

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АСИММЕТРИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Задачи, связанные с исследованием нелинейных колебаний, в частности, ультрагармонических, занимают важное место в современной радиофизике и имеют широкое практическое применение. В последнее время возрос интерес к существенно нелинейным параметрическим системам (НПС), работающим в высших зонах возбуждения. Характер возбуждения и режимы стационарных колебаний в НПС достаточно хорошо исследованы в области субгармонических колебаний, ряд публикаций посвящен рассмотрению колебаний в высших зонах неустойчивости [1]. При этом принималось допущение об идентичности параметров системы. Поэтому, несмотря на то, что явления в симметричных нелинейных системах достаточно хорошо изучены, мало исследована зависимость режимов параметрического возбуждения колебаний и характера взаимодействий в асимметричной системе. Наличие неидентичности структуры вызывает ударное возбуждение системы и оказывает влияние на ее амплитудные и частотные характеристики. Рассмотрение подобного круга вопросов имеет научный и практический интерес в области создания новых принципов построения широкого круга быстродействующих, многофункциональных преобразователей и многостабильных пороговых устройств.

Нашей целью, изложенной в статье, является построение и анализ математической модели параметрических взаимодействий нелинейной системы с внешней гармонической силой при отклонении физических параметров системы на некоторую величину и получение общих уравнений для анализа нелинейных колебательных систем в произвольной зоне неустойчивости.

Симметричная индуктивная НПС, параметрический генератор при гармоническом воздействии ($U(t) = U_m \sin \omega t$, с использованием аппроксимации нелинейной характеристики намагничивания $H = f(B)$ в виде $H = \alpha sh \beta B$, где α, β – коэффициенты аппроксимации; B, H – мгновенные значения магнитной индукции и напряженности магнитного поля в сердечнике), описывается следующими уравнениями [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} + \gamma_1 sh \frac{x}{2} ch \frac{y}{2} = U'_m \sin \tau, \\ \ddot{y} + \gamma_2 ch \frac{x}{2} sh \frac{y}{2} + \gamma_3 \frac{d}{d\tau} (ch \frac{x}{2} sh \frac{y}{2}) = 0, \end{cases}$$

$$\text{где } x = \beta(B_I + B_{II}); \quad y = \beta(B_I - B_{II}); \quad \tau = \omega t; \quad \gamma_1 = \frac{\alpha \beta l R_1}{SW_1^2 \omega}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha \beta l R_2}{SW_2^2 \omega}; \quad \gamma_3 = \frac{\alpha \beta l}{SW_2^2 \omega^2 C};$$

$U'_m = \frac{\beta U_m}{SW_1 \omega}$; B_I, B_{II} – мгновенные значения индукции магнитного поля в первом и втором сердечниках; S и l – сечение и длина средней магнитной линии сердечников; W_1 и W_2 – число витков в цепи возбуждения и резонансной цепи; R_1 и R_2 – активные сопротивления соответственно цепи возбуждения и резонансной цепи; C – емкость резонансной цепи.

Рассмотрим физические процессы в такой диссипативной системе при наличии асимметрии и воздействии гармонического внешнего поля с постоянной составляющей. Учтем асимметрию параметров системы через их отклонение от среднего значения. Неидентичность магнитных сердечников будет выражаться различием коэффициентов аппроксимации: $\alpha_1 = \alpha(1 - \varepsilon), \alpha_2 = \alpha(1 + \varepsilon), \beta_1 = \beta(1 - \delta), \beta_2 = \beta(1 + \delta)$. Разница сечения и длины средней магнитной линии учтена в виде: $S_1 = S(1 - \rho), S_2 = S(1 + \rho), l_1 = l(1 - \eta), l_2 = l(1 + \eta)$. Неидентичность обмоток в резонансном контуре учитывается выражениями: $W_2^I = W_2(1 - \xi), W_2^{II} = W_2(1 + \xi)$. (где: $\varepsilon, \delta, \rho, \eta$ и ξ – малые величины, учитывающие неидентичность сердечников и резонансных обмоток).

