

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ ЛАЗЕРОВ

Ю.П.Мачехин, В.А.Одинец (ГНПО "Метрология", Харьков)

Рассмотрен метод вычисления фрактальной размерности временных рядов. Приведены результаты вычисления размерности для численно смоделированных случайных рядов и для рядов измерений относительной нестабильности частоты излучения лазеров.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие геометрических методов анализа физических объектов и процессов и введенное Мандельбротом понятие случайных фракталов оказались стимулирующими для применения концепции фракталов в исследованиях случайных процессов. Эти идеи позволили значительно шире представить фрактальность естественных процессов и рассматривать ее в статистическом смысле, в отличие от фрактальности динамического хаоса (ДХ), структура которой построена в соответствии с детерминированным законом изменения характерных масштабов.

Случайные фракталы в последние годы стали широко применяться при компьютерном моделировании случайных геометрических объектов [1] и анализе случайных процессов [2]. В последнем случае количественная характеристика фрактальности – фрактальная размерность (ФР) – выступает как одна из характеристик случайного процесса.

Практический интерес представляет использование ФР как принципиально нового параметра случайного процесса, который, по видимому, характеризует в общем случае не только стационарные, но и нестационарные случайные процессы.

Цель настоящей работы – исследование временных рядов измерений нестабильности частоты лазеров с применением фрактального анализа и выявление зависимости между ФР и свойствами наблюдаемого случайного процесса. Основным методом решения этой задачи является использование одного из самых универсальных и простых методов – R/S метода Херста, который развил в своих работах Мандельброт. Ниже будет подробно описан как сам R/S метод Херста, так и результаты его применения при вычислении ФР моделируемых случайных процессов и измеренной нестабильности частоты лазеров.

2. МЕТОД РАСЧЕТА ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Все существующие в настоящее время методы определения и расчета ФР опираются на представление динамики поведения исследуемой системы в некотором конечномерном фазовом пространстве, определение размерности которого представляет самостоятельную задачу.

Для фрактальных множеств введено несколько определений ФР, от которых зависит сам метод вычисления ФР.

Ограниченное фрактальное множество является самоподобным в P -мерном пространстве, если при преобразовании точки $x = (x_1 \dots x_p)$ в точку $x = (rx_1 \dots rx_p)$ используется один и тот же коэффициент подобия r для всех координат. Кроме самоподобных множеств есть и другие, представляющие большой практический интерес. В частности, если преобразование переводит точку $x = (x_1 \dots x_p)$ в точку $x = (r_1 x_1 \dots r_p x_p)$, где не все коэффициенты подобия r одинаковы, то такое преобразование является аффинным, а множество, к которому применимо такое преобразование, самоаффинным. К самоаффинным множествам относятся, в первую очередь, временные ряды измерений, когда регистрируются измеряемая величина и время. В общем случае они являются разными физическими величинами и не имеют одинаковых коэффициентов подобия. Примером самоаффинного множества является броуновское движение, когда определена зависимость между перемещением частицы и временем.

В том случае, когда поведение системы описывается самоподобным фрактальным множеством, вводится гомотетическая размерность

$$D_S = \ln(N) / \ln(1/r).$$

Здесь N – количество отдельных подмножеств; r – коэффициент подобия.

Если самоаффинное множество является фрактальным, то расчет ФР этого множества необходимо осуществлять, используя его характерные особенности. В настоящей работе был применен метод определения ФР случайных фрактальных множеств, разработанный Мандельбротом и Уоллисом [3] для самоаффинных множеств на основе эмпирической закономерности, обнаруженной Херстом [4].

Суть этого метода заключается в следующем. В общем случае для любого временного ряда можно построить функцию приращения

$$X(n, N) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_N),$$

где x_i — элементы временного ряда; x_N — среднее значение, вычисленное по всему ряду длиной N ; n — текущее значение номера элемента ряда, до которого выполняется суммирование. Фрактальные свойства и размерность определяются именно для этой функции приращения. Однако, имеющаяся связь между функцией приращения и исходным временным рядом позволяет говорить о ФР функции приращения как о параметре, характеризующем исходное случайное множество. Поэтому в дальнейшем в настоящей работе ФР будет рассматриваться как характеристика случайного временного ряда. Особенность функции приращения заключается в том, что при изменении n в интервале от 1 до N она принимает одно максимальное и одно минимальное значения. Если определить разность между максимальным и минимальным значениями этой функции

