УДК 681.51:007.5

В. И. АДОНИН, В. А. ГОРОХОВАТСКИЙ, канд. техн. наук,
М. Я. ЖИТОМИРСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, *А. А. МАЙСТРЕНКО*, канд
техн. наук, *В. П. МАШТАЛИР*, канд. техн. наук

РАСПОЗНАВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Методы и алгоритмы автоматической интерпретации изображений (в частности, их распознавание) занимают доминирующее положение при создании робототехнологических комплексов, использующих визуальную информацию. Всевозможные возмущающие воздействия, которые возникают в реальных условиях, усложняют обработку видеокадров.

Наиболее сложные в процессе анализа — вносящие неоднозначность геометрические искажения, обусловленные изменением взаимного расположения наблюдаемого объекта и датчика зрительной информации. В качестве математических моделей трансформаций поля зрения видеодатчика, как правило, используются группы Ли преобразованной плоскости. Вид преобразований выбирается в зависимости от конкретных условий их возникновения, требуемой надежности распознавания, имеющихся технических средств. С целью обеспечения унификации программно-аппаратной реализации алгоритмы обработки видеокадров должны быть универсальными, т. е. не зависеть от групп преобразований. Нами предложен подход к распознаванию изображений в условиях произвольных однопараметрических преобразований, который заключается в следующем.

Пусть M — пространство двумерных изображений, т. е. финитных функций на плоскости, носители которых обычно принадлежат прямоугольной области D (полю зрения датчика визуальной информации), G — группа преобразований плоскости, действующая в M:

$$g: x \to h_1(x, y),\ y \to h_2(x, y),\ g\,B(x, y) = B(h_1(x, y, h_2(x, y)),$$
$$g \in G,\ B \in M.$$

Поскольку действие G в M индуцирует отношение эквивалентности, т. е. разбиение M на непересекающиеся классы эквивалентных изображений, то задача распознавания сводится к выяснению, относятся ли два произвольных изображения B', B'' к одному и тому же классу. Один из традиционных и

Предположим $B'' = g.B'$, тогда

$$\Phi_t(B'') = \Phi_t(B')g^{-1}.$$

Таким образом,

$$\Phi_1(B'')[\Phi_t(B'')]^{-1} = \Phi_1(B')g^{-1}[\Phi_t(B')g^{-1}]^{-1} = \Phi_1(B')[\Phi_t(B')]^{-1},$$

что и требуется.

С целью построения нормализаторов при действии произвольных однопараметрических групп введем понятие нормализующего функционала.

Определение. *Функционал μ: $M \to R^1(C^1)$ называется нормализующим относительно действия параметризованной канонически[1] однопараметрической группы $G = \{g_s\}$, если для некоторого $t \in R^1(C^1)$ $\mu(g_s.B) = e^{ts}\mu(B)$ при любом значении s и произвольном изображении $B \in M$.*

Число t, фигурирующее в определении и являющееся, вообще говоря, комплексным, назовем показателем нормализации функционала μ. Отметим, что наличие экспоненциальной функции в определении нормализующего функционала объясняется тем, что из равенства $\mu(g_s.B) = f(s)\mu(B)$ вытекают свойства: $f(2s) = (f(s))^2$, $f(0) = 1$, а e^{ts} — простейшая функция, им удовлетворяющая.

Утверждение 2. *Пусть μ — нормализующий функционал, $\mu(B) > 0$ для всех $B \in M$, тогда отображение $B \to g_\alpha.B$, где $\alpha = -\frac{1}{t}\ln\mu(B)$ является нормализатором $M \to M$.*

Доказательство. Необходимо доказать, что для эквивалентных изображений B_1, B_2 выполнено равенство $g_{\alpha_1}.B_1 = g_{\alpha_2}.B_2$, где $\alpha_1 = -\frac{1}{t}\ln\mu(B_1)$, $\alpha_2 = -\frac{1}{t}\ln\mu(B_2)$. Пусть $B_2 = g_s.B_1$. Тогда $g_{\alpha_2}.B_2 = (g_{\alpha_2}g_s).B_1 = g_{\alpha_2+s}.B_1 = g_{-\frac{1}{t}\ln\mu(g_s.B_1)+s}.B_1$. Согласно определению нормализующего функционала $\frac{1}{t}\ln\mu(g_s.B_1) = s + \frac{1}{t}\times\ln\mu(B_1)$. Тем самым, $g_{\alpha_2}.B_2 = g_{-\frac{1}{t}\ln\mu(B_1)}.B_1 = g_{\alpha_1}.B_1$, что и требуется доказать.

Укажем теперь способ построения нормализующего функционала любого порядка в случае действия произвольной однопараметрической группы. Тем самым, для любой однопараметрической группы можно получить однопараметрическое семейство нормализующих функционалов и, согласно утверждениям 1, 2, функциональные инварианты.