Пренебрегая величинами второго порядка малости, при условии малости δ ($\delta \rightarrow 0$) имеем: $sh \delta \beta B \cong \delta \beta B$, а $ch \delta \beta B \cong 1$. Преобразуем исходную систему относительно новых выражений. После простейших преобразований имеем:

$$\begin{cases} \dot{x} - \rho \dot{y} + \gamma_1 \left[D_1 - (\varepsilon + \eta - \xi) D_3 - \frac{\delta}{2} (x D_2 + y D_4) \right] = U'_0 + U'_m \sin \tau, \\ \ddot{y} - (\xi + \rho) \ddot{x} + \gamma_2 \frac{d}{d\tau} \left[D_3 - (\varepsilon + \eta) D_1 - \frac{\delta}{2} (y D_2 + x D_4) \right] + \gamma_3 \left[D_3 - \right. \\ \left. - (\varepsilon + \eta) D_1 - \frac{\delta}{2} (y D_2 + x D_4) \right] = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $D_1 = sh \frac{x}{2} ch \frac{y}{2}$; $D_2 = sh \frac{x}{2} xh \frac{y}{2}$; $D_3 = ch \frac{x}{2} sh \frac{y}{2}$; $D_4 = ch \frac{x}{2} ch \frac{y}{2}$; $U'_0 = \frac{\beta U_0}{SW_1 \omega}$,

остальные обозначения в системе аналогичны рассмотренной выше.

Получена система двух нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно мгновенных значений индукции. Первое уравнение описывает цепь возбуждения, второе – резонансную цепь. Коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, U'_0, U'_m$ учитывают конструктивные параметры системы. Система уравнений (1) описывает совокупность всех физических процессов, протекающих в асимметричной индуктивной НПС. Учет асимметрии с помощью коэффициентов при соответствующих членах нелинейного уравнения дает возможность оценить влияние разброса параметров системы на ее поведение.

Имеем систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными. Так как основным требованием к цепи возбуждения является малость активного сопротивления обмоток ($R_1 \rightarrow 0$) $\Rightarrow \gamma_1 = 0$, а величина магнитной индукции в сердечнике связана соотношением

$2B_H = \frac{\beta U_m}{SW_1 \omega}$ [2], первое уравнение (1) дает значение параметра системы. С учетом значительной

амплитуды x и малости y в цепи возбуждения ($x \gg y$), имеем:

$$x = 2C_0 + 2B_H \sin(\tau + \varphi),$$

где C_0, B_H – амплитуда постоянной и переменной магнитной индукции в цепи возбуждения; φ – угол сдвига фазы между возбуждающими колебаниями и изменением параметра.

Подстановка x во второе уравнение системы (1) приводит к уравнению с одним неизвестным y и получению искомой модели. Следовательно, получена математическая модель асимметричной системы, позволяющая исследовать параметрические взаимодействия в диссипативной существенно нелинейной системе.

Проведем анализ данного уравнения. Коэффициент γ_2 определяет диссипативные свойства системы, γ_3 пропорционален квадрату собственной частоты и представляет собой расстройку системы. Удачный выбор аппроксимирующей функции $H = f(B)$ позволяет учитывать характер параметрических взаимодействий через соответствующие функции взаимодействия D_1-D_4 , которые раскрывают связь между полем воздействия и колебаниями системы. Очевидно, что неидентичность параметров системы приводит к увеличению числа слагаемых в уравнении и оказывает равноценное влияние на упругую силу и силу трения в системе. Второе слагаемое уравнения показывает, что наличие асимметрии приводит к появлению гармоник возбуждающего воздействия в колебаниях системы.

Рассмотрим начальные условия для полученной модели – второго уравнения системы (1). Так как магнитная индукция в сердечниках мгновенно измениться не может, в первый момент времени она равна индукции до появления поля воздействия, которая равна нулю:

$$y|_{t=0} = \beta B_I - \beta B_{II}|_{t=0} = 0.$$

Далее, так как в цепи есть емкость, напряжение на которой не может меняться мгновенно, то в первый момент времени после включения:

$$U_{\text{вых}}|_{t=0} = \frac{SW_2 dB_I}{dt} - \frac{SW_2 dB_{II}}{dt} \Big|_{t=0} = SW_2 \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

Следовательно, данное уравнение имеет нулевые начальные условия.

При отсутствии внешнего воздействия ($x = 0$) уравнение преобразуется к виду:

$$\ddot{y} + \gamma_2 sh \frac{y}{2} + \gamma_3 sh \frac{y}{2} = 0.$$

Следовательно, существование колебаний без поля воздействия обусловлено собственными колебаниями системы.

При отсутствии колебаний в системе ($y = 0$) уравнение преобразуется к виду:

$$(\xi + \rho)\ddot{x} - \gamma_2 \frac{d}{d\tau} \left[(\varepsilon + \eta) sh \frac{x}{2} + \frac{\delta}{2} x ch \frac{x}{2} \right] - \gamma_3 \left[(\varepsilon + \eta) sh \frac{x}{2} + \frac{\delta}{2} x ch \frac{x}{2} \right] = 0.$$

Следовательно, при отсутствии колебаний системы воздействие внешней силы направлено на изменение параметра. При этом оказывают влияние все факторы асимметрии.

