Вузлова пара	Вимірювання значень тисків	Дисперсії тисків	Вимірювання значень витрат	Дисперсії витрат
13-0	57,53	0,325	0,1489	$0,225 \cdot 10^{-5}$
9-0	68,15	0,447	0,1186	$0,144 \cdot 10^{-5}$
8-0	66,68	0,445	0,1509	$0,225 \cdot 10^{-5}$
3-0	65,92	0,451	0,1099	$0,121 \cdot 10^{-5}$
7-0	66,79	0,452	0,1394	$0,196 \cdot 10^{-5}$
2-0	66,90	0,449	0,0990	$0,100 \cdot 10^{-5}$
6-0	66,72	0,449	0,1198	$0,144 \cdot 10^{-5}$
5-0	70,90	0,489	0,1401	$0,196 \cdot 10^{-5}$
1-0	69,80	0,481	0,1577	$0,256 \cdot 10^{-5}$
4-0	67,77	0,463	0,1181	$0,144 \cdot 10^{-5}$

Таблиця 4.3 – Оцінки значень тисків на входах і виходах мережі

Номер дуги	Вузлова пара	Оцінки значень тисків	Номер дуги	Вузлова пара	Оцінки значень тисків
1	0-14	77,29	9	3-0	67,20
2	0-15	72,23	10	7-0	67,24
3	10-0	69,00	11	2-0	67,04
4	11-0	68,24	12	6-0	67,05
5	12-0	71,49	13	5-0	69,96
6	13-0	57,21	14	1-0	69,35
7	9-0	66,90	15	4-0	68,09
8	8-0	66,69		-	-

Таблиця 4.4 – Оцінки значень витрат

Номер дуги	Вузлова пара	Оцінки значень витрат	Номер дуги	Вузлова пара	Оцінки значень витрат
1	0-14	0,9184	19	12-11	0,2436
2	0-15	0,7464	20	11-13	0,1488
3	10-0	0,1191	21	11-9	0,1724
4	11-0	0,0997	22	12-3	0,2362
5	12-0	0,1422	23	3-9	0,0063
6	13-0	0,1488	24	9-8	0,0601
7	9-0	0,1187	25	8-3	-0,0901
8	8-0	0,1511	26	3-6	0,0664
9	3-0	0,1100	27	7-3	0,0375
10	7-0	0,1396	28	7-2	0,0906
11	2-0	0,0991	29	2-6	-0,0085
12	6-0	0,1200	30	6-4	-0,0622
13	5-0	0,1402	31	5-7	0,2677
14	1-0	0,1579	32	15-1	0,2879
15	4-0	0,1182	33	15-5	0,4585
16	14-12	0,6220	34	5-1	0,0505
17	14-10	0,6220	35	1-4	0,0244
18	10-11	0,1773	36	1-4	0,1560

При реалізації узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду як початкове наближення для незалежних змінних, $P_i, i \in L \cup N$ приймалися вимірювання значень тиску на входах і виходах мережі. Розв'язок задачі оцінювання стану для даної ділянки водопровідної мережі було отримано за 39 ітерацій. Значення функції цілі приймало значення від 508333,83 в точці початкового наближення до 13,79 в точці мінімуму.

На кожній ітерації узагальненого методу Ньютона для визначення пара-

метра $\lambda^{(k)}$ розв'язувалася задача одновимірної оптимізації. Використовувався метод дихотомії.

Пошук точки мінімуму здійснювався на відрізку $[0,1]$ при заданій точності $\varepsilon = 0,02$. Для знаходження точки мінімуму було потрібно 8 ітерацій.

При реалізації узагальненого методу Ньютона використовувався критерій по збільшенню незалежних змінних (3.2), тобто по збільшенню тиску. На кожній ітерації контролювалося виконання умови: $|P_j^{(k+1)} - P_j^{(k)}| \leq \delta$, де δ приймалася рівною 0,01. Критерію по виконанню необхідних умов точки мінімуму (3.1) досягти не вдалося.

Досліджено характер функції цілі на основі аналізу елементів діагональної матриці $B^{(k)}$, отриманої на кожній ітерації розв'язання задачі оцінювання стану при використанні узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду. Аналіз результатів показав, що функція цілі (2.10) відносно незалежних змінних $P_i, i \in L \cup N$ є багатоекстремальною. На основі аналізу значень діагональних елементів можна отримати уявлення про конфігурацію ліній рівня цільової функції. Значення діагональних елементів матриці B на деяких певних ітераціях приведені в таблиці 4.5.

Таблиця 4.5 – Значення елементів діагональної матриці $B^{(k)}$ в залежності від номеру ітерації

Номер- дуги	Вузлова пара	Номер ітерації			
		1	15	29	39
1	0-14	4840	6404	4142	3506
2	0-15	78880	16270	11090	13240
3	10-0	22020	335100	63200	49530
4	11-0	526100	71460000	29950	21940
5	12-0	1054	11990	3543	2579
6	13-0	32,24	80,05	52,07	51,09

Кінець таблиці 4.5

7	9-0	-4954	889500	143800	37570
8	8-0	-43010	31450	12160	20990
9	3-0	126900	55090000	502800	302900
10	7-0	-391300	40830000	294700	246600
11	2-0	-10280	533700	-677500000	1695000
12	6-0	10630	7156	2560	2061
13	5-0	10530	15900	10260	9437
14	1-0	4816	13130	6284	3271
15	4-0	64,74	-162,8	464,9	50,03

Висновки за розділом 4

У даному розділі було розглянуто приклад розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР для ділянки водопровідної мережі, наведено результати розрахунків.

