АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ

П. И. Костенко, П. К. Курносенко, Ю. В. Шагаев, В. Г. Харченко

Харьков

Оперативное планирование является заключительным этапом плановой работы на промышленном предприятии, важнейшей задачей которого является организация повседневной планомерной и ритмичной работы производственных участков. Многовариантность данной задачи предполагает использование для ее решения математических методов и ЭВМ. Попытки точного решения на оптимум (с помощью полного перебора и целочисленного программирования) задач оперативного планирования имели ограниченный успех [1], [2]; исключение составляет лишь особый случай, описанный Джонсоном [3]. Наибольшая трудность, с которой приходится сталкиваться при использовании точных алгоритмов, состоит в быстром росте объема необходимых вычислений по мере увеличения размера задачи (пропорционально кубу или экспоненциально), с другой стороны, при математическом моделировании с использованием эвристических методов трудности, связанные с проведением вычислений, возрастают с увеличением размера задачи, но уже линейно. В связи с этим математическое моделирование находит себе практическое применение и стало объектом большого числа теоретических исследований. В данной статье рассматривается эвристический алгоритм решения одной задачи календарного планирования.

Общая постановка и метод решения задачи.

Пусть заданы n деталей d_i, $i=1, 2, ..., n$, подлежащих обработке на некотором участке, состоящем из m станков R_j, $j=1, 2, ..., m$. В основе любой задачи календарного планирования лежит определение такой последовательности системы элементов операций, которая будет являться планом их осуществления на различных видах оборудования. Эту последовательность будем называть «отношением предшествования». и обозначать символом $\leqslant$. Запись $a \leqslant b$ показывает, что операция a должна начаться или раньше операции b или одновременно

с ней. Отношение $\leqslant$ является транзитивным, рефлексивным и асимметричным, т. е.

1) $a \leqslant a$ для всех a,

2) $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant c) \rightarrow a \leqslant c$,

3) $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant a) \rightarrow a = b$.

Существование такой взаимной последовательности работ обуславливается технологической необходимостью начинать выполнение одной из операций одновременно или раньше начала другой операции.

Понятие предшествования работы $\leqslant$ включает в себя взаимосвязь между работами, называемую «непосредственным предшествованием», обозначаемую знаком $\ll$. Запись $\leqslant$ показывает, что непосредственно вслед за работой a выполняется работа b.

В данной задаче обработка детали d_i производится в соответствии с технологическим маршрутом M_i. M_i представляет собой некоторое упорядоченное множество операций Q_{ij} $j=1, 2, ..., m_i$, т. е. между $\forall Q_{ij}$ существует взаимосвязь «непосредственного предшествования», или $Q_{ij} \ll Q_{ij+1}$ $j=1, 2, ..., m_i$. Каждая операция Q_{ij} характеризуется привязкой к некоторому станку $R_j \in K$ (K — группа оборудования), на котором должна быть выполнена эта операция, и ей соответствует определенное время выполнения $T_{ij} = T_{ij}(R_j)$. Требуется составить такое расписание для деталей на группе оборудования K, чтобы общий цикл их обработки был минимальным. Алгоритм решения задачи основан на следующих правилах предпочтения:

1. В каждый промежуток времени максимальное число одновременно работающих единиц оборудования, что достигается выбором $\max\limits_{j}\{\min\limits_{i} t_{ij}\}$, где t_{ij} — элементы матрицы «ожидания» (см. ниже), т. е. назначение на обработку в первую очередь той детали, для которой имеет место $\max\limits_{j}\{\min\limits_{i} t_{ij}\}$.

2. Станок, на который есть очередь хотя бы в одну деталь, не должен простаивать в ожидании «лучшей детали», если же деталей несколько, то выбирается та, которая имеет максимальную трудоемкость по последующим операциям технологического маршрута.

3. Если пункты 1 и 2 не в состоянии указать, какой детали отдать предпочтение, тогда назначается на обработку деталь d_i, имеющая минимальное время обработки на станке, т. е. $\min\limits_{j} T_{ij}(R_j)$.