Дальнейшее решение системы уравнений (1) будем искать в виде:

$$y = 2B_0 + 2B_n \sin n(\tau + \varphi_n), \quad (2)$$

где B_0, B_n – амплитуды постоянной и переменной составляющих магнитной индукции в n -ой зоне неустойчивости.

Разложим гиперболические функции в ряд Фурье, коэффициентами которого являются модифицированные функции Бесселя. Будем удерживать Бесселевы функции 4-го порядка, а также выражения, содержащие комбинации фаз только вида $\kappa = (\varphi_n - \varphi)$. Тогда:

$$sh \frac{x}{2} = sh C_0 (I_0(B_H) - 2I_2(B_H) \cos 2(\tau + \varphi) + 2I_4(B_H) \cos 4(\tau + \varphi)) + ch C_0 (2I_1(B_H) \sin(\tau + \varphi) - 2I_3(B_H) \sin 3(\tau + \varphi)),$$

$$ch \frac{x}{2} = ch C_0 (I_0(B_H) - 2I_2(B_H) \cos 2(\tau + \varphi) + 2I_4(B_H) \cos 4(\tau + \varphi)) + sh C_0 (2I_1(B_H) \sin(\tau + \varphi) - 2I_3(B_H) \sin 3(\tau + \varphi)),$$

$$sh \frac{y}{2} = sh B_0 (I_0(B_n) - 2I_2(B_n) \cos 2n(\tau + \varphi_n) + 2I_4(B_n) \cos 4n(\tau + \varphi_n)) + ch B_0 (2I_1(B_n) \sin n(\tau + \varphi_n) - 2I_3(B_n) \sin 3n(\tau + \varphi_n)),$$

$$ch \frac{y}{2} = ch B_0 (I_0(B_n) - 2I_2(B_n) \cos 2n(\tau + \varphi_n) + 2I_4(B_n) \cos 4n(\tau + \varphi_n)) + sh B_0 (2I_1(B_n) \sin n(\tau + \varphi_n) - 2I_3(B_n) \sin 3n(\tau + \varphi_n)).$$

Находим величины, входящие в систему (2.4):

$$\begin{aligned} D_1 &= A_{1n} + F_{1n} \sin n(\tau + \varphi) + \Phi_{1n} \cos n(\tau + \varphi), & xD_2 &= A_{2n} + F_{2n} \sin(\tau + \varphi) + \Phi_{2n} \cos(\tau + \varphi), \\ D_1' &= A'_{1n} + F'_{1n} \sin(\tau + \varphi) + \Phi'_{1n} \cos(\tau + \varphi), & yD_4 &= A_{4n} + F_{4n} \sin(\tau + \varphi) + \Phi_{4n} \cos(\tau + \varphi), \\ D_3 &= A_{3n} + F_{3n} \sin n(\tau + \varphi) + \Phi_{3n} \cos n(\tau + \varphi), & yD_2 &= A_{2n} + F_{2n} \sin n(\tau + \varphi) + \Phi_{2n} \cos n(\tau + \varphi), \\ D_3' &= A'_{3n} + F'_{3n} \sin(\tau + \varphi) + \Phi'_{3n} \cos(\tau + \varphi), & xD_4 &= A_{4n} + F_{4n} \sin n(\tau + \varphi) + \Phi_{4n} \cos n(\tau + \varphi), \end{aligned}$$

где введены обозначения: $\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n \\ 0, & \text{если } k \neq n \end{cases}$

$$A_{1n} = D_{10} + \delta_{1n} q_{11} + \delta_{2n} q_{21} + \delta_{3n} q_{31} + \delta_{4n} q_{41}; \quad A_{3n} = D_{30} + \delta_{1n} q_{13} + \delta_{2n} q_{23} + \delta_{3n} q_{33} + \delta_{4n} q_{43};$$

$$A_{2n} = 2C_0 m_{2n} + B_n \left(S_{21} + \delta_m \left(\left(D_{21} - \frac{1}{2} a_{2n} \right) \cos(\varphi_1 - \varphi) + \frac{1}{2} (a_{3,2n} - a_{1,2n}) \cos 2(\varphi_1 - \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (a_{2,3n} - a_{4,3n}) \cos 3(\varphi_1 - \varphi) - \frac{1}{2} a_{3,4n} \cos 4(\varphi_1 - \varphi) \right) + \delta_{2n} \left(\frac{1}{2} (a_{3,n} - a_{1,n}) \sin 2(\varphi_2 - \varphi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} (a_{3,2n} \cos 4(\varphi_2 - \varphi)) + \delta_{3n} \left(\frac{1}{2} (a_{2,n} - a_{4,n}) \cos 3(\varphi_3 - \varphi) \right) + \delta_{4n} \left(-\frac{1}{2} a_3 \sin 4(\varphi_4 - \varphi) \right) \right) \right);$$