$$R = \max X(n_1, N) - \min X(n_2, N)$$

и отнести ее к дисперсии, вычисленной по значениям исходного временного ряда

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - x_N)^2},$$

то функция R/S зависит от длины N временного ряда следующим образом: $R/S = (N)^H$. Здесь H — параметр, который в зависимости от фрактальной структуры исходного множества может принимать значения в интервале от 0 до 1. В литературе этот параметр называется параметром Херста. В свою очередь, фрактальная размерность D самоаффинных множеств определяется через параметр Херста простым соотношением [5] $D = 2 - H$. Таким образом, расчет ФР сводится к построению в двойном логарифмическом масштабе графика зависимости R/S от N и определению тангенса наклона прямой H .

Практически построение графика для временного ряда длиной N осуществляется следующим образом. Сначала вычисляется R/S для всего ряда, затем ряд делится пополам и вычисляется R/S для двух рядов длиной $N/2$, причем, берется их среднее значение. В дальнейшем ряды последовательно делятся пополам и вычисляется среднее значение R/S , которое ставится в соответствие длине ряда $N/2^k$. Очевидно, что этот метод вычисления ФР (в дальнейшем для простоты будем называть его R/S метод) должен работать и тогда, когда ФР вырождается и становится равной топологической размерности. В частности, R/S метод должен позволять вычислять топологическую размерность прямой или гладкой линии ($D = 1$) и размерность плоскости ($D = 2$).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ ЧИСЛЕННО СМОДЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

С помощью R/S метода можно аналитически вычислить размерность прямой гладкой линии и плоскости. Зададим прямую уравнением $x_n = An$, n изменяется в интервале от 1 до N . Несложные вычисления показывают, что в рамках R , вычисленный для функции приращения, равен

$$R = \frac{A}{8} \cdot N^2,$$

а дисперсия S равна

$$S = \frac{A}{2\sqrt{3}} \sqrt{N \cdot (N+1)}.$$

Для зависимости R/S от N получим следующее выражение:

$$\ln(R/S) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \ln(N) + \ln\left(1 - \frac{1}{2N}\right).$$

Из него следует, что для $N \gg 1$ $H = 1$.

Аналогичный результат можно получить для любой гладкой кривой, например, для параболы, гиперболы или для синусоиды с периодом, соизмеримым с N . В последнем случае при условии, что $N \gg 1$,

$$\ln(R/S) = \ln(N) + \ln(1 - 1/2N) - \ln(\pi)$$

и H равно 1.

Таким образом, используемый метод позволяет вычислять топологическую размерность в тех случаях, когда фрактальное множество вырождается в обычное евклидово множество. На рис. 1 приведен график зависимости $\ln(R/S)$ от $\ln(N)$ для линейной и синусоидальной функций (прямая 1), полученной с помощью численных расчетов. При больших N коэффициент наклона графика равен 1. Следовательно, размерность D равна 1 и совпадает с топологической размерностью гладких линий.

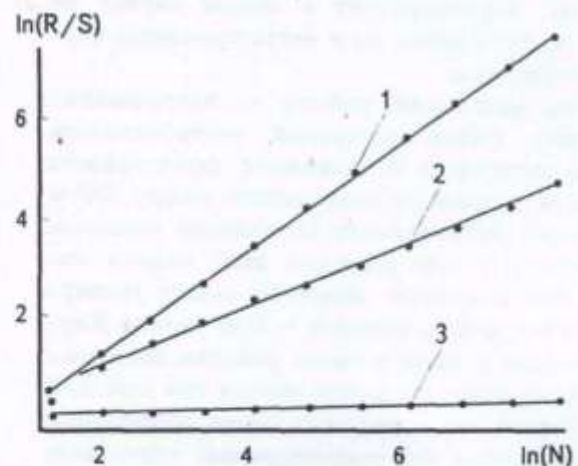


Рис. 1. Значения R/S функции в зависимости от N : 1 — для линейной функции, параболы и синуса; 2 — стандартного гауссова процесса; 3 — двумерной функции. Сплошными линиями показаны аппроксимирующие зависимости