4. В случае равенства всех предыдущих показателей первой на обработку идет деталь с меньшим номером, что вызвано не столько логической потребностью, как возможностью осуществления данного алгоритма на ЭЦВМ. При этом следует заметить, что данный алгоритм по своему содержанию является тактовым, т. е. предполагает наличие такого отрезка времени (такта), чтобы все значения T_{ij} выражались целым числом. Это ограничение не влияет существенным образом на решение задачи, так как всегда можно найти меньшую единицу времени, которая и будет тактом.

1. Метод сглаживаний решения задачи календарного планирования

Для решения поставленной задачи предлагается ввести временную матрицу $S = (t_{ij})$, которую назовем матрицей «ожидания». Каждое t_{ij} — это минимальное время, через которое i-я деталь может поступить на j-й станок при наличии технологических связей и без учета возможных положений при совместной обработке деталей.

В качестве примера возьмем участок, состоящий из трех станков $R_j\,(j=\overline{1,3})$ и четырех деталей $d_i\,(i=\overline{1,4})$ со строго определенными технологическими маршрутами $M_i\,(i=\overline{1,4})$ которые представляют собой упорядоченные множества операций $Q_{ij}\,(j=\overline{1,m_i})$

Пусть, например:

$$M_1=\{R_1(T_{11});\ R_3(T_{12});\ R_2(T_{13});\ R_1(T_{14})\},$$

$$M_2=\{R_1(T_{21});\ R_3(T_{22});\ R_2(T_{23});\ 0\},$$

$$M_3=\{R_1(T_{31});\ R_2(T_{32});\ R_1(T_{33});\ R_3(T_{34})\},$$

$$M_4=\{R_2(T_{41});\ R_3(T_{42});\ R_1(T_{43});\ R_3(T_{44})\}.$$

Таким образом, каждый технологический маршрут M_i можно интерпретировать как p — мерный вектор, компоненты которого есть операции Q_{ij}, а совокупность всех технологических последовательностей составит матрицу размерностью $p\times n$.

Придадим T_{ik} числовые значения и выпишем матрицу технологий для нашего примера:

$$\begin{pmatrix} 1\,(2) & 1\,(2) & 1\,(3) & 2\,(1) \\ 3\,(1) & 3\,(1) & 2\,(2) & 3\,(3) \\ 2\,(3) & 2\,(1) & 1\,(1) & 1\,(1) \\ 1\,(1) & 0 & 3\,(2) & 3(1) \end{pmatrix}.$$

Здесь k-й столбец — это технологический маршрут детали d_k, а каждый элемент $\lambda(\mu)$ указывает:

1) номер станка, на котором выполняется операция (λ),

2) время выполнения операции (μ).

Матрица «ожидания» для данного примера будет иметь следующий вид:

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим некоторые свойства матрицы S.

Свойство 1. Каждый столбец матрицы S состоит из разных элементов; это соответствует тому, что одна деталь не может обрабатываться сразу на 2-х станках, т. е.

$$t_{ij}\neq t_{ip},\ j+p.$$

Действительно, мы имеем деталь d_i, имеющую упорядоченный технологический маршрут M_i, состоящий из Q_{ij}, $j=1,\ \ldots,\ m_i$, т. е. между $\forall Q_{ij}\in M_i$ существует взаимосвязь «непосредственного предшествования», или $Q_{ij}\ll Q_{ik}$. Имеем t_{ij} минимальное время, через которое i-я деталь сможет поступить на j-й станок при наличии технологических связей, т. е. если $Q_{ij}\ll Q_{ik}$, то $t_{ij}\ll t_{ik}$. Имеем

$$Q_{ij_1}\ll Q_{ij_2}\ll\ldots\ll Q_{ij_p},$$

$$j_k\in\{1\ldots m_i\},\ \text{тогда}\ t_{ij+1}<\ldots<t_{ij_p},$$

$$\text{т. е.}\ t_{ij}\neq t_{ij+p}.$$

Если технологический маршрут не предусматривает обработки i-той детали на j-м станке, то на месте t_{ij} появляется пустота. Тогда в матрице S эта пустота заполняется символом K (от слова «конец»). В ма-

шине самым простым выходом, очевидно, является стирание кода, соответствующего данной детали, в ячейке памяти.

Свойство 2. Число обрабатываемых деталей не превышает числа станков.