$$A_{4n} = 2C_0 m_{2n} + B_n \left(S_{41} + \delta_{1n} \left(\left(D_{41} - \frac{1}{2} b_{2,n} \right) \cos(\varphi_1 - \varphi) + \frac{1}{2} (b_{3,2n} - b_{1,2n}) \cos 2(\varphi_1 - \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (b_{2,3n} - b_{4,3n}) \cos 3(\varphi_1 - \varphi) - \frac{1}{2} b_{3,4n} \cos 4(\varphi_1 - \varphi) \right) + \delta_{2n} \left(\frac{1}{2} (b_{3,n} - b_{1,n}) \sin 2(\varphi_2 - \varphi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} b_{3,2n} \cos 4(\varphi_2 - \varphi) \right) + \delta_{3n} \left(\frac{1}{2} (b_{2,n} - b_{4,n}) \cos 3(\varphi_3 - \varphi) \right) + \delta_{4n} \left(-\frac{1}{2} b_{3,n} \sin 4(\varphi_4 - \varphi) \right) \right);$$

$$A'_{2n} = 2B_0 m_{2n} + B_n \left(D_{21} + \delta_{1n} \left(\left(S_{21} - \frac{1}{2} a_{1,2n} \right) \cos(\varphi_1 - \varphi) + \frac{1}{2} (a_{2,3n} + a_{2,n}) \cos 2(\varphi_1 - \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (a_{3,2n} - a_{3,4n}) \cos 3(\varphi_1 - \varphi) - \frac{1}{2} a_{3,4n} \cos 4(\varphi_1 - \varphi) \right) + \right. \\ \left. + \delta_{2n} (C_{22} \sin 2(\varphi_3 - \varphi) - \frac{1}{2} a_{4,n} \cos 4(\varphi_2 - \varphi)) + \delta_{3n} S_{23} \cos 3(\varphi_3 - \varphi) + \delta_{4n} C_{24} \sin 4(\varphi_4 - \varphi) \right);$$

$$A'_{4n} = 2B_0 m_{4n} + B_n \left(D_{41} + \delta_{1n} \left(\left(S_{41} - \frac{1}{2} b_{1,2n} \right) \cos(\varphi_1 - \varphi) + \frac{1}{2} (b_{2,3n} - b_{2,n}) \cos 2(\varphi_1 - \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (b_{3,2n} - b_{3,4n}) \cos 3(\varphi_1 - \varphi) - \frac{1}{2} b_{4,3n} \cos 4(\varphi_1 - \varphi) \right) + \delta_{2n} (C_{42} \sin 2(\varphi_2 - \varphi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} b_{4,n} \cos 4(\varphi_2 - \varphi)) + \delta_{3n} S_{43} \cos 3(\varphi_3 - \varphi) + \delta_{4n} C_{44} \sin 4(\varphi_4 - \varphi) \right);$$

$$F_{1n} = \delta_{1n} S_{11} + \delta_{3n} S_{13} + D_{11} \cos n(\varphi_n - \varphi);$$

$$F'_{1n} = S_{11} + \delta_{1n} D_{11} \cos(\varphi_1 - \varphi);$$

$$F_{3n} = \delta_{1n} S_{31} + \delta_{3n} S_{33} + D_{31} \cos n(\varphi_n - \varphi);$$

$$F'_{3n} = S_{31} + \delta_{1n} D_{31} \cos(\varphi_1 - \varphi);$$

$$F_{2n} = (2B_n m_{2n} - B_n P_2) \cos n(\varphi_n - \varphi) + \delta_{1n} (2B_0 S_{21} + B_n a_{1,n}) + \delta_{3n} 2B_0 S_{23};$$

$$F'_{2n} = 2B_H m_{2n} - B_H C_{22} + 2C_0 S_{21} + \delta_{1n} 2C_0 D_{21} \cos(\varphi_1 - \varphi);$$

$$F_{4n} = \delta_{1n} (2B_n m_{4n} + 2C_0 S_{41} - B_n C_{42}) + (2C_0 D_{41} + B_n b_{1,n}) \cos n(\varphi_n - \varphi) + \delta_{3n} 2C_0 S_{43};$$

$$F'_{4n} = \delta_{1n} (2B_n m_{4n} - B_n P_4) \cos(\varphi_1 - \varphi) + 2B_0 S_{41} + B_n b_{1,n};$$

$$\Phi_{1n} = \delta_{2n} C_{12} + \delta_{4n} C_{14} + D_{11} \sin n(\varphi_n - \varphi);$$

