

О РАСЧЕТЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ АППАРАТОВ МЕТОДОМ R -ФУНКЦИЙ. Ч. I.

В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко, В. Ф. Кравченко

Х а р ь к о в

Одним из необходимых условий надежной работы радиоэлектронной аппаратуры (РЭА), как известно, является нормальный тепловой режим. Для его обеспечения следует выбрать оптимальную систему охлаждения и габариты, найти оптимальный вариант размещения отдельных частей аппарата относительно друг друга. Следовательно, конструкция РЭА во многом определяется его тепловым режимом

Анализу теплового режима различных радиоэлектронных аппаратов посвящены отечественные и зарубежные исследования [1—3]. При изу-

чении теплового режима аппарата применяют различные методы: приближенное аналитическое исследование, расчеты с помощью аналоговых или цифровых машин, экспериментальный метод.

В случае, когда отдельные части РЭА имеют сложную геометрическую форму, приближенные методы не позволяют произвести полные исследования теплового режима аппарата, удастся лишь получить некоторые, не всегда приемлемые, количественные оценки, что тормозит создание научных основ конструирования радиоэлектронных аппаратов.

Работа показывает возможность использования R -функций для расчета тепловых полей РЭА, состоящего из отдельных частей, произвольно расположенных в пространстве, профили которых могут быть представлены кусочно-гладкими участками известных поверхностей. Это дает возможность наряду с количественными оценками получить также качественные исследования тепловых режимов РЭА.

При анализе тепловых режимов РЭА различных классов необходимо построить тепловую модель аппарата, физически адекватную явлению и в то же время реализуемую математически. Тепловая модель радиоэлектронного аппарата, физически адекватная явлению, в общем случае может быть представлена следующим образом. Имеются $(N_1), (N_2), \dots, (N_m)$ отдельных частей РЭА, произвольно расположенных в рабочей области K_N , ограниченной перфорированным кожухом. Источники тепла некоторым образом распределены по поверхности ряда частей РЭА — $(N_j), (N_{j+1}) \dots$. Тепловой поток P рассеивается в окружающую среду кондукцией через границу области, конвекцией и излучением — с ее внутренних точек. Теплообмен между поверхностями некоторых частей РЭА и окружающей средой происходит по закону Ньютона [3]. Дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$L[u] = \Delta u - b^2 u = \rho(x, y, z), \quad (1)$$

где $\rho(x, y, z)$ — заданная функция, характеризующая распределение тепловых источников в РЭА;

$$b = b(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m, s_1, s_2, \dots, s_m);$$

λ_j — коэффициент теплопроводности части РЭА — (N_j) ;

α_j — суммарная теплоотдача с поверхности;

s_j — части РЭА — (N_j) ($j = 1, 2, \dots, m$);

$u = t - t_c$, t_c — температура окружающей среды.

Допустим, что $\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z), \dots, \omega_m(x, y, z)$ и $\omega_{ij}(x, y, z)$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$), ($j = 1, 2, \dots, m$) — функции, построенные по описанному в работе [4] методу для частей РЭА $(N_1), (N_2), \dots, (N_m)$ соответственно. Это означает, что уравнение $\omega_{ij}(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности s_{ij} , представляющей собой i -ю часть поверхности s_j . Уравнение $\omega_j(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности s_j части РЭА — (N_j) ($i = 1, 2, \dots, 2n$), ($j = 1, 2, \dots, m$). Уравнение $\omega(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности, представляющей собой объединение элементов поверхностей $\omega_1(x, y, z) = 0, \omega_2(x, y, z) = 0, \dots, \omega_m(x, y, z) = 0$.