При построении нормализующих функционалов воспользуемся следующими понятиями [2]. Пусть L — алгебра Ли группы G, $\varphi \in L$ — образующая алгебры, $L : L = \{a\varphi, a \in R^1\}$, $\varphi = \varphi_1(x, y)\,dx + \varphi_2(x, y)\,dy$.

[1] Параметризация группы $G = \{g_s\}$ является канонической, если g_0 — единица группы и $g_{s_1+s_2} = g_{s_1}g_{s_2}$.

Утверждение 3. *Пусть* $z = Z(t, x, y)$ — *первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi_1(x_1 y); \\ \dot{y} &= \varphi_2(x_2 y); \\ \dot{z} &= -\left(t + \frac{\partial \varphi_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2(x, y)}{\partial y}\right) z^*, \end{aligned} \tag{3}$$

тогда функционал $B(x, y) = \iint_D B(x, y) Z(t, x, y)\, dx dy$ *является нормализующим порядка* t.

Доказательство. Рассмотрим внешнюю дифференциальную 2-форму $\omega = Z(t, x, y)\, dx \wedge dy$ [3]. Результат применения преобразования $g \in G$ к форме не будем обозначать $g.\omega$. Для доказательства утверждения 3 необходимо проверить, что

$$\iint_D (g_s.B(x, y)) Z(t, x, y)\, dx dy = e^{ts} \iint_D B(x, y) Z(t, x, y)\, dx dy.$$

Это равенство можно переписать в виде $\iint_D B(x, y) g_{-s}\omega = e^{ts} \iint_D B(x, y) \omega$. Чтобы последнее было справедливо для любых изображений $B(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы для всех s было выполнено условие

$$g_s.\omega = e^{-ts}\omega. \tag{4}$$

В частности, должно быть выполнено

$$\frac{d}{ds} g_s\omega + te^{-ts}\omega = 0. \tag{5}$$

Поскольку при $s = 0$ условие (4), очевидно, выполнено, то условия (4), (5) равносильны. В случае $s = 0$ из равенства (5) получаем

$$\frac{d}{ds}\Big| s = 0 (g_s.\omega + t\omega) = 0. \tag{6}$$

Оказывается, что если выполнено равенство (6), то выполнено и условие (4) для всех s. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию $f(s) = g_s.\omega - e^{-ts}\omega$. Дифференцируя по s_1 тождество

$$f(s_1 + s_2) = g_{s_1}.(g_{s_2}.\omega) - e^{-t(s_1+s_2)}\omega,$$

находим

$$\frac{\partial f}{\partial s_1}(s_1 + s_2) = \frac{\partial}{\partial s_1} g_{s_1}.(g_{s_2}.\omega) + te^{-t(s_1+s_2)}\omega. \tag{7}$$

Подставим в (7) $s_1 = 0$ и заметим, что при выполнении равенства (6) $\frac{\partial}{\partial s_1}\Big|_{s_1=0} g_{s_1}.(g_{s_2}.\omega) = -tg_{s_2}.\omega$. Поэтому из (7) следует, что

$$f'(s) = -tg_s.\omega + te^{-ts}\omega = -tf(s). \tag{8}$$

* Заметим, что в системе (3) t — параметр, а не «время».

Равенство (8) представляет собой дифференциальное уравнение относительно $f(s)$. Его общее решение имеет вид $f(s) = Ce^{-ts}$. Но из определения $f(s)$ следует, что $f(0) = 0$. Поэтому $f(s)$ тождественно равно 0, т. е. (4) выполнено.

Итак, доказательство утверждения 3 сводится к доказательству тождества (6). Преобразуем выражение $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} g_s.\omega$. Поскольку группа G параметризована канонически, то $g_s = \exp s\varphi$, где φ — образующая алгебры Ли группы G; exp — экспоненциальное отображение. Найдем линейные члены в тейлоровском разложении по s функции $\exp s\varphi.\omega$. Можно показать [3], что

$$\exp \varphi.\omega = \omega + s\left\{\left[\frac{\partial Z(t, x, y)}{\partial x}\varphi_1 + \frac{\partial Z(t, x, y)}{\partial y}\varphi_2 + z\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + 0(s^2)\right\} dx \wedge dy.$$

Поэтому условие (6) переписывается в виде уравнения в частных производных для функции $Z(t, x, y)$:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}\varphi_1 + \frac{\partial Z}{\partial y}\varphi_2 + Z\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) + tZ = 0. \qquad (9)$$

От (9) можно перейти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3). Если $z = Z(t, x, y)$ — первый интеграл системы (3), то $Z(t, x, y)$ — решение (9). Утверждение 3 доказано.

Утверждения позволяют указать формализованную процедуру построения функциональных инвариантов для произвольной однопараметрической группы $G = \{g_s\}$. Прежде всего, необходимо найти координаты образующей алгебры Ли:

$$\varphi_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} h_1(s, x, y);$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} h_2(s, x, y),$$

где g_s: $x \to h_1(s, x, y)$, $y \to h_2(s, x, y)$.