$$\Phi'_{1n} = \delta_{1n} D_{11} \sin(\varphi_1 - \varphi);$$

$$\Phi_{3n} = \delta_{2n}C_{32} + \delta_{4n}C_{34} + D_{31} \sin n(\varphi_n - \varphi);$$

$$\Phi'_{3n} = \delta_{1n}D_{31} \sin(\varphi_1 - \varphi);$$

$$\Phi_{2n} = (2B_n m_{2n} - B_n P_2) \sin n(\varphi_n - \varphi) + \delta_{2n} 2B_0 C_{22} + \delta_{4n} 2B_0 C_{24};$$

$$\Phi'_{2n} = \delta_{1n} 2C_0 D_{21} \sin(\varphi_1 - \varphi);$$

$$\Phi_{4n} = (2C_0 D_{41} + B_n b_{1,n}) \sin n(\varphi_n - \varphi) + \delta_{2n} 2B_0 C_{42} + \delta_{4n} 2C_0 C_{44};$$

$$\Phi'_{4n} = \delta_{1n} (2B_n m_{4n} - B_n P_4) \sin(\varphi_1 - \varphi),$$

где: $m_{2n} = D_{20} + \delta_{1n} q_{12} + \delta_{2n} q_{22} + \delta_{3n} q_{32} + \delta_{4n} q_{42};$

$$m_{4n} = D_{40} + \delta_{1n} q_{14} + \delta_{2n} q_{24} + \delta_{3n} q_{34} + \delta_{4n} q_{44};$$

$$q_{11} = 2chC_0 shB_0 z_{11} + 2shC_0 chB_0 z_{12}; \quad q_{21} = 2shC_0 chB_0 z_{21} + 2shC_0 chB_0 z_{22};$$

$$q_{12} = 2chC_0 chB_0 z_{11} + 2shC_0 shB_0 z_{12}; \quad q_{22} = 2shC_0 chB_0 z_{21} + 2shC_0 shB_0 z_{22};$$

$$q_{13} = 2shC_0 chB_0 z_{11} + 2chC_0 shB_0 z_{12}; \quad q_{23} = 2chC_0 chB_0 z_{21} + 2chC_0 shB_0 z_{22};$$

$$q_{14} = 2shC_0 shB_0 z_{11} + 2chC_0 chB_0 z_{12}; \quad q_{24} = 2chC_0 shB_0 z_{21} + 2chC_0 chB_0 z_{22},$$

где: $z_{11} = I_1(B_H)I_1(B_1)\cos(\varphi_1 - \varphi) + I_3(B_H)I_3(B_1)\cos 3(\varphi_1 - \varphi);$

$$z_{12} = I_2(B_H)I_2(B_1)\cos 2(\varphi_1 - \varphi) + I_4(B_H)I_4(B_1)\cos 4(\varphi_1 - \varphi);$$

$$z_{21} = I_2(B_H)I_1(B_2)\sin 2(\varphi_2 - \varphi); \quad z_{22} = I_4(B_H)I_2(B_2)\cos 4(\varphi_2 - \varphi);$$

$$q_{31} = 2chC_0 shB_0 I_3(B_H)I_1(B_3)\cos 3(\varphi_3 - \varphi); \quad q_{41} = 2shC_0 shB_0 I_4(B_H)I_1(B_4)\sin 4(\varphi_4 - \varphi);$$

$$q_{32} = 2chC_0 chB_0 I_3(B_H)I_1(B_3)\cos 3(\varphi_3 - \varphi); \quad q_{42} = 2shC_0 chB_0 I_4(B_H)I_1(B_4)\sin 4(\varphi_4 - \varphi);$$

$$q_{33} = 2shC_0 chB_0 I_3(B_H)I_1(B_3)\cos 3(\varphi_3 - \varphi); \quad q_{43} = 2chC_0 chB_0 I_4(B_H)I_1(B_4)\sin 4(\varphi_4 - \varphi);$$

$$q_{34} = 2shC_0 shB_0 I_3(B_H)I_1(B_3)\cos 3(\varphi_3 - \varphi); \quad q_{44} = 2chC_0 shB_0 I_4(B_H)I_1(B_4)\sin 4(\varphi_4 - \varphi);$$

$$D_{10} = shC_0 chB_0 I_0(B_H)I_0(B_n); \quad D_{30} = chC_0 shB_0 I_0(B_H)I_0(B_n);$$

$$D_{11} = 2shC_0 shB_0 I_0(B_H)I_1(B_n); \quad D_{31} = 2chC_0 chB_0 I_0(B_H)I_1(B_n);$$

$$D_{20} = shC_0 shB_0 I_0(B_H)I_0(B_n); \quad D_{40} = chC_0 chB_0 I_0(B_H)I_0(B_n);$$

$$D_{21} = 2shC_0 chB_0 I_0(B_H)I_1(B_n); \quad D_{41} = 2chC_0 shB_0 I_0(B_H)I_1(B_n);$$

