УДК 621.372.061

Л. В. ГРИНЧЕНКО, канд. техн. наук, И. А. МИЛЮТЧЕНКО, канд. техн. наук,
В. И. ЧУМАКОВ, канд. физ.-мат. наук

СВЯЗЬ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОТКЛИКА ЦЕПИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

1. Постановка задачи

Анализ любой системы связи и управления в итоге сводится к установлению и исследованию зависимости между входным и выходным сигналами. Физическая природа величин, характеризующих сигналы, может быть различной и не всегда совпадать для входного и выходного сигналов. Одним из основных вопросов теории электрических цепей и сигналов также является определение отклика линейной цепи на произвольное воздействие.

Линейную электрическую цепь n-го порядка можно описать дифференциальным уравнением [1]:

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_1 y' + b_0 y = a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x\,, \qquad (1)$$

где $x(t)$ – воздействие; $y(t)$ - отклик.

Как известно, решение (1) состоит из суммы свободной $y_{св}(t)$ и принужденной $y_{пр}(t)$ составляющих:

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{пр}(t) = \sum_{s=1}^{n} A_s e^{p_s t} + y_{пр}(t)\,, \qquad (2)$$

где A_s – постоянные интегрирования; p_s – корни характеристического уравнения.

Конечным этапом решения уравнения (1) является определение постоянных интегрирования A_s. Из рассмотрения полного решения (2) вытекает, что постоянные A_s могут быть найдены, если хотя бы для какого-либо одного момента $t = t_0$ известны сам искомый отклик $y(t_0)$ и его $n-1$ производные.

В случае типового воздействия ($x(t) = 1(t)$ или $x(t) = \delta(t)$) отклик электрической цепи представляет собой соответственно переходную $h(t)$ и импульсную $g(t)$ характеристики. Задача определения отклика на типовое воздействие возникает, в частности, при анализе переходных процессов [1, 2], синтезе электрической цепи по временному отклику [3], комбинированном синтезе [4], синтезе цифровых фильтров по методу инвариантных импульсных характеристик [5]. Один из вариантов решения данной задачи для частного случая цепей первого и второго порядка рассмотрен в [6, 7].

В работе [6] получены расчетные соотношения, связывающие начальные значения временных характеристик и их производных для электрических цепей второго порядка с коэффициентами a_i и b_j передаточной операторной функции $T(p)$, которая в общем случае имеет вид:

$$T(p) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i p^i}{\sum_{j=0}^{n} b_j p^j}\,. \qquad (3)$$

На основе полученных в [6] соотношений в работе [7] рассчитаны постоянные интегрирования, определяющие аналитические выражения временных характеристик $h(t)$ и $g(t)$.

В случае произвольного воздействия для цепей, имеющих порядок $n \geq 2$, процедура определения $y(t_0)$ и его $n-1$ производных представляет собой трудоемкую операцию [1].

Цель настоящей статьи – обобщить полученные в работе [6] результаты и получить для линейной электрической цепи n-го порядка удобные расчетные соотношения для определения начальных значений отклика $y(t_0)$ и его производных, используя связь начальных значений произвольного воздействия $x(t_0)$ с полиномиальными вещественными коэффициентами передаточной операторной функции цепи.

Результаты решения поставленной задачи могут быть использованы для анализа различных линейных систем, в частности, взрывомагнитных генераторов (ВМГ), процесс изменения тока в которых описывается параметрическими уравнениями первого и второго порядков. В таких системах часто требуется обеспечить не только высокие абсолютные значения выходного тока I_m, но также и скорости нарастания тока в нагрузке $\frac{di}{dt}$. В этом случае ВМГ, приближаясь по характеристикам к источникам тока, используются для непосредственного возбуждения короткоимпульсных излучающих систем [8, 9]. В [10] проведен анализ уравнения ВМГ второго порядка, описывающего процессы в контуре с емкостной нагрузкой. Использование в качестве согласующего устройства выходного трансформатора приводит к повышению порядка цепи, а, следовательно, и порядка уравнения, для решения которого необходимо задать соответствующие начальные условия.