Второй рассмотренный предельный случай соответствует двумерному евклидову пространству, топологическая размерность которого равна 2. Воспользуемся рядом, состоящим из чередующихся значений, т.е.

$$x_i = \begin{cases} a_1 & i - \text{чет.} \\ a_2 & i - \text{нечет.} \end{cases}$$

Геометрически этот ряд можно представить как две параллельные линии, с помощью которых задается плоскость. Для такого ряда размерность вычислена аналитически и получена следующая зависимость функции R/S от N :

$$\ln(R/S) = \ln(1 - 1/2N).$$

График численных расчетов зависимости функции R/S от N для двузначной функции приведен на рис. 1, прямая 3. Из него видно, что для двузначной функции H равно 0 и размерность D равна 2. Таким образом, если считать, что плоскость задана двумя прямыми, то вычисленная размерность равна евклидовой размерности плоскости.

Отсюда следует, что у всех остальных временных рядов, имеющих случайный разброс значений элементов, ФР будет находиться в интервале $1 < D < 2$.

Исследование характеристик временных рядов, для которых $0 < H < 1$, предварительно было проведено со случайными процессами, которые можно численно моделировать. В первую очередь были использованы стандартные алгоритмы, моделирующие гауссов случайный процесс. На рис. 1 представлена зависимость R/S функции от N для гауссова процесса (прямая 2).

Параметр H , определенный по наклону графика, оказался равным 0,504, и, практически, в пределах погрешности, не превышающей 0,002, оставался постоянным для всех реализаций. Таким образом, величина ФР гауссова процесса как самоаффинного множества располагается строго посередине между топологическими размерностями линии и плоскости. Ранее в работах [3-7] было также получено, что у гауссова процесса с независимыми приращениями размерность $D = 1,5$ ($H = 0,5$).

Особый интерес представляет определение ФР случайных временных рядов, построенных по результатам численного моделирования ДХ. Системы, порождающие ДХ: система Лоренца, двумерное отображение Хенона и логистическое уравнение, — уже хорошо исследованы, и для них ФР известны. При этом в работах по исследованию динамического хаоса анализируемые множества рассматривались как самоподобные и для них фактически вычислялась гомотетическая размерность в заданном фазовом пространстве.

В нашем случае временные ряды, полученные в результате численного решения систем, описывающих ДХ, представлялись как самоаффинные, и к ним, для вычисления ФР, соответствующей случайным фракталам, применялся R/S метод. При этом полученные значения ФР существенно отличаются от емкостной и корреляционной размерности [8]. Однако, с точки зрения представления ДХ как самоаффинного множества, которое можно описать случайными фракталами, полученные результаты хорошо физически интерпретируются.

В частности, используя логистическое уравнение $x_{i+1} = K x_i (1 - x_i)$, можно построить, в зависимости от значения параметра K , как периодические, так и случайные временные ряды.

Известно, что качественное изменение динамики отображения, описываемое этим уравнением, начинается со значения $K = 3$. По мере изменения K от 3 до 3,5699 происходит четыре бифуркации удвоения периода [8]. При дальнейшем увеличении K (вплоть до $K = 4$) наблюдается режим ДХ. Таким образом, изменяя параметр K , можно определять ФР как для детерминированных, так и для стохастических процессов. Так, если K не превышает 3,5699, решения этого уравнения представляют собой двух-, четырех- и шести-значные периодические ряды, для которых ФР равна $D = 2$ ($H = 0$). Для стохастических рядов, соответствующих значениям $K > 3,58$, ФР уменьшается и при $K = 4$ становится равной 1,46 ($H = 0,54$).

Этот результат представляет особый интерес, так как из него следует, что возможны ситуации, когда случайные процессы с совершенно различными функциями плотности распределения имеют одинаковые или близкие значения ФР.