для нечетных κ ($\kappa=1,3$):

$$S_{1\kappa} = 2chC_0 chB_0 I_\kappa(B_H)I_0(B_n);$$

$$S_{2\kappa} = 2chC_0 shB_0 I_\kappa(B_H)I_0(B_n);$$

$$S_{3\kappa} = 2shC_0 shB_0 I_\kappa(B_H)I_0(B_n);$$

$$S_{4\kappa} = 2shC_0 chB_0 I_\kappa(B_H)I_0(B_n);$$

$$a_{1n} = 4chC_0 chB_0 I_1(B_H)I_1(B_n);$$

$$a_{1,2n} = 4chC_0 shB_0 I_1(B_H)I_1(B_n);$$

для четных κ ($\kappa=2,4$):

$$S_{1\kappa} = 2shC_0 chB_0 I_\kappa(B_H)I_0(B_n);$$

$$S_{2\kappa} = 2shC_0 shB_0 I_\kappa(B_H)I_0(B_n);$$

$$S_{3\kappa} = 2chC_0 shB_0 I_\kappa(B_H)I_0(B_n);$$

$$S_{4\kappa} = 2chC_0 chB_0 I_\kappa(B_H)I_0(B_n);$$

$$b_{1,n} = 4shC_0 shB_0 I_1(B_H)I_1(B_n);$$

$$b_{1,2n} = 4shC_0 chB_0 I_1(B_H)I_2(B_n);$$

$$\begin{aligned}
a_{2,n} &= 4shC_0chB_0I_2(B_H)I_1(B_n); & b_{2,n} &= 4chC_0shB_0I_2(B_H)I_1(B_n); \\
a_{2,2n} &= 4shC_0shB_0I_2(B_H)I_2(B_n); & b_{2,2n} &= 4chC_0chB_0I_2(B_H)I_2(B_n); \\
a_{2,3n} &= 4shC_0chB_0I_2(B_H)I_3(B_n); & b_{2,3n} &= 4chC_0shB_0I_2(B_H)I_3(B_n); \\
a_{3,n} &= 4chC_0chB_0I_3(B_H)I_1(B_n); & b_{3,n} &= 4shC_0shB_0I_3(B_H)I_1(B_n); \\
a_{3,2n} &= 4chC_0shB_0I_3(B_H)I_2(B_n); & b_{3,2n} &= 4shC_0chB_0I_3(B_H)I_2(B_n); \\
a_{3,3n} &= 4chC_0chB_0I_3(B_H)I_3(B_n); & b_{3,3n} &= 4shC_0shB_0I_3(B_H)I_3(B_n); \\
a_{3,4n} &= 4chC_0shB_0I_3(B_H)I_4(B_n); & b_{3,4n} &= 4shC_0chB_0I_3(B_H)I_4(B_n); \\
a_{4,n} &= 4shC_0chB_0I_4(B_H)I_1(B_n); & b_{4,n} &= 4chC_0shB_0I_4(B_H)I_1(B_n); \\
a_{4,2n} &= 4shC_0shB_0I_4(B_H)I_2(B_n); & b_{4,2n} &= 4chC_0chB_0I_4(B_H)I_2(B_n); \\
a_{4,3n} &= 4shC_0chB_0I_4(B_H)I_3(B_n); & b_{4,3n} &= 4chC_0shB_0I_4(B_H)I_3(B_n); \\
a_{4,4n} &= 4shC_0shB_0I_4(B_H)I_4(B_n); & b_{4,4n} &= 4chC_0chB_0I_4(B_H)I_4(B_n); \\
P_1 &= 2shC_0chB_0I_0(B_H)I_2(B_n); & P_2 &= 2shC_0shB_0I_0(B_H)I_2(B_n); \\
P_3 &= 2chC_0shB_0I_0(B_H)I_2(B_n); & P_4 &= 2chC_0chB_0I_0(B_H)I_2(B_n).
\end{aligned}$$