Далее необходимо интегрировать систему (3) с параметром t, что обеспечивает поиск семейства функций $Z(t, x, y)$. Тем самым, определяется семейство нормализующих функционалов.

На основе утверждения 2 строится семейство нормализаторов, т. е. отображений $B(x, y) \to \Phi(B).B(x, y)$, где $\Phi(B) = g_\alpha$, $\alpha = -\frac{1}{t}\ln \iint\limits_D B(x, y) Z(t, x, y)\, dxdy$.

Наконец, согласно утверждению 1 получаем функциональные инварианты

$$B(x, y) \to f(t) = \frac{1}{t}\iint\limits_D B(x, y) Z(t, x, y)\, dxdy -$$

$$- \iint\limits_D B(x, y) Z(1, x, y)\, dxdy. \qquad (10)$$

Напомним, что аргумент t в соотношении (4) может принимать и вещественные, и комплексные значения: в последнем случае получаем инвариантное отображение в пространство комплексных функций.

Для иллюстрации предложенного подхода к распознаванию изображений в условиях однопараметрических геометрических преобразований рассмотрим действие групп смещений, поворотов, косых сдвигов и преобразований перспективы.

Пример 1. Для группы одномерных смещений $G = \{g_s\} = \left\{\begin{matrix} x \to x + s \\ y \to y \end{matrix}\right\}$ образующая алгебра Ли есть поле ∂x. Система (3) имеет вид $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = -tz$. Поскольку $z = e^{-tx}$ — первый интеграл этой системы, то, согласно формуле (10), получаем функциональный инвариант

$$B(x, y) \to f(t) = \frac{1}{t} \ln \iint\limits_D B(x, y) e^{-tx} dxdy - \iint\limits_D B(x, y) e^{-x} dxdy.$$

Заметим, что при чисто мнимом t этот инвариант основан на преобразовании Фурье $B(x, y)$ [4].

Пример 2. Для группы поворотов

$$G = \{g_s\} = \left\{\begin{matrix} x \to x \cos s + y \sin s \\ y \to -x \sin s + y \cos s \end{matrix}\right\},$$

образующая алгебры Ли есть векторное поле $\varphi = y\partial x - x\partial y$. Система (3) имеет вид $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, $\dot{z} = -tz$. Пусть $u = \frac{y}{x}$. Тогда $\dot{u} = -(1 + u^2)$. Первым интегралом служит, например, функция $z = e^{t \operatorname{arctg} u} = e^{t \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$. Получаем функциональный инвариант

$$B(x, y) \to f(t) = \frac{1}{t} \iint\limits_D B(x, y) e^{t \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} dxdy - \iint\limits_D B(x, y) e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} dxdy.$$

Пример 3. Для группы косых сдвигов $G = \{g_s\} = \left\{\begin{matrix} x \to x + sy \\ y - y \end{matrix}\right\}$. Образующая алгебры Ли есть поле $y\partial x$. Система (3) имеет вид $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = -(t + 1) z$. С помощью первого интеграла $z = e^{-(t+1)\frac{x}{y}}$ получаем функциональный инвариант

$$B(x, y) \to f(t) = \frac{1}{t} \iint\limits_D B(x, y) (e^{-(t+1)\frac{x}{y}} dxdy - \iint\limits_D B(x, y) (e^{-\frac{x}{y}}) dxdy.$$

Пример 4. Для первообразований перспективы $G = \{g_s\} =$

$$= \begin{Bmatrix} x \to \dfrac{x}{sx+1} \\ y \to \dfrac{y}{sx+1} \end{Bmatrix}$$ образующая алгебры Ли $\varphi = -x^2dx - xydy$. Система (3) имеет вид $\dot{x} = -x^2$, $\dot{y} = -xy$, $\dot{z} = -(t+x)z$.

Интегрируя эту систему, получаем функциональный инвариант

$$B(x, y) \to f(t) = \frac{1}{t} \iint\limits_D B(x, y)\, xe^{-\frac{t}{x}} dxdy - \iint\limits_D B(x, y)\, xe^{-\frac{1}{x}} dxdy.$$

Список примеров можно было бы продолжить анализом и других практически важных видов геометрических преобразований, т. е. предложенный способ построения функциональных инвариантов одинаково приемлем для любой однопараметрической группы. В заключение отметим, что функциональные инварианты целесообразно использовать и при обработке временных последовательностей видеокадров, когда сложные геометрические преобразования задаются в виде однопараметрических (с параметром — время).

Список литературы: 1. *Путятин Е. П.* Теоретические предпосылки нормализации изображений//Пробл. бионики.—1973.—Вып. 10.—С. 82—89. 2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—400 с. 3. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии.—М.: Мир, 1970.—412 с. 4. *Кейсесент Д.. Псалтис Д.* Новые методы оптических преобразований для распознавания образов//ТИИЭР.—1977.—65, № 1.—С. 92—100.

Поступила в редколлегию 11.09.85.