УДК 519.7

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ВЕКТОРАМИ И ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ НАД НИМИ

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Развивается теория компараторной идентификации для случая, когда объект идентификации описывается векторами арифметического пространства. Приведены содержательные интерпретации теории. Предложена модель компараторной идентификации, позволяющая идентифицировать линейные конечномерные объекты.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, ЦВЕТОВОЕ ЗРЕНИЕ, АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Введение

Многие сигналы естественно представлять в виде векторов, то есть наборов отдельных компонентов (признаков) [1]. Число компонентов вектора называется его размерностью. В роли компонентов вектора обычно выступают вещественные числа [2]. Множество сигналов, каждый из которых представлен в виде вектора размерности n, называется пространством размерности n. Например световые излучения обычно представляют в виде спектров, то есть конечных или бесконечных наборов вещественных чисел. Говорят о двумерности поля зрения человека, имея в виду, что каждая его точка может быть охарактеризована парой вещественных чисел – ее координатами. Говорят также о трехмерном пространстве цветовых ощущений человека, о многомерном пространстве векторов, характеризующих место работы человека (зарплата, продолжительность отпуска, расстояние от места жительства до места работы и тому подобное).

Действия над векторами чаще всего описываются линейными операциями. Пространство, на котором определены линейные операции, называется линейным [3]. Примерами линейных операций могут служить сложение световых излучений, усиление или ослабление интенсивности светового излучения, преобразование светового излучения в цвет его ощущения, оценка человеком места работы и тому подобное. В этой статье ставится задача отыскания таких полных перечней свойств, с помощью которых можно было бы осуществлять компараторную идентификацию объектов, подпадающих под понятие линейного пространства и под понятие линейной операции над векторами линейных пространств.

1. Идентификация объектов, описываемых векторами

Разработку сформулированной проблемы начнем с идентификации сигналов, описываемых в виде векторов некоторого пространства.

Пусть A – множество каких-нибудь сигналов. Предположим, что на A определены два предиката эквивалентности $E_1(x, y)$ и E_2, удовлетворяющие условию:

$$\forall x, y \in A \ \ (E_1(x,y) \wedge E_2(x,y)) \supset x = y). \qquad (1)$$

С помощью условия (1) в дальнейшем будет введено понятие двумерного пространства сигналов. Чтобы пояснить, как это делается, мы предварительно решим задачу о введении поля зрения человека. Рассмотрим испытуемого, голова которого неподвижна в пространстве и находится в вертикальном положении. Один глаз испытуемого смотрит прямо перед собой, его взгляд направлен на неподвижную точку фиксации, второй глаз закрыт. Испытуемому по очереди предъявляют различные точки ξ окружающего физического пространства и предлагают ответить на вопрос, видит ли он их или нет. В роли предъявляемой точки может использоваться, например, точечный источник света, перемещаемый в пространстве.

Пусть M – множество всех точек пространства. $N(\xi)$ – предикат на M, реализуемый испытуемым в данном опыте. Предикат N делит все пространство M на две части: если $N(\xi)=1$, то точка ξ находится в зоне видимости $N \subseteq M$ испытуемого; если же $N(\xi)=0$, то – за ее пределами, то есть в области $N \setminus M$. Область N имеет вид конуса неправильной формы (приблизительно кругового) с вершиной в оптическом центре глаза.

Из множества N произвольно выбираем две точки ξ и η и предъявляем их испытуемому. Последний должен установить, находятся ли они в точности одна за другой или нет. Своими ответами испытуемый реализует некоторый предикат $Q(\xi,\eta)$ на $N \times N$. Если $Q(\xi,\eta)=1$, то субъективные образы x и y точек ξ и η совмещаются друг с другом в поле зрения испытуемого; если же $Q(\xi,\eta)=0$, то не совмещаются. Опыт показывает, что предикат Q рефлексивен, симметричен и транзитивен (с той точностью, в пределах которой значения предиката Q можно считать однозначными). Действительно, пусть точкам ξ, η и ζ физического пространства N соответствуют их образы x, y, z – точки поля зрения испытуемого. Тогда при совпадении точек ξ и η совпадут и их субъективные образы x и y в поле зрения; если образы x и y двух точек в паре (ξ,η) совпадают, то они совпадут и для пары точек (η,ξ): если образы x, y и y, z точек в парах (ξ,η) и (η,ζ) совпадают, то образы x и z совпадут и для пары точек (ξ,ζ).

Следовательно, предикат $Q(\xi,\eta)$ есть эквивалентность. Он разбивает всю видимую часть N физического пространства M на слои, каждый из которых представляет собой бесконечный луч, исходящий из оптического центра глаза. Каждый такой луч определяет одну точку поля зрения. Множество всех точек поля зрения обозначаем символом A. Будем предъявлять испытуемому пары (x, y) точек x и y поля зрения, предлагая ему установить, видятся ли они на одной вертикали или нет. В другой серии экспериментов испытуемому предлагается установить, видятся ли точки x и y на одной горизонтали или нет.