С учетом принятых обозначений после подстановки решения (2) в систему (1), получим:

$$\begin{cases}
2B_n \cos(\tau + \varphi) - 2\rho B_n \cos(\varphi_n - \varphi) \cos(\tau + \varphi) + 2\rho B_n \sin(\varphi_n - \varphi) \sin(\tau + \varphi) + \\
+ \gamma_1 G_{0n} + \gamma_1 G_n \sin(\tau + \varphi) + \gamma_1 Q_n \cos(\tau + \varphi) = U'_0 + U'_m \sin \tau, \\
-2n^2 B_n \cos(\varphi_n - \varphi) \sin n(\tau + \varphi) - 2n^2 B_n \sin(\varphi_n - \varphi) \cos n(\tau + \varphi) + \delta_{1n} 2(\xi + \rho) B_n \sin n(\tau + \varphi) + \\
+ \gamma_2 n E_n \cos n(\tau + \varphi) - \gamma_2 n P_n \sin n(\tau + \varphi) + \gamma_3 E_{0n} + \gamma_3 E_n \sin n(\tau + \varphi) + \gamma_3 P_n \cos n(\tau + \varphi) = 0,
\end{cases} \quad (3)$$

$$\text{где } G_{0n} = A_{1n} - (\varepsilon + \eta - \xi) A_{3n} - \frac{\delta}{2} (A'_{2n} + A'_{4n}); \quad E_{0n} = A_{3n} - (\varepsilon + \eta) A_{1n} - \frac{\delta}{2} (A_{2n} + A_{4n});$$

$$G_n = F'_{1n} - (\varepsilon + \eta - \xi) F'_{3n} - \frac{\delta}{2} (F'_{21} + F'_{41}); \quad E_n = F_{3n} - (\varepsilon + \eta) F_{1n} - \frac{\delta}{2} (F_{2n} + F_{4n});$$

$$Q_n = \Phi'_{1n} - (\varepsilon + \eta - \xi) \Phi'_{3n} - \frac{\delta}{2} (\Phi'_{21} + \Phi'_{41}); \quad P_n = \Phi_{3n} - (\varepsilon + \eta) \Phi_{1n} - \frac{\delta}{2} (\Phi_{2n} + \Phi_{4n}).$$

Переменные, характеризующие движение системы, являются периодическими функциями времени. Применяя метод гармонического баланса, получим уравнения, описывающие физические процессы в цепи возбуждения:

$$\begin{cases}
\gamma_1 G_{0n} = 0, \\
2\rho B_n \sin(\varphi_n - \varphi) + \gamma_1 G_n = U'_m \cos \varphi, \\
2B_n - 2\rho B_n \cos(\varphi_n - \varphi) + \gamma_1 Q_n = -U'_m \sin \varphi.
\end{cases}$$

Отсюда находим уравнение баланса амплитуд в цепи возбуждения:

$$\left(B_H - \rho B_n \cos(\varphi_n - \varphi) + \frac{1}{2} \gamma_1 Q_n \right)^2 + \left(\rho B_n \sin(\varphi_n - \varphi) + \frac{1}{2} \gamma_1 G_n \right)^2 = \left(\frac{1}{2} U'_m \right)^2 \quad (4)$$

и условие для фазы φ :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2B_H + 2\rho B_n \cos(\varphi_n - \varphi) - \gamma_1 Q_n}{2\rho B_n \sin(\varphi_n - \varphi) + \gamma_1 G_n} \quad (5)$$

Из второго уравнения системы (3) получим методом гармонического баланса:

$$\begin{cases} \gamma_3 E_{0n} = 0, \\ -2n^2 B_n \cos n(\varphi_n - \varphi) + \delta_{1n} 2(\xi - \rho) B_H - \gamma_2 n P_n + \gamma_3 E_n = 0, \\ -2n^2 B_n \sin n(\varphi_n - \varphi) + \gamma_2 n E_n + \gamma_3 P_n = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем уравнение баланса амплитуд в резонансной цепи:

$$B_n^2 = \frac{1}{4n^2} \left((\delta_{1n} 2(\xi + \rho) B_H - \gamma_2 n P_n + \gamma_3 E_n)^2 + (\gamma_2 n E_n + \gamma_3 P_n)^2 \right) \quad (6)$$

и условие для разности фаз $n(\varphi_n - \varphi)$:

$$\operatorname{tgn}(\varphi_n - \varphi) = \frac{\gamma_2 n E_n + \gamma_3 P_n}{-\gamma_2 n P_n + \gamma_3 E_n + \delta_{1n} 2(\xi + \rho) B_H} \quad (7)$$

Выражения (6), (7) описывают энергетические соотношения в асимметричной диссипативной НПС в произвольной зоне неустойчивости колебаний. Полученные соотношения позволяют оценить влияние неидентичности параметров системы на ее поведение.