Свойство 3. Тот факт, что $t_{ij}=0$ означает, что i-я деталь стоит в очереди на j-й станок (подошла на обработку). Ближайший по значению к «0» элемент, т. е. минимальный элемент из оставшихся в столбце, показывает время обработки i-й детали на j-ом станке и указывает, что деталь должна пойти на обработку на следующий станок по технологическому маршруту. Это вытекает из свойства 1.

Замечание. Отсутствие «0» в i-ом столбце означает полное завершение обработки детали d_i.

2. Математическое обоснование метода

Данный метод является эвристическим, и поэтому желательно было бы план, получаемый по данному алгоритму сравнить с оптимальным. Но оптимальный план не найден, и нет даже оценок, указывающих на оптимальность плана. Поэтому для оценки оптимальности плана предлагается:

1. Указать приближенную оценку снизу. Может быть даже с заниженным сроком окончания работ. Очевидно приближенной такой оценкой будет:

$$a)\ T > T_0 \cong \max\left\{\max_i \sum_{j\in\{1\ldots m_i\}} T_{ij},\ \max_j \sum_{i\in\{1\ldots n\}} T_{ij}\right\}$$

$\max\limits_i \sum\limits_{j\in\{1\ldots m_i\}} T_{ij}$ — время изготовления детали с максимальной трудоемкостью изготовления;

$\max\limits_j \sum\limits_{i\in\{1\ldots n\}} T_{ij}$ — суммарная максимальная загруженность j-го станка.

б) следующим шагом для уточнения оценки будет учет времени до начала работы j-го станка, исходя из технологических связей. Для этого в каждой строке матрицы S выберем $\min t_{ij}$ и это будет искомая добавка, т. е.

$$T > T_1 \equiv \max\left\{\max_i \sum_{j\in\{1\ldots m_i\}} T_{ij};\ \max_j \left[\sum_{i\in\{1\ldots n\}} T_{ij} + \min t_{ij}\right]\right\}$$

$$T_1 > T_0.$$

в) следует также учитывать возможные наложения до момента полного расширения фронта работ (т. е. когда вступят в действие все станки). Оценку обозначим T_2.

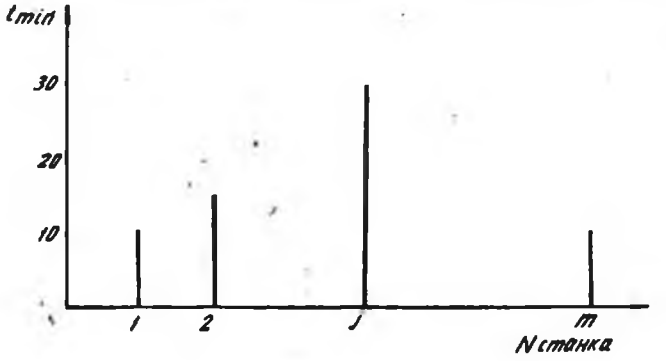
Пусть в какой-то строке j матрицы S имеется «K» произвольно расположенных нулей (т. е. на j станок имеется очередь в K деталей).

Можно, конечно, посчитать T_2 для различных перестановок из всех деталей, но число таких перестановок равно $K!$ и понятно, что это требует довольно громоздких затрат времени. Можно отбросить те детали, которые не влияют существенным образом на срок вступления станка в работу. Тогда оставим в каждой строке матрицы «ожидания» только min элементы, на месте всех остальных поставим 0. Обозначим эту матрицу через $Q=(t_{ij})_n^m$ и возьмем разность $(S-Q)$. В полученной матрице рассматриваем только те столбцы, в которых имеется по

нескольку нулей и для соответствующих деталей проводится этап (b) уточнения времени.

3. Описание метода

Будем считать, что нагрузка на все станки примерно одинакова. Исходя из этого предположения и из логических соображений можно сказать следующее: чем быстрее начнут работать все станки, тем, наверное, будет меньше срок окончания всего цикла работ T. Итак, в ос-



нову метода положено максимально возможное расширение фронта работ, что достигается назначением на обработку в первую очередь той детали d_i, для которой имеет место $\max_i \{\min_j t_{ij}\}$, т. е. мы стремимся как можно быстрее загрузить тот станок R_j, для которого время, необходимое для вступления его в работу является наибольшим («отстающий» станок).