Важно подчеркнуть, что от испытуемого требуется определить не взаимное положение двух точек физического пространства, а лишь субъективно воспринимаемое взаимное положение образов этих точек. Если испытуемому кажется, что предъявленные ему две точки поля зрения находятся на одной вертикали, то отсюда еще не следует, что соответствующие им точки физического пространства тоже лежат на одной вертикали. Своими ответами испытуемый реализует два предиката $E_1(x, y)$ и $E_2(x, y)$. Если $E_1(x, y) = 1$, то точки x и y поля зрения кажутся испытуемому находящимися на одной вертикали, если же $E_1(x, y) = 0$, то они кажутся не находящимися на ней. Если $E_2(x, y) = 1$, то точки x и y поля зрения воспринимаются лежащими на одной горизонтали, если же $E_2(x, y) = 0$, то они лежат на разных горизонталях.

Опыты показывают, что предикаты E_1 и E_2 суть эквивалентности. Они формируют два разбиения поля зрения: одно – в виде семейства горизонтальный линий и другое – в виде семейства вертикальных линий. Ясно, что любые вертикальная и горизонтальная линии могут пересекаться не более, чем в одной точке поля зрения. Случай, когда вертикаль и горизонталь не пересекаются, возможен: это происходит тогда, когда точка их пересечения попадает в область слепого пятна или же выходит за границы поля зрения. Таким образом, предикаты E_1 и E_2 удовлетворяют условию (1), которое в данной интерпретации гласит: если точки x и y поля зрения A лежат одновременно на одной вертикальной линии и на одной горизонтальной , то они совпадают друг с другом, то есть $x = y$. Образуем множество B_1 всех вертикальных и множество B_2 всех горизонтальных линий в поле зрения A. Теперь каждую точку x поля зрения A можно представить в виде пары соответствующих ей координат (u_1, u_2), где $u_1 \in B_1$ – вертикаль, проходящая через точку x, и $u_2 \in B_2$ – горизонталь, проходящая через ту же точку. Таким образом, множество точек поля зрения A мы превратили за счет введения двух эквивалентностей E_1 и E_2 в двумерное пространство T, являющееся подмножеством декартова произведения $B_1 \times B_2$ множеств B_1 и B_2.

В общем случае двумерное пространство T для множества A вводится предикатами E_1 и E_2, удовлетворяющими условию (1) следующим образом. Формируем разбиения B_1 и B_2 и характеристические функции $f_1 : A \to B_1$ и $f_2 : A \to B_2$, соответствующие эквивалентностям E_1 и E_2. Классы $u_1 = f_1(x)$ и $u_2 = f_2(x)$ разбиений B_1 и B_2 принимаем в качестве абсциссы и ординаты точки x. Пара (u_1, u_2) однозначно определяет точку x. Совокупность всех пар (u_1, u_2), соответствующих всем точкам x множества A, принимаем в роли двумерного пространства T для множества A. Пространство T является подмножеством декартова произведения $B_1 \times B_2$ множеств B_1 и B_2. Множества B_1 и B_2 принимаем в роли координатных осей пространства T. В том случае, когда пространство T совпадает с $B_1 \times B_2$, оно называется полным. Для полноты пространства T необходимо и достаточно, чтобы эквивалентности E_1 и E_2, его вводящие, дополнительно удовлетворяли условию:

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \exists y \in A \ (E_1(x_1, y) \wedge E_2(x_2, y)). \qquad (2)$$

Если T – полное пространство, то существует сюръекция $y : B_1 \times B_2 \to A$, взаимно однозначно переводящая векторы (u_1, u_2) пространства T в соответствующие им точки x множества A. Обратный перевод точки x множества A в компоненты u_1, u_2 ее вектора (u_1, u_2) осуществляется функциями $f_1 : A \to B_1$ и $f_2 : A \to B_2$.

Изложенный выше способ введения двумерного пространства легко обобщается на случай пространства произвольной размерности n. Неполное пространство T для множества A вводится эквивалентностями $E_1, E_2, \ldots, E_n$ на A, удовлетворяющими условию:

$$\forall x, y \in A \ (E_1(x,y) \wedge E_2(x,y) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge E_n(x,y) \supset x = y).$$

Для полноты пространства T необходимо и достаточно, чтобы эквивалентности $E_1, E_2, \ldots, E_n$, его вводящие, дополнительно удовлетворяли условию:

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in A \ \exists y \in A$$
$$(E_1(x_1, y) \wedge E_2(x_2, y) \wedge \ldots \wedge E_n(x_n, y)). \qquad (4)$$

Пространство T для множества A вводится предикатами $E_1, E_2, \ldots, E_n$, удовлетворяющими условию (3), следующим образом. Формируем разбиения $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и характеристические функции $f_1 : A \to B_1$, $f_2 : A \to B_2$, ..., $f_n : A \to B_n$, соответствующие эквивалентностям $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Классы $u_1 = f_1(x)$, $u_2 = f_2(x)$, ... , $u_n = f_n(x)$ разбиений $E_1, E_2, \ldots, E_n$ принимаем в качестве координат точки x. Набор $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ однозначно определяет точку x. Совокупность всех наборов $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, соответствующих точкам x множества A, принимаем в роли n-мерного пространства для множества A. Пространство T является подмножеством декартова произведения $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Множества $B_1, B_2, \ldots, B_n$ принимаем в роли координатных осей пространства T. Только в том случае, когда пространство T полно, оно совпадает с декартовым произведением $B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$. Любое n-мерное пространство T для множества A полностью характеризуется множествами B_1, B_2, ..., B_n сюръекциями $f_1 : A \to B_1$, $f_2 : A \to B_2, ...,$ $f_n : A \to B_n$ и однозначным отображением g, действующим из $B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ на A. Для полного пространства T отображение g превращается в сюръекцию $g : B_1 \times B_2 \times ... \times B_n \to A$. Сюръекции $f_1, f_2, ..., f_n$ однозначно определяют эквивалентности E_1, E_2, ..., E_n, а наличие однозначного отображения g обеспечивает выполнение условия (3). Наличие же сюръекции g обеспечивает выполнение условия (4).