Уравнения (1) и (6) для НПС на сердечниках из пермолоя 79НМ $20 \times 15 \times 5$ с обмотками $W_1 = 80$, $W_2 = 150$ витков и емкостью $C = 0,4$ мкФ на частоте возбуждения 1 кГц были вычислены для I – VI зоны неустойчивости при ограничениях: $0 < B_H < 10$; $0 < \varepsilon, \delta, \rho, \eta, \zeta < 1$; $0 < B_n < 6$, где $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Полученная зависимость амплитуды параметрических колебаний от амплитуды возбуждения приведена на рис. 1, где кривая 1 – $B_n = f(B_H)$ соответствует симметрии системы для второй, четвертой и шестой зоны неустойчивости, кривая 2 – $B_n = f(\xi, B_H)$ при наличии неидентичности витков вторичной обмотки в соответствующих зонах неустойчивости, кривая 3 – $B_n = f(\varepsilon, \delta, B_H)$ при неидентичности магнитных сердечников.

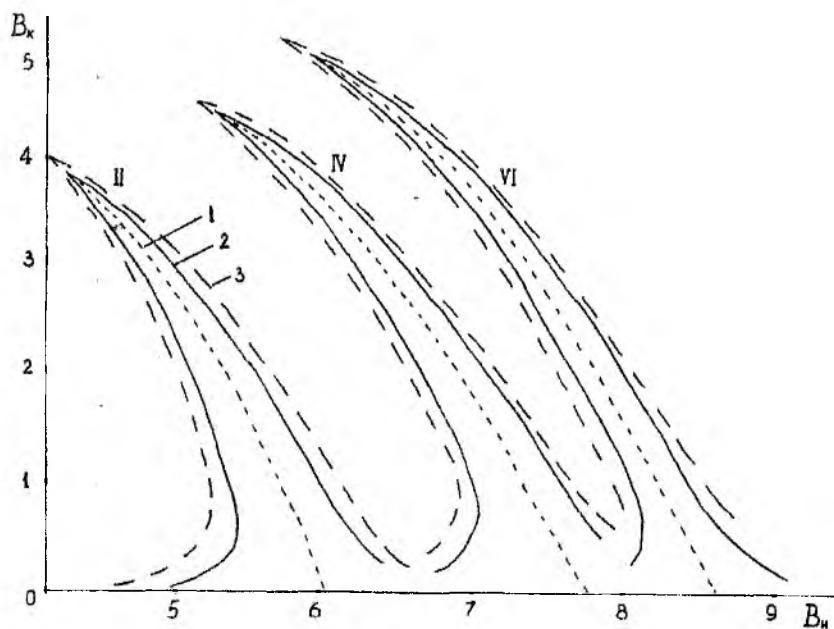


Рис. 1

Из представленных графиков (рис.1) следует, что оба фактора асимметрии системы (различие в витках и неидентичность магнитных сердечников) приводят к расширению области неустойчивости.

Асимметрия вызывает необходимость увеличения интенсивности воздействия для возбуждения колебаний в соответствующей зоне неустойчивости.

Таким образом, построена и исследована математическая модель асимметричной диссипативной нелинейной системы (1) при модуляции ее параметра внешней силой гармонического характера. Неидентичность параметров системы учтена в коэффициентах нелинейного дифференциального уравнения через отклонения от среднего значения. Соответствующие функции D_1 - D_4 раскрывают связь между полем воздействия и колебаниями системы. Полученные выражения (6), (7) описывают энергетические соотношения в системе при гармоническом воздействии с постоянной составляющей в произвольной зоне неустойчивости колебаний. Выражение (6) представляет собой уравнение баланса амплитуд, (7) – условие фазы.

Неидентичность параметров системы приводит к появлению основной гармоники возбуждающего воздействия в ее колебаниях и оказывает равноценное влияние на упругую силу и силу трения в системе. Асимметрия системы оказывает существенное влияние на характер изменения (модуляцию) параметра и приводит к расширению области неустойчивости ее колебаний, что вызывает необходимость увеличения интенсивности воздействия для возбуждения колебаний в соответствующих зонах неустойчивости.

Построенная модель относительно мгновенных значений индукции с учетом конструктивных параметров системы в коэффициентах при соответствующих членах нелинейного уравнения дает возможность оценить влияние разброса параметров магнитных сердечников и числа витков на АЧХ колебаний при проектировании параметрических генераторов.

Список литературы: 1. Зув Н.Г., Титаренко А.М., Чередников П.И. О характеристиках параметрических систем, работающих на высших гармониках.// Рук. деп. в УкрНИИТИ 03.10.84. №1591 Ук-84 Деп. 15с. 2. Зув Н.Г., Меньило А.Д., Титаренко А.М., Чередников П.И. Исследование устойчивости в параметрическом генераторе методом фазовой плоскости.// Рук. деп. в УкрНИИТИ 21.01.86. №1622 Ук-85 Деп. 21с.

*Харьковский государственный технический
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 11.01.2001.