Проведено дослідження характеру функції цілі на основі аналізу елементів діагональної матриці, отриманої на кожній ітерації розв'язання задачі оцінювання стану ділянки водопровідної мережі при використанні узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду.

Аналіз результатів обчислювального експерименту дозволив підтвердити працездатність розробленого алгоритму розв'язання задачі оцінювання стану моделі СПР.

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена розв'язанню задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах. Тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

У кваліфікаційній роботі було розглянуто застосування узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду для розв'язання задачі оцінювання стану.

Проведено огляд основ моделювання режимів сталого поточкорозподілу в інженерних мережах.

Наведено змістовну та математичну постановки задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу в інженерних мережах. Показано, що формальна постановка призводить до задачі умовної оптимізації.

Проаналізовано способи підвищення ефективності розв'язання задачі оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу. Показано, що використання топологічних властивостей графа мережі і спосіб вибору незалежних змінних дозволили звести сформульовану задачу умовної оптимізації до задачі безумовної оптимізації.

Розглянуто застосування узагальненого методу Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду для розв'язання задачі оцінювання стану.

Розроблено алгоритм, що реалізовує узагальнений метод Ньютона з приведенням матриці Гессе до діагонального вигляду.

Здійснено програмну реалізацію розробленого алгоритму.

Наведено результати обчислювального експерименту.

Результати роботи можна застосовувати при управлінні режимами функціонування реальних інженерних мереж, при їх реконструкції, в практиці диспетчерського обліку і контролю, а також при розв'язанні оптимізаційних задач на реальних інженерних мережах, коли необхідно знати повний поточкорозподіл в мережі.

Сучасні засоби контролю і відображення інформації не забезпечують можливості вимірювання всіх режимних параметрів, які характеризують поточкорозподіл в інженерних мережах. Є можливість вимірювання лише значень тисків і витрат на входах і виходах мереж. У зв'язку з цим виникає необхідність у використанні замість фактичних режимів розрахункових. Але вимірювання значень режимних параметрів здійснюються з випадковими помилками. Тому виникає необхідність при розв'язанні режимних задач на реальних об'єктах користуватися задачею оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу, розв'язання якої дозволяє отримувати повний поточкорозподіл мережі з урахуванням випадкових помилок вимірювання.

Таким чином, задача оцінювання стану моделі сталого поточкорозподілу має практичну цінність. Впровадження її на реальних об'єктах дозволяє підвищити точність розв'язання режимних задач.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Козиренко С. І., Момот В. М. Підвищення ефективності розв'язання задачі оцінювання стану інженерних мереж складної структури. *Світ наукових досліджень. Випуск 35* : матеріали міжнародної мультидисциплінарної наукової інтернет – конференції (м. Тернопіль, Україна, м. Ополе, Польща, 20-21 листопада 2024 р.), 2024. С. 249–251.
2. Евдокимов А. Г. Оптимальные задачи на инженерных сетях. Харьков : Вища школа, 1976. 153 с.
3. Комп'ютерна дискретна математика : навч. посіб. / Бондаренко М. Ф. та ін. Харків : «Компанія СМІТ», 2004. 480 с.
4. Евдокимов А. Г., Тевяшев А. Д. Оперативное управление потокораспределением в инженерных сетях. Харьков : Вища школа, 1980. 144 с.
5. Козиренко С. І., Ільницький В. Б. Ідентифікація стану моделі сталого потокорозподілу у інженерних мережах. *Інноваційні технології в науці та освіті. Європейський досвід* : зб. матеріалів конференції (м. Дніпро, 29 листопада 2022 р.). Дніпро : Журфонд, 2022. С. 169–172.
6. Тевяшев А. Д., Шаповалов А. Л. Наблюдаемость и идентифицируемость инженерных сетей. *Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. № 64*. Харьков : Вища школа, 1982. С. 31–37.
7. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : навч. посіб. Ч. 1. 1993. 320 с.
8. Bard Yonathan. *Nonlinear Parameter Estimation*. Academic Press, 1974. 341 p.
9. Медведєв М. Г., Пащенко І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. пос. Київ : Ліра-К, 2008. 536 с.
10. Евдокимов А. Г. Минимизация функций. Харьков : Вища школа, 1977. 159 с.
11. Евдокимов А. Г., Федоров Н. В., Козыренко С. И. Эффективный алгоритм идентификации состояния модели установившегося потокораспределения в инженерных сетях. *АСУ и приборы автоматики*. Харьков : Вища школа,

1986. С. 3–9.

12. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації : навч. посіб. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 608 с.

13. David M. Himmelblau. Applied nonlinear programming. McGraw – Hill Book Company, 1972. 534 p.

14. Anthony V. Fiacco, Garth P. McCormick. Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques. John Wiley and Sons, Inc. 1968. 240 p.

15. Гаврилюк І. Л., Макаров В. Л. Методи обчислень : Підручник. Ч.1. Київ : Вища школа, 1995. 367 с.