2. Идентификация объектов, описываемых векторами арифметического пространства

Пусть A – множество и $T = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ – его полное пространство. Предположим, что $B_1 = B_2 = ... = B_n = R$ – множество вещественных чисел с заданными на нем операциями сложения и умножения. Множество R называется числовым полем, а его элементы – скалярами. Множество $T = R^n$ называется n-мерным арифметическим пространством [4], если на нем введены операции $x + y$ сложения векторов $x, y \in R^n$ и операция $\alpha * x$ умножения вещественного числа $\alpha \in R$ на вектор $x \in R^n$, определяемые следующим образом: если $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, то

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_1), \qquad (5)$$

если $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, то

$$\alpha x = (\alpha * \alpha_1, \alpha * \alpha_2, ..., \alpha * \alpha_n). \qquad (6)$$

Из этих определений следует, что для любых $\alpha, \beta, \gamma \in R$ и $x, y, z \in R^n$ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, $0 + \alpha = \alpha$, $\alpha + (-\alpha) = 0$, $\alpha 1 = \alpha$, $\alpha \frac{1}{\alpha} = 1$, $x + y = y + x$, $(x + y) + z = x + (y + z)$, $x + 0 = x$, $x + (-x) = 0$, $1x = x$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$. Здесь $0 = (0, 0, ..., 0)$, $-x = (-1)x$.

Пользуясь приведенными определениями, покажем, что поле зрения человека можно с определенным приближением идентифицировать как двумерное арифметическое пространство. С этой целью сначала установим, что совокупности B_1 и B_2 всех вертикальных и горизонтальных линий поля зрения A можно отождествить с множествами вещественных чисел. Проведем горизонталь α и вертикаль β через точку фиксации 0 поля зрения (рис. 1), называя эти линии координатными осями поля зрения – осью абсцисс и осью ординат. Поставим во взаимно однозначное соответствие каждой вертикали u_1 точку ее пересечения с осью абсцисс α и каждой горизонтали u_2 – точку ее пересечения с осью ординат β.

Вместо вертикалей и горизонталей поля зрения теперь будем рассматривать соответствующие им точки на осях абсцисс и ординат. Выберем на оси абсцисс

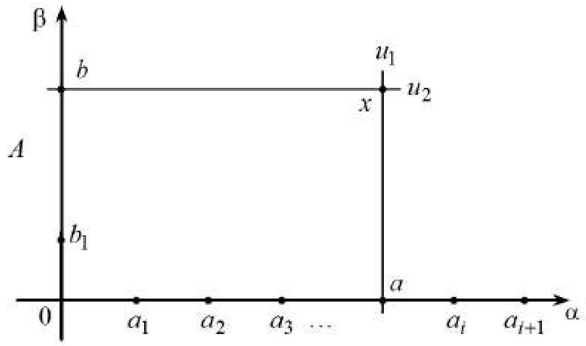

Рис. 1

какую-нибудь точку a_1, близкую к точке фиксации 0, но не совпадающую с ней. Затем правее точки a_1 находим на оси α точку a_2 такую, чтобы расстояния между точками 0, a_1 и 0, a_2 совпали друг с другом. После этого справа от точки a_2 отыскиваем точку a_3, исходя из условия равенства расстояний между точками 0, a_1 и a_2, a_3, и так далее.

Операцию отыскания точки a_{i+1} по точке a_i отождествляем с функцией счета $a_{i+1} = a_i + 1$, точку a_1 отождествляем с единицей натурального ряда, а бесконечный ряд точек a_1, a_2,... на оси абсцисс отождествляем со всем натуральным рядом. Все четыре аксиомы натурального ряда, приведенные в предыдущей главе, выполняются. Приближенность такого способа идентификации поля зрения обнаруживается в том, что после выполнения некоторого конечного числа шагов мы доходим до границы поля зрения и ряд точек обрывается. Аналогичным образом на оси α выявляются точки, соответствующие рациональным и вещественным числам, а также выявляются операции над этими точками, которые может производить испытуемый, соответствующие сложению и умножению чисел. Кроме того, выявляется способность испытуемого упорядочивать точки поля зрения на оси абсцисс, которую идентифицируем как отношение порядка на множесве вещественных чисел. Неточность такого способа идентификации состоит в том, что точки, достаточно близкие друг к другу, глазом не различаются ввиду его ограниченной разрешающей способности, кроме того, операции сложения и умножения точек поля зрения на оси α оказываются не всюду определенными, а частичными всякий раз, когда сумма или произведение представляет собой точку, выходящую за пределы поля зрения или попадающую в область слепого пятна. В остальном все аксиомы теории вещественных чисел, перечисленные в предыдущей главе, выполняются. Аналогично, точки оси ординат поля зрения также идентифицируем как вещественные числа. При введении точки b_1, соответствующей единице натурального ряда на оси β, следует учесть, что расстояния между точками 0, a_1 и 0, b_1 должны совпадать. Сложение произвольных точек поля зрения и умножения их на число формализуется с помощью определений (5) и (6). Оказывается, что испытуемый обладает способностью производить такие операции. Возможность производить эти действия в конечном счете основывается на способности испытуемого устанавливать порядок на множестве расстояний между точками поля зрения.