Аналогичные исследования были проведены с временным рядом, полученным из решения системы Хенона:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 1 + y_i - ax_i^2; \\ y_{i+1} &= bx_i. \end{aligned}$$

Временной ряд был построен по значениям переменной x . Параметры a и b были выбраны такими, при которых в поведении переменных x и y наблюдается динамический хаос ($a = 1,4$; $b = 0,3$). Для полученных рядов характерным было то, что график R/S имел излом, указывающий на существование двух случайных процессов с разными характерными временами и характерным поведением. Первая прямая, соответствующая меньшим значениям N , характеризуется наклоном $H = 0,29$, а вторая, соответствующая большим значениям N , — $H = 0,54$. Это можно объяснить тем, что при небольших интервалах наблюдения заметное влияние оказывает скачкообразное изменение измеряемой величины, а на больших интервалах эти скачки усредняются и начинают играть роль другие процессы.

При небольшом изменении параметра b ($b = 0,4$) характер R/S функции изменяется, излом сглаживается и H приближается к значению 0,46 для всего графика.

Таким образом, параметр H или D характеризует совершенно другие внутренние особенности случайного процесса – самоподобность изменений на разных масштабах и характер доминирующего случайного процесса (случайные скачки, случайные мелкомасштабные последовательные изменения и т.д.).

Применение R/S метода к модельным случайным процессам, когда есть возможность путем варьирования величины параметров изменять характер случайного процесса, показало, что ФР самоаффинного множества формально можно вычислять всегда. В частности, используя модели ДХ, можно создавать случайные временные ряды, структура которых может быть самоподобной в статистическом смысле, т.е. может быть представлена случайными фракталами.

В рассмотренных случаях параметр H не превышал значений 0,55. Этот результат представляет интерес в том смысле, что временные реализации ДХ, с точки зрения теории случайных фракталов, аналогичны реализациям случайного гауссова процесса. По-видимому, такое близкое совпадение значений фрактальной размерности, рассмотренных реализаций хаоса и случайного гауссова процесса можно связать с такими общими для них характеристиками, как стационарность и эргодичность. Однако, окончательный вывод можно будет сделать только после проведения дополнительных исследований.

При использовании метода R/S функции исследователи заметили, что для природных процессов характерным является увеличение значения H до 0,8–0,9 ($D = 1,1–1,2$) [7]. Поведение систем с такой ФР было названо персистентным, т.е. таким, у которого медленные случайные уходы доминируют над более высокочастотными случайными возмущениями. Поведение систем, для которых характерны значения H меньше 0,5, называется антиперсистентным, и во временном ряду наблюдается доминирование случайных скачков над медленными изменениями исследуемой величины. При этом персистентным процессам свойственно проявление прогнозируемой тенденции в долгосрочном поведении, а антиперсистентным – ее отсутствие.

Таким образом, если в хаотическом поведении исследуемой системы доминируют предсказуемые (в статистическом смысле) процессы, то ФР близка к 1, и такое поведение является персистентным. В то же время, если в хаотическом поведении доминируют скачкообразные изменения исследуемой величины, то такое поведение можно представлять как антиперсистентное, для которого эта размерность близка к 2.

Следуя результатам нашего анализа, можно сформулировать условия предельных случаев персистентного и антиперсистентного поведения. При $H = 1$ наблюдается полностью персистентное поведение, т.е. предсказуемое детерминированное поведение, которое характеризуется евклидовым множеством с топологической размерностью, равной 1. Примерами полностью персистентного множества, как было показано выше, являются прямая и синусоида. При $H = 2$ поведение систем можно рассматривать как полностью антиперсистентное, т.е. в этом случае наблюдаются скачкообразные увеличение и уменьшение значения исследуемой величины. Примером полностью антиперсистентного поведения является исследованная выше двузначная функция.

При расчете ФР необходимо правильно оценивать существование тренда во временных рядах, поскольку его наличие существенным образом может повлиять на корректность вычисления ФР.

Поэтому следующий этап исследования условий применения R/S метода заключался в анализе влияния трендов (как линейных, так и синусоидальных) на характер вычисляемых величин. Из численных экспериментов было получено, что наличие тренда во временном ряду приводит к излому графика зависимости R/S от N . При этом часть графика, соответствующая большим интервалам (т.е. большим N), соизмеримым с характерным временем тренда, имеет $H > 1$, а вторая часть имеет $H < 1$ и описывает ФР временного ряда в отсутствие тренда.