2 Определение начальных значений отклика цепи и его производных на произвольное воздействие

Если $f(t) \div F(\overline{p})$ и начальный момент времени $t_0 = 0$, то в соответствии с теоремой дифференцирования [2]:

$$
\begin{gathered}
f(t) \div F(\overline{p}), \\
f'(t) \div \overline{p}F(\overline{p}) - f(0), \\
f''(t) \div \overline{p}^2 F(\overline{p}) - \overline{p}f(0) - f'(0), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^{(n)}(t) \div \overline{p}^n F(\overline{p}) - \sum_{k=1}^{n} \overline{p}^{n-k} \frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{t=0+}.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Рассмотрим в качестве примера цепь 3-го порядка, а затем распространим полученный результат на случай произвольного значения n. Предполагая, что $x(t) \div X(\overline{p})$, $y(t) \div Y(\overline{p})$, переведем (1) для $n = m = 3$ в пространство изображений:

$$
\begin{aligned}
& b_3\overline{p}^3 Y(\overline{p}) - b_3\overline{p}^2 y(0) - b_3\overline{p}y'(0) - b_3 y''(0) + \\
& + b_2\overline{p}^2 Y(\overline{p}) - b_2\overline{p}y(0) - b_2 y'(0) + \\
& + b_1\overline{p}Y(\overline{p}) - b_1 y(0) + b_0 Y(\overline{p}) = \\
& = a_3\overline{p}^3 X(\overline{p}) - a_3\overline{p}^2 x(0) - a_3\overline{p}x'(0) - a_3 x''(0) + \\
& + a_2\overline{p}^2 X(\overline{p}) - a_2\overline{p}x(0) - a_2 x'(0) + \\
& + a_1\overline{p}X(\overline{p}) - a_1 x(0) + a_0 X(\overline{p}).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Сгруппируем слагаемые:

$$
\begin{aligned}
& Y(\overline{p})(b_3\overline{p}^3 + b_2\overline{p}^2 + b_1\overline{p} + b_0) - y(0)(b_3\overline{p}^2 + b_2\overline{p} + b_1) - y'(0)(b_3\overline{p} + b_2) - y''(0)b_3 = \\
& = X(\overline{p})(a_3\overline{p}^3 + a_2\overline{p}^2 + a_1\overline{p} + a_0) - x(0)(a_3\overline{p}^2 + a_2\overline{p} + a_1) - x'(0)(a_3\overline{p} + a_2) - x''(0)a_3.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Обозначив в (6) соответствующие полиномы $B_r(\overline{p}), A_r(\overline{p})$, $r = \overline{0,3}$, получим:

$$
\begin{aligned}
& Y(\overline{p})B(\overline{p}) - y(0)B_1(\overline{p}) - y'(0)B_2(\overline{p}) - y''(0)B_3(\overline{p}) = \\
& = X(\overline{p})A(\overline{p}) - x(0)A_1(\overline{p}) - x'(0)A_2(\overline{p}) - x''(0)A_3(\overline{p}).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Разделив обе части равенства (7) на выражение $X(\overline{p})B(\overline{p})$, перейдем к соотношению

$$\frac{Y(\bar p)}{X(\bar p)}=\frac{A(\bar p)}{B(\bar p)}+\frac{y(0)B_1(\bar p)-x(0)A_1(\bar p)}{X(\bar p)B(\bar p)}+\frac{y'(0)B_2(\bar p)-x'(0)A_2(\bar p)}{X(\bar p)B(\bar p)}+\frac{y''(0)B_3(\bar p)-x''(0)A_3(\bar p)}{X(\bar p)B(\bar p)}$$

или

$$T(\bar p)=\frac{A(\bar p)}{B(\bar p)}+\frac{W(\bar p)}{X(\bar p)B(\bar p)}. \tag{8}$$

Решение (2) уравнения (1) определяет динамический процесс $y(t)$ в системе, происходящий с момента подачи внешнего сигнала на вход системы. Обычно к этому моменту относят начало отсчета времени $t=0$, и, следовательно, все переменные величины, входящие в уравнения, и все получаемые решения рассматриваются, как функции времени только для $t\ge 0$. Для времени $t<0$ все они могут быть приняты тождественно равными нулю. Характер выходного сигнала $y(t)$ зависит от целого ряда условий, однако, суждение о динамических свойствах системы составляется в результате ее исследования в некоторых стандартных условиях [11]: первое условие заключается в том, что начальным состоянием системы принимается покой; второе – определяет типовую форму входного сигнала. Известно [11], что если система в начальный момент находится в покое, то справедливо соотношение:

$$W(\bar p)\equiv 0. \tag{9}$$

Воспользуемся выражением (9) для нахождения искомых начальных значений.