Рассмотрим еще одну необходимую для дальнейшего изложения содержательную интерпретацию арифметического пространства. Речь идет о представлении световых излучений векторами n-мерного арифметического пространства. Как известно, любое световое излучение можно разложить призмой в спектр, то есть на простые составляющие. Субъективно спектр светового излучения воспринимается как линейно упорядоченнное в поле зрения множество зрительных ощущений разной цветности. Полученый отрезок разбиваем на n участков a_1, a_2, ..., a_n, выбирая число n и размеры участков с таким расчетом, чтобы цветность на каждом участке не менялась. Мощность светового излучения измеряем болометром, представляющим собой термометр специальной конструкции. Опыт показывает, что имеет место взаимно однозначное соответствие между показаниями болометра и яркостью зрительного ощущения соответствующей линии в спектре. Этот факт дает возможность идентифицировать совокупность B_i всех яркостей i-той линии спектра как множество вещественных чисел. Пусть A – множество всех световых излучений. Каждое из множеств B_i ($i=\overline{1,n}$) абстрактно вводится с помощью эквивалентности E_i, определяемой следующим образом: если яркости зрительных ощущений i-той линии спектров двух световых излучений совпадают, то $E_i(x, y) = 1$, если же не совпадают, то $E_i(x, y) = 0$.

Опыт показывает, что испытуемый способен практически воспроизводить своим поведением каждый из предикатов E_i с довольно высокой точностью. Кроме того, оказывается, что предикаты E_i подчиняются условиям (3) и (4). Следовательно, экквалентностями E_i можно ввести полное пространство $T = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ размерности n, соответствующее множеству A. Сложение, умножение и порядок на множествах B_i определяем как соответствующие операции над мощностями соответствующих спектральных линий, рассматривая эти мощности просто как вещественные числа. Сложение световых излучений определяем равенством (5) как покоординатное сложение их спектральных линий. Умножение вещественного числа на световое излучение определяем аналогично равенством (6). Физически сложение излучений осуществляется простым совмещением их в пространстве. Умножение числа на световое излучение достигается диафрагмированием светового потока (при этом число представлено площадью отверстия диафрагмы) или же приближением или удалением источника света от освещаемой поверхности (в этом случае множитель светового излучения обратно пропорционален квадрату расстояния).

В роли базисных элементов $p_1, p_2, ..., p_n$ пространства T можно взять n излучений $p_1(\lambda), p_2(\lambda), ..., p_n(\lambda)$, заданных соответственно на интервалах длин волн $[\lambda_0, \lambda_1]$, $[\lambda_1, \lambda_2]$,..., $[\lambda_{n-1}, \lambda_n]$. Каждое из этих излучений имеет на интервале своего задания постоянную интенсивность и охватывает единичную площадь. Здесь $[\lambda_{n-1}, \lambda_n]$ – диапазон длин волн электромагнитных колебаний, видимых глазом (λ_0=380 нм, λ_n=780 нм) [5]. Пусть $x(\lambda)$ – непрерывный спектр светового излучения x, понимаемый в физическом смысле этого слова. Определим числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ следующим образом:

$$\alpha_i = \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} x(\lambda) d\lambda. \tag{7}$$

Выбирая в роли n достаточно большое натуральное число и разбивая достаточно равномерно интервал $[\lambda_0, \lambda_n]$ точками $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$, всегда можно добиться того, чтобы спектр $x(\lambda)$ любого излучения x с требуемой точностью совпал со спектром

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(\lambda)$$

аппроксимирующего излучения $\alpha_1 p_1, \alpha_2 p_2, ..., \alpha_n p_n$. Это означает, что с достаточной точностью выполняется равенство

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(\lambda), \tag{8}$$

следовательно числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ можно принять в роли координат вектора x.

Физические свойства световых излучений таковы, что все свойства конечномерного векторного пространства для них выполняется в пределах точности измерения спектров излучений. Правда, действуют эти свойства на несколько суженной основе. Дело в том, что спектр ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$) любого реального излучения не может иметь отрицательных компонентов, поскольку числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ задают мощность излучения на отдельных участках его спектра, которая всегда неотрицательна. Поэтому выполнение свойств арифметического векторного пространства может быть экспериментально продемонстрирована не для всех векторов пространства T, а только для некоторой его части T_0, называемой положительным конусом [6]. Таким образом, операции над скалярами и векторами, введенные в векторном пространстве, в физическом смысле оказываются не всюду определенными, а частичными. Тем не менее, ничто не мешает при математических действиях со скалярами и векторами использовать также и физически неинтерпретируемые спектры с отрицательными компонентами, когда это окажется целесообразным. Так, например, к спектру реального излучения можно прибавить спектр фиктивного излучения с отрицательными компонентами при условии, что в результате получится спектр излучения из множества T_0, то есть такого излучения, которое можно физически предъявить испытуемому. Действие свойств арифметического пространства можно условно распространить на все векторы полного пространства T, но при этом надо иметь в виду, что эти свойства приобретают физический смысл только в том случае, когда в них будут фигурировать лишь векторы из множества T_0.