Этот результат представляет самостоятельный интерес, поскольку позволяет применять R/S метод для оперативного (без проведения спектрального анализа) выявления наличия тренда в экспериментальных результатах. С другой стороны, чувствительность R/S метода к наличию в анализируемом временном ряду слабой детерминированной компоненты затрудняет оперативное определение ФР по экспериментальным данным и требует предварительной обработки последних.

Таким образом, исследование ФР, проведенное в настоящей работе, показало, что ФР может быть использована для анализа случайных процессов.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ ЛАЗЕРОВ

Кроме исследования фрактальной структуры случайных временных рядов, полученных в результате численного моделирования, в настоящей работе R/S метод был применен для анализа экспериментальных данных, полученных при измерении нестабильности частоты He-Ne лазеров. Эти лазеры применяются в лазерных измерительных интерферометрах в качестве

источников меры длины, от стабильности и воспроизводимости которой зависит погрешность измерений интерферометров.

В связи с особым значением стабильности и воспроизводимости частоты He-Ne лазеров для задач лазерной измерительной интерферометрии немаловажную роль играют методы анализа этих характеристик, в том числе и таких, которые основаны на новых физических принципах. В частности, представляет интерес использование идеи фрактальной структуры случайных процессов для анализа нестабильности частоты и определения случайных уходов частоты.

Проведенные в настоящей работе исследования R/S метода и условий его использования позволили применить его для анализа временных рядов измерений нестабильности частоты He-Ne лазеров.

В предельных случаях физический смысл ФР нестабильности частоты следующий. При $H = 0$, когда ФР переходит в топологическую, равную 2, разница между максимальным и минимальным значениями функции приращения R остается постоянной, пропорциональной дисперсии, и не зависит от длины исследуемого интервала. В этом случае строгая периодическая последовательность значений, соответствующая геометрическому образу плоскости, описывает бездрейфовое поведение частоты. При $H = 1$ $R = SN$ и разность между максимальным и минимальным значениями функции приращения линейно растет с интервалом анализа, т. е. когда топологическая размерность равна 1, имеет место детерминированный уход частоты. Все остальные, в том числе и случайные изменения частоты, должны описываться ФР, соответствующей значениям H в интервале от 0 до 1.

В настоящей работе использовалась известная методика определения нестабильности частоты, когда в радиодиапазоне измеряется разностная частота между оптической частотой опорного высокостабильного He-Ne лазера и оптической частотой исследуемого, стабильность которого на один-два порядка ниже опорного. Таким образом, все наблюдаемые изменения измеряемой разностной частоты приписываются исследуемому лазеру.

При проведении измерений время усреднения частотомера устанавливалось 0,1 и 1 с. Каждая серия состояла из 4098 измерений. Были исследованы стабилизированные по частоте He-Ne лазеры с длиной волны 0,63 мкм (один – фирмы "Hewlett-Packard" и второй – ЛГН-212). Оба имеют общую по принципу работы систему стабилизации частоты излучения, основанную на терморегулировании длины резонатора лазера в зависимости от сигнала расстройки.

По временным рядам измеренной нестабильности частоты этих лазеров была вычислена фрактальная размерность, которая находилась в интервале $D = 1,05 - 1,1$. Графики R/S

функции для временных рядов относительных изменений частоты лазеров представлены на рис. 2. Так как параметр H для этих рядов близок к 1, то из этого следует, что поведение частоты стабилизированных лазеров описанного типа можно рассматривать как фрактальное в достаточно широком временном интервале. Величина фрактальной размерности указывает на то, что лазеры относятся к системам с персистентным поведением. Это оказалось в достаточной мере прогнозируемый результат, если учесть, что система автоподстройки частоты лазера корректирует изменения частоты путем накопления информации за предыдущие интервалы времени. Отсюда следует, что ФР характеризует качество системы стабилизации частоты.