Преобразуем $W(\bar p)$:

$$W(\bar p)=y(0)b_3\bar p^2+\bar p[b_2y(0)+b_3y'(0)]+b_1y(0)+b_2y'(0)+b_3y''(0)-$$
$$-x(0)a_3\bar p^2+\bar p[a_2x(0)+a_3x'(0)]-[a_1x(0)+a_2x'(0)+a_3x''(0)]$$

или

$$\begin{gathered}W(\bar p)=\bar p^2[b_3y(0)-a_3x(0)]+\bar p[b_2y(0)+b_3y'(0)-a_2x(0)-a_3x'(0)]+\\+[b_1y(0)+b_2y'(0)+b_3y''(0)-a_1x(0)-a_2x'(0)-a_3x''(0)].\end{gathered} \tag{10}$$

Из условия (9), приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $\bar p$, получаем систему уравнений для определения начальных значений $y^{(k)}(0)$, в которой для упрощения записи обозначим $y^{(k)}(0)=y_0^{(k)}, x^{(k)}(0)=x_0^{(k)}$:

$$\begin{cases} b_3y_0=a_3x_0\\ b_2y_0+b_3y_0'=a_2x_0+a_3x_0'\\ b_1y_0+b_2y_0'+b_3y_0''=a_1x_0+a_2x_0'+a_3x_0''\end{cases}. \tag{11}$$

Решив систему (11) относительно $y_0^{(k)}$, $k=\overline{0,n-1}$ получим:

$$y_0=\frac{a_3}{b_3}x_0,\quad y_0'=\frac{1}{b_3}(a_3x_0'+a_2x_0-b_2y_0),\quad y_0''=\frac{1}{b_3}(a_3x_0''+a_2x_0'+a_1x_0-b_2y_0'-b_1y_0).$$

Можно показать, что аналогичные соотношения справедливы и для цепи произвольного порядка. Окончательная рекуррентная формула для определения начальных значений отклика $y_0^{(k)}$ с использованием начальных значений воздействия $x_0^{(k)}$, отклика $y_0^{(k-1)}$ и коэффициентов a_i, b_j для цепи n-го порядка будет иметь вид:

$$y_0^{(k)}=\frac{1}{b_n}\left(\sum_{i=n-k}^{n}a_ix_0^{(i-n+k)}-\sum_{i=n-k}^{n-1}b_{i-1}y_0^{(i-n+k)}\right),\ k=\overline{0,n-1}. \tag{12}$$

Выводы:

1. В работе получены расчетные соотношения в рекуррентной форме для начальных значений отклика линейной цепи n-го порядка и его производных на основе связи с вещественными коэффициентами операторной функции цепи при произвольном воздействии.

2. В случае типовых воздействий $x(t) = 1(t)$ или $x(t) = \delta(t)$ соотношение (12) позволяет рассчитать начальные значения временных характеристик цепи.

3. Полученные результаты позволяют находить начальные условия для уравнения тока в схеме ВМГ второго и более высоких порядков с согласующим трансформатором.

Список литературы: 1. *Теория электрорадиотехнических цепей* /Гринберг Е.Г., Колобков Д.С., Макаровский А.А. и др./ Под ред Д.С.Колобкова. Харьков: Изд-во АРТА, 1964. 348с. 2. *Белецкий А.Ф.* Теория линейных электрических цепей. М.: Радио и связь, 1986. 544 с. 3. *Айзинов М.М.* Избранные вопросы теории сигналов и теории цепей. М.: Связь, 1971. 349 с. 4. *Айзинов М.М.* Анализ и синтез линейных радиотехнических цепей в переходном режиме. Л.: Энергия, 1968. 376 с. 5. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1983. 536 с. 6. *Гринченко Л.В., Милютченко И.А.* Связь параметров временных характеристик с коэффициентами операторной функции цепи. 1. Определение начальных значений. // Радиотехника. 2000. Вып. 113. С.101-104. 7. *Гринченко Л.В., Милютченко И.А.* Связь параметров временных характеристик с коэффициентами операторной функции цепи. 1. Определение постоянных интегрирования. // Радиотехника. 2000. Вып. 115. С.55-60. 8. *Fortov V.E., Didenko A.N., Karpushin Y.V. et all* Generation of high power electron beam and microwave radiation with the aid of high explosives // In: "Megagauss Magnetic Field and Pulsed Power Application". 1994. P. 939-946. 9. *Чумаков В.И.* Возбуждение дипольной антенны током ВМГ // Механіка та машинобудування. 1999. С.132-135. 10. *Лонин Ю.Ф., Пушкарев С.С., Чумаков В.И.* Проблемы создания и применения источников мощного электромагнитного излучения с питанием от взрывомагнитного генератора / Международная конференция "Теория и техника антенн" (МКТТА'95): Тез. докл. / Харьков. 1995. С.117. 11. *Теоретические основы связи и управления* /Фельдбаум А.А., Дудыкин А.Д., Мановцев А.П. и др./ Под ред. А.А.Фельдбаума. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 932 с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 01.10.2001