3. Установление условий существования линейного предиката

Пусть на декартовом квадрате m-мерного векторного пространства M над полем G задан предикат E. Базис ($p_1, p_2, ..., p_n$) пространства M произвольно фиксирован. Предикат E назовем линейным, если для любых $x, y \in M$ он может быть выражен в виде

$$E(x, y) = D(F(x), F(y)), \qquad (9)$$

где

$$F(x) = (xk_1, xk_2, ..., xk_n), \qquad (10)$$

$$xk_i = \xi_1 \chi_{1i} + \xi_2 \chi_{2i} + ... + \xi_m \chi_{mi}. \qquad (11)$$

Здесь $k_1, k_2, ..., k_n$ – фиксированные линейно независимые векторы, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$ – координаты вектора x; $\chi_{1i}, \chi_{2i}, ..., \chi_{mi}$ – координаты вектора k_i; D – предикат равенства, заданный на $G^n \times G^n$. Имеется в виду, что $n \le m$. Символом F обозначен линейный оператор, отображающий M в G^n.

Предикат E назовем аддитивным, если для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ из x_1Ey_1 и x_2Ey_2 следует $(x_1 + y_1)E(x_2 + y_2)$. Предикат E назовем однородным, если для любых $\alpha \in G$ и $x, y \in M$ из xEy следует $\alpha x E \alpha y$. Предикат E назовем n-мерным, если существуют векторы $e_1, e_2, ..., e_n \in M$ такие, что равенство

$$E(x, \sum_{i=1}^{n} F_i(x) e_i) = 1 \qquad (12)$$

выполняется для каждого $x \in M$ при единственном наборе коэффициентов $F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)$. Здесь $F_1, F_2, ..., F_n$ – фиксированные функции, определенные на множестве M со значениями в множестве G.

Ниже формулируется и доказывается теорема об условиях существования линейного предиката.

Теорема. Предикат E линеен в том и только том случае, когда он рефлексивен, симметричен, транзитивен, аддитивен, однороден и n-мерен.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что предикат E линеен, и выведем отсюда его рефлексивность, симметричность, транзитивность, аддитивность, однородность и n-мерность.

Выводим рефлексивность. Для любого $x \in M$ $F(x)DF(x)$. В силу линейности предиката E имеем: xEx.

Выводим симметричность. Предположим, что $x, y \in M$ таковы, что xEy. Тогда $F(x)DF(y)$, $F(y)DF(x)$, yEx.

Выводим транзитивность. Пусть $x, y, z \in M$ таковы, что xEy и xEz. Тогда $F(x)DF(y)$, $F(y)DF(z)$, $F(x)DF(z)$, xEz.

Выводим аддитивность. Пусть $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ выбраны так, что x_1Ey_1 и x_2Ey_2. Отсюда следует, что $F(x_1)DF(y_1)$ и $F(x_2)DF(y_2)$. Ввиду линейности предиката E для любого $i = \overline{1, n}$ имеем $x_1k_i = y_1k_i$ и $x_2k_i = y_2k_i$. Отсюда по свойству (1) выводим $x_1k_i + x_2k_i = y_1k_i + y_2k_i$. Пользуясь законами (9), (13) и (14), получаем $(x_1 + x_2)k_i = (y_1 + y_2)k_i$. Следовательно $F(x_1 + x_2)DF(y_1 + y_2)$, а значит $(x_1 + x_2)E(y_1 + y_2)$.

Выводим однородность. Пусть $x, y \in M$ таковы, что xEy. Это означает, что $xk_i = yk_i$. Для произвольного $\alpha \in G$ в силу (17) имеем $\alpha(xk_i) = \alpha(yk_i)$. Пользуясь законами (7)–(9), получаем $(\alpha x)k_i = (\alpha y)k_i$. Отсюда следует $F(\alpha x)DF(\alpha y)$ $\alpha x E \alpha y$.

Выводим n-мерность. Выберем векторы $e_1, e_2, ..., e_n \in M$ так, чтобы набор ($e_1, e_2, ..., e_n$) был дуален набору векторов ($k_1, k_2, ..., k_n$). Как известно [7], такой набор всегда существует. Требование n-мерности предиката E означает, что уравнение (12) при каждом $x \in M$ однозначно разрешимо относительно набора коэффициентов ($F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)$). Докажем это. Уравнение (12) согласно (9)–(11) равносильно системе уравнений

$$xk_j = (\sum_{i=1}^{n} F_j(x) e_i) k_j,$$

где $j = \overline{1, n}$. Используя законы (18)–(20), последнюю систему равенств переписываем в виде:

$$xk_j = (\sum_{i=1}^{n} F_i(x))(e_i k_j).$$

В силу дуальности наборов векторов ($e_1, e_2, ..., e_n$) и ($k_1, k_2, ..., k_n$) имеем $e_i k_j = 0$ при $i \ne j$ и $e_i k_j = 1$ при $i = j$. Поэтому последняя система $F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)$ равенств запишется в виде $F_j(x) = xk_j$. Это означает, что коэффициенты $F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)$ при каждом x однозначно определены. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что предикат E рефлексивен, симметричен, транзитивен, аддитивен, однороден и n-мерен, и выведем отсюда его линейность. Докажем сначала, что функции $F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)$, фигурирующие в условии n-мерности, линейны. Для этого нужно убедиться в их адитивности и однородности [8]. В силу n-мерности предиката E для любых $x, y \in M$ имеет место равенство (12), а также равенства