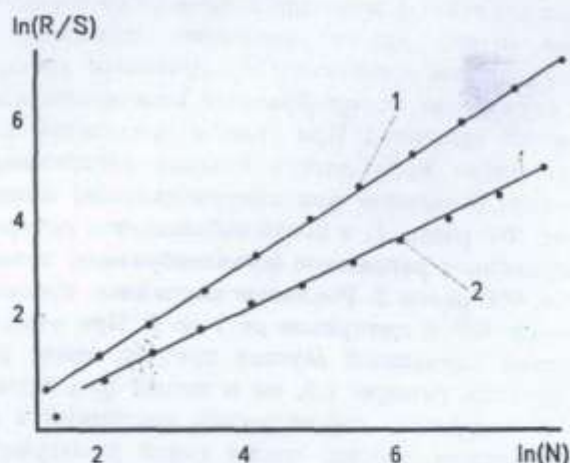


Рис. 2. Зависимость R/S функции от N для относительных изменений частоты лазеров: 1 – лазер ЛГН-212; 2 – лазер фирмы "Hewlett Packard"

Как показали наблюдения, нестабильность частоты нельзя рассматривать как стационарный процесс, так как от серии к серии измерений вид функции распределения может существенным образом меняться. В то же время, вычисляемая для всех этих измерений ФР остается постоянной и не зависит от функции распределения. Этот факт позволяет сделать вывод, что в условиях нестационарного процесса, когда традиционные методы обработки случайных временных рядов применять некорректно, объективной оценкой или характеристикой случайного процесса может быть именно ФР.

Применительно к стабилизированным по частоте лазерам можно разработать критерии качества воспроизводимости частоты, базирующиеся на ФР. Понятно, что если ФР близка к 1, то наблюдаются случайные уходы частоты лазера от номинального значения. В то же время, если ФР близка к 2, то имеют место скачки значений оптической частоты. Отсюда следует, что воспроизводимость частоты лазера, который используется в составе лазерных интерферометров для долговременных высокоточных измерений, должна характеризоваться фрактальной размерностью вблизи $D = 1,5$. В этом случае на точность измерений не будут влиять ни случай-

ные уходы, ни резкие скачкообразные изменения частоты.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основываясь на возможности представления случайных временных рядов в виде самоаффинных множеств, исследованы фрактальные свойства временных рядов измерений. С этой целью применен R/S метод, который позволяет определять размерность случайных фракталов. В работе показано, что с помощью данного метода можно вычислять топологическую размерность множеств в одномерных и двумерных евклидовых пространствах. Получено, что ФР не зависит от функции распределения случайных величин, а зависит от соотношения между двумя основными характерными случайными процессами – случайным дрейфом и случайным скачкообразным изменением измеряемой величины. При этом, в предельном случае, когда наблюдается гладкое детерминированное (линейное или синусоидальное) поведение, ФР равна 1, а когда наблюдается детерминированное разрывное (скачкообразное) поведение, ФР равна 2. Реальные случайные процессы имеют ФР в интервале от 1 до 2. При этом, не только случайный гауссов процесс имеет размерность, равную 1,5, но и целый ряд случайных процессов, порождаемых системами с динамическим хаосом, также имеет размерность, близкую к 1,5. Таким образом, используемая ФР не разделяет процессы, обусловленные ДХ, и случайные гауссовы процессы и описывает общие для них статистические характеристики.

Исследования неустойчивости частоты лазеров с помощью R/S метода показали, что из-

менения частоты излучения лазеров, у которых есть система активной стабилизации частоты, могут представлять собой процессы, описываемые случайными фрактальными множествами.

Список литературы

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. - New York: W.H.Freeman, 1982. -260 p.
2. Oppenheimer P.E. //Computer Graphics. - 1986. - V.20. - P.55.
3. Mandelbrot B.B., Wallis J.R. //Water Resour. Res. - 1969. -V. 5. -P. 228.
4. Hurst H.E. //Trans. Am. Soc. Civ. Eng. -1951. -V. 116. -P. 770.
5. Mandelbrot B.B., Wallis J.R. //Water Resour. Res. -1968. -V. 4. -P. 909.
6. Фредер Е. Фракталы. -М.:Мир, 1991. -260 с.
7. Mandelbrot B.B., Wallis J.R. //Water Resour. Res. -1969. -V. 5. -P. 321.
8. Мун А. Хаотические колебания. -М.:Мир, 1991. -311 с.

EMPLOYMENT OF FRACTAL ANALYSIS METHOD FOR INVESTIGATION OF LASER FREQUENCY INSTABILITY

Yu.P. Machehin, V.A. Odinets

The method of calculation of fractal dimension of time-dependent series is described. Results of calculation of dimension of numerically modeled accidental series and series of measurements of relative instability of lasers radiation frequency are shown.