Следует отметить, что даже при самом правильном выборе очередности обработки деталей, мы не можем гарантировать вступления в работу сразу всех станков через теоретически минимальное время. Вот чем оправдывается выбор «главной» детали, т. е. той, которая в состоянии обеспечить своевременную загрузку «отстающего» станка. В геометрической интерпретации это будет выглядеть так: представим то минимальное время, через которое каждый станок может вступить в работу, в виде отрезков соответствующей длины.

Идеальным решением задачи будет, очевидно, тот вариант, когда в период всего процесса обработки все $t_{\min}$ — координаты равны нулю, т. е. нет простоев станков. Но если мы имеем такую ситуацию как на рисунке, то представляется разумным назначить на обработку в первую очередь ту деталь, которая уменьшила бы $t_{\min}$ — координату для j-го станка (самую большую), это и есть «главная» деталь, а сам метод получил название — метод сглаживаний. Продолжая этот процесс, будем получать довольно равномерную картину, причем в дальнейшем самое большое колебание не будет превышать $\max_{i,j} T_{ij}$.

Итак, назначили на обработку деталь d_i (назвали ее «главной») на станок R_j. Но ведь могут быть и другие свободные станки. Примем условие, что станок не должен простаивать, если на него есть очередь хотя бы в одну деталь. Если на станок R_j подошла на обработку одна деталь или же продолжается обработка какая-то, тогда выбор понятен. Если же существует очередь в несколько деталей, тогда среди них можно попытаться выбрать ту, которая обеспечила бы стирание

следующего по величине $\max\limits_{j}\{\min\limits_{i} t_{ij}\}$ и т. д. Если по этому правилу нельзя отдать предпочтение какой-либо детали, тогда вступают другие правила приоритета, например выбор по наибольшему оставшемуся времени обработки, правило кратчайшей операции, выбор по наибольшему количеству оставшихся операций и т. д. Если один из станков загружен значительно больше, чем остальные, тогда очень эффективным является правило: первой проходит та деталь, которая быстрее поступит на этот станок.

Принимая во внимание условие, что свободный станок ни под каким предлогом не простаивает, мы теперь уже не можем гарантировать вступление в работу «отстающего» станка через теоретически минимальное время.

Исходя из этого, можем отметить лишь следующее: пусть «главная» деталь d_i, прежде чем поступить на обработку на «отстающий» станок R_j должна пройти P других станков (суммарное время обработки на этих станках обозначим через T_p). Тогда заведомо известно следующее: эта деталь поступит на станок R_j не позже, чем через время

$$T' = T_p + (p-1)(\max_{i,j} T_{ij} - t),$$

где t — тактовая доля времени, и не раньше, чем через время

$$T'' = T_p, \text{ т. е.:}$$

$$T'' \leqslant T_{\text{отст}} \leqslant T'.$$

Итак, «главная» деталь выбрана. Для запуска других деталей, когда уже главная деталь выбрана, мы применяем правило: выбираем ту, которая имеет максимальную трудоемкость. Это логически оправдано. Нам выгодно сначала обработать те детали, которые максимально трудоемки, этим мы уменьшаем длительность цикла и достигается равномерное окончание работ по всем деталям. Если трудоемкости совпадают, то выбираем деталь по правилу кратчайшей операции. Этим достигается равномерная загрузка оборудования. Проделав нужное количество тактов, получим решение данной задачи.

Выводы: Преимущества данного алгоритма состоят в том, что:

1) на ЭЦВМ даже с небольшой оперативной памятью можем решать задачи с матрицей $p \times n$, где p как угодно большое; так как работаем с матрицей $m \times n$, где $m \leqslant p$;

2) удачное сочетание правил предпочтения позволяет осуществить равномерную загрузку оборудования и равномерное окончание работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Гиффлер, Д. Толепсон, В. Ван-Нессе. Опыт вычислений с применением линейного алгоритма и алгоритма Монте-Карло для решения задач календарного планирования на производстве. «Календарное планирование». Изд-во «Прогресс», М., 1966.

2. А. Е. Стори, Х. М. Вагнер. Опыт применения целочисленного программирования при расчете календарного плана для предприятий единичного и мелкосерийного производства. «Календарное планирование». Изд-во «Прогресс», М., 1966.

3. С. М. Джонсон. Оптимальные двух- и трехоперационные календарные планы производства с учетом подготовительно-заключительного времени. «Календарное планирование». Изд-во «Прогресс», М., 1966.