$$E(y, \sum_{i=1}^{n} F_i(y) e_i) = 1, \qquad (13)$$

$$E(x + y, \sum_{i=1}^{n} F_i(x + y) e_i) = 1, \qquad (14)$$

Пользуясь свойством аддитивности предиката E, из (12) и (13) выводим

$$E(x + y, \sum_{i=1}^{n} F_i(x), \sum_{i=1}^{n} F_i(y)) e_i) = 1. \qquad (15)$$

В силу n-мерности предиката E множители при векторах e_i в (14) и (15) совпадают, поэтому $F_i(x+x)=F_i(x)+F_i(y)$ при всех $i=\overline{1,n}$. Таким образом, функции $F_1(x),F_2(x),...,F_n(x)$ аддитивны.

В силу n-мерности предиката E для любых $\alpha \in G$ и $x \in M$ имеем:

$$E(\alpha x, \sum_{i=1}^{n} F_i(\alpha x)e_i)=1. \qquad (16)$$

Используя однородность предиката E из (11) выводим

$$E(\alpha x, \sum_{i=1}^{n} F_i(x)e_i)=1. \qquad (17)$$

Производим преобразования в последнем равенстве с помощью законов (13) и (14):

$$E(\alpha x, \sum_{i=1}^{n} (\alpha F_i(x))e_i)=1. \qquad (18)$$

В силу n-мерности предиката E множители при векторах e_i в (16) и (17) совпадают, поэтому $F_i(\alpha x)=\alpha F_i(x)$ при любых α и x для всех $i=\overline{1,n}$. Таким образом, функции $F_1(x),F_2(x),...,F_n(x)$ однородны, следовательно, они линейны.

Любая линейная функция $F(x)$ на M со значениями в множестве G может быть представлена в виде $F(x) = xk$ [8], где k – некоторый вектор из M. Значит, найдутся векторы $k_1,k_2,...,k_n \in G$ такие, что

$$F_1(x)=xk_1,\ F_2(x)=xk_2,...,\ F_n(x)=xk_n. \qquad (19)$$

Докажем далее, что для любых $x,y \in M$ xEy в том и только том случае, когда $F_i(x)=F_i(y)$ для всех $i=\overline{1,n}$. Пусть xEy. Из этого соотношения и из (13) с помощью свойства транзитивности предиката E выводим:

$$E(x, \sum_{i=1}^{n} F_i(y)e_i)=1.$$

Из (12) и только что записанного равенства, используя свойство n-мерности предиката E, находим $F_i(x)=F_i(y)$ для всех $i=\overline{1,n}$. Пусть теперь $F_i(x)=F_i(y)$ для всех $i=\overline{1,n}$. Отсюда следует:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x)e_i=\sum_{i=1}^{n} F_i(y)e_i.$$

Из последнего равенства и (13) находим

$$E(y, \sum_{i=1}^{n} F_i(x)e_i)=1.$$

Из (12) и только что записанного равенства с помощью свойств симметричности и транзитивности выводим xEy.

Доказанное означает, что условие xEy равносильно равенству

$$(F_1(x),F_2(x),...,F_n(x))=(F_1(y),F_2(y),...,F_n(y)).$$

Для каждой линейной функции $F: M \to G$ найдется такое $k \in M$, что $F(x)=xk$ для всех $x \in M$. Поэтому $F_i(x)=xk_i$ и $F_i(y)=yk_i$ для любых $x,y \in M$ и всех $i=\overline{1,n}$. Это означает, что условие xEy равносильно равенству $(xk_1,xk_2,...,xk_n)=(yk_1,yk_2,...,yk_n)$, то есть равенству $F(x)=F(y)$. Итак, мы доказали, что любой рефлексвный, симметричный, транзитивный, аддитивный, однородный и n-мерный предикат может быть выражен в виде (9)–(11) при подходящем выборе векторов $k_1,k_2,...,k_n$. Осталось доказать линейную независимость векторов $k_1,k_2,...,k_n$. С этой целью установим, что функции $F_1(x),F_2(x),...,F_n(x)$ линейно независимы. Для этого достаточно доказать, что равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_i(x)=0$$

выполняется для всех $x \in M$ лишь в том случае, когда все коэффициенты γ_i равны нулю.

Докажем последнее утверждение. Доказательство ведем от противного. Предположим, что это утверждение неверно. Тогда найдется такой номер j из множества $\{1,2,...,n\}$, для которого при любом x

$$F_j(x)=\sum_{i=1,\ j\neq i}^{n} \beta_i F_i(x), \qquad (20)$$

где $\beta_1,\beta_2,...,\beta_{j-1},\beta_{j+1},...,\beta_n$ – подходящие коэффициенты. Предикат E рефлексивен, значит $E(e_i,e_i)=1$ для любого $j=\overline{1,n}$. Иначе говоря,

$$E(e_j, 0*e_1+0*e_2+...+0*e_{j-1}+0*e_j+0*e_{j+1}+... \\ +0*e_n)=1.$$

По свойству n-мерности предиката E из последнего равенства выводим $F_j(e_j)=1$; для всех же $i \neq j$ имеем $F_j(e_j)=0$. Вместе с тем, подставляя в (20) $x = e_j$, находим:

$$F_j(e_j)=\beta_1 F_1(e_j)+\beta_2 F_2(e_j)+...+\beta_{j-1}F_{j-1}(e_j)+ \\ +\beta_{j+1}F_{j+1}(e_j)+...+\beta_n F_n(e_j)=\beta_1 0+\beta_2 0+ \\ +...+\beta_{j-1}0+\beta_{j+1}0+...+\beta_n 0.$$

Получили равенство $1 = 0$. Однако, известно [9], что в любом векторном пространстве $1 \neq 0$. Мы пришли к противоречию. Отсюда вытекает линейная независимость функций $F_1(x),F_2(x),...,F_n(x)$, а следовательно и линейная независимость векторов $k_1,k_2,...,k_n$. Достаточность доказана.

Итак, мы доказали, что все рефлексивные, симметричные, транзитивные, аддитивные, однородные и n-мерные предикаты, и только такие предикаты, могут быть представлены в виде

$$E(x,y)=D((F_1(x),F_2(x),...,F_n(x)), \\ (F_1(y),F_2(y),...,F_n(y))),$$

где $F_1(x),F_2(x),...,F_n(x)$ – подходящие линейно независимые линейные функции. Теорема доказана.

4. Содержательная интерпретация линейного предиката

Прикладное значение теоремы состоит в том, что она указывает полную систему признаков линейной конечномерной операции F, идентифицируемой компараторным методом. Если предикат E, реализуемый системой компараторной идентификации объекта F, обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, однородности, аддитивности и n-мерности, то объект идентификации F можно описать в виде линейного оператора. В противном случае это невозможно. Таким образом, теорема указывает практический способ распознавания любого объекта, который можно идентифицировать рассматриваемым в диссертации способом. Рассмотрим способ практической проверки характеристических свойств линейного объекта на примере зрительной системы человека. О свойствах рефлексивности, симметричности и транзитивности системы цветового зрения человека речь уже шла в [10].

Специфика проверки свойств аддитивности, однородности и n-мерности в случае цветового зрения человека состоит в том, что реально не существует световых излучений со спектрами, имеющими отрицательные компоненты. Кроме того, испытуемому нельзя предъявить излучения слишком большой интенсивности, иначе глаз ослепнет. Таким образом, в множестве M всевозможных теоретически возможных входных сигналов органа зрения имеется некоторая часть M_1 всех тех световых излучений, которые реально могут быть предъявлены испытуемому в процессе идентификации его зрительной системы. Поскольку законы рефлексивности, симметричности и транзитивности выполняются для всех входных сигналов органа зрения, содержащихся в множестве M_1, то они могут быть чисто формально распространены на все множесво M. Производя такое доопределение предиката E, мы не входим в противоречие с фактами зрения.

Закон аддитивности следует проверять на всех тех реальных излучениях $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M_1$, суммы которых $x_1 + y_1$ и $x_2 + y_2$ также не выходят за пределы множества M_1. Кроме того, в роли равновыглядящих излучений можно брать любые равные элементы x и x множества M с физически нереализуемыми спектрами, поскольку закон рефлексивности только что был распространен на все множество M. Таким образом, если реальные излучения x_1, y_1 выглядят для данного испытуемого равноцветными, то должны выглядеть равноцветными и излучения x_1+x и y_1+x, даже если сигнал x имеет физически нереализуемый спектр с отрицательными компонентами. Единственное ограничение при выборе сигнала x состоит в том, чтобы сигналы x_1+x и y_1+x были физически реализуемы, то есть входили в состав множества M_1. Если это условие не будет выполняться, то опыт с предъявлением суммарных излучений просто нельзя будет выполнить на практике. Известно, что при всевозможных проверках такого рода закон аддитивности выполняется с той точностью, с которой реализуется предикат E [11]. Это обстоятельство дает нам право, не вступая в противоречие с фактами, распространить действие закона аддитивности на все элементы множества M.

Закон однородности следует проверять на всех тех реальных излучениях $x, y \in M_1$ и числах $\alpha \in G$, произведения которых αx и αy не выходят за пределы множества M_1. Известно [12], что при всевозможных проверках такого рода закон однородности выполняется с той точностью, с которой фактически реализуется предикат E. Опираясь на этот факт, мы распространяем действие закона однородности на все элементы множества M и множества G. Пользуясь законом однородности, можно еще более разнообразить проверку закона аддитивности. Пусть имеются две пары x_1, x_2 и y_1, y_2 одноцветных излучений. Тогда при любых $\alpha, \beta \in G$ элементы $\alpha x_1, \alpha x_2$ и $\beta y_1, \beta y_2$ следует признать одноцветными, даже если они физически нереализуемы. Если суммарные излучения $\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2$ могут быть предъявлены испытуемому (то есть принадлежат множеству M_1), то они должны породить в сознании испытуемого одинаковые цвета. В практике колориметрических измерений проводились и такого рода опыты, они неизменно подтверждали закон аддитивности [13].

Закон n-мерности при данной интерпретации в эксперименте проверяется при $n = 3$. Предположим, что на левом поле сравнения сформировано световое излучение $x + \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2 + \alpha'_3 e_3$, а на правом – излучение $\alpha''_1 e_1 + \alpha''_2 e_2 + \alpha''_3 e_3$. Здесь e_1, e_2, e_3 – специально подобранные элементы множества M. В роли этих элементов не обязательно использовать физически реализуемые световые излучения. Коэффициенты $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3$ также можно брать произвольными из множества G. Символом x обозначен произвольный элемент множества M. В частности, им может быть элемент множества M_1, то есть физически реализуемое световое излучение. Эксперимент состоит в том, что испытуемый сравнивает цвета полей сравнения и устанавливает их совпадение или несовпадение.

В качестве значений функций $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$, фигурирующих в законе трехмерности, следует брать коэффициенты $\alpha'_1 - \alpha''_1, \alpha'_2 - \alpha''_2, \alpha'_3 - \alpha''_3$. Закон трехмерности будет выполняться, если для каждого элемента x, принадлежащего множеству M, в эксперименте наблюдается равенство цветов полей сравнения при единственном наборе значений коэффициентов $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$. Обширная практика колориметрических измерений [14] показывает, что закон трехмерности выполняется во всех без исключения случаях (для лиц с нормальным зрением, в патологических случаях этот закон выполняется в двумерной или одномерной формулировке) с той точностью, с которой испытуемый реализует предикат E. Коэффициенты $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$ называются координатами цвета, соответствующего световому излучению x.

Итак, можно с полным основанием утверждать, что все условия, при которых вступает в силу теорема, выполняются применительно к зрительной системе человека. Это означает, что преобразование светового излучения в цвет, осуществляемое органом зрения человека, может быть математически описано в форме линейного оператора, отображающего m-мерное пространство световых излучений, где m – число линий в спектре светового излучения, в трехмерное пространство цветов. Подобно тому, как это только что сделано для цветового зрения человека, с помощью теоремы можно провести структурную идентификацию любого физического, технического или социально-экономического объекта и в результате выяснить, можно ли его отнести к классу конечномерных линейных объектов. Если да, то этот объект можно будет математически описать, пользуясь изложенными ниже методами параметрической компараторной идентификации.

Выводы

В статье разработан способ компараторной идентификации систем сигналов, формально описываемых как конечномерные линейные пространства. С помощью этого метода математически описано поле зрения человека как часть двумерного линейного пространства и множество всех световых излучений – как часть многомерного линейного пространства.

Введено понятие линейного предиката, с помощью которого можно выполнить компараторную идентификацию любого линейного преобразователя сигналов многомерных векторных пространств. Сформулирована и доказана теорема о необходимых и достаточных признаках линейного предиката, при наличии которых обеспечивается линейность охватываемого им преобразователя сигналов. С помощью этой теоремы произведена идентификация преобразования светового излучения в зрительное ощущение, осуществляемое органом зрения человека, в виде линейного оператора, отображающего многомерное пространство световых излучений в трехмерное пространство цветов.

Список литературы: **1.** *Хедли Дж.* Линейная алгебра. –М.: Наука, 1984. –415 с. **2.** *Шилов Г.Е.* Математический анализ (конечномерные линейные пространства). –М.: Наука, 1969. –432 с. **3.** *Шикин Е.В.* Линейные пространства и отображения. –М.: Изд-во МГУ, 1987. –312 с. **4.** *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы, общая теория. –М.: ИЛ, 1974. –895 с. **5.** *Мешков В.В.* Основы светотехники. Ч. 2. –М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. –416 с. **6.** *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. –М.: Наука, 1984. –415 с. **7.** *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. –М.: Наука, 1971. –271 с. **8.** *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. –М.: Наука, 1969. –475 с. **9.** *Варден В.Д.*. Алгебра. –М.: Наука, 1979. –623 с. **10.** *Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Об общей теории компараторной идентификации // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал.– 2008.– № 2. –С. 13–22. **11.** *Нюберг Н.Д.* Грассмана законы // Физический энциклопедический словарь. Т. 1. –М.: Сов. энциклопедия, 1960. –С. 136. **12.** *Нюберг Н.Д.* Курс цветоведения. –М.: Гизлегпром, 1932. –140 с. **13.** *Гуревич М.М.* Цвет и его измерение. –М. –Л.: Изд-во АН СССР, 1950. –268 с. **14.** *Федоров Н.Т.* Общее цветоведение. –М.: Гостехтеориздат, 1939. –183 с.

Поступила в редколлегию 19.01.2009

УДК 519.7

Ідентифікація об'єктів, що описуються векторами й лінійними операціями над ними / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал.– 2009.– № 1(70).– С. 3–10.

У статті розвивається теорія компараторної ідентифікації для випадку, коли об'єкт ідентифікації описується векторами арифметичного простору. Запропоновано модель компараторної ідентифікації, що дозволяє ідентифікувати лінійні об'єкти. Наведено змістовні інтерпретації математичних положень.

Іл.: 1. Бібліогр.: 14 найм.

UDC 519.7

Identification of the objects described by vectors and linear operations over them / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2009. –№1(70).– P. 3–10.

In article the comparator identifications theory for a case when the object of identification is described by vectors of arithmetic space develops. The identification comparator model which allows to identify linear objects is offered. Substantial interpretations of mathematical positions are resulted.

Fig.: 1. Ref.: 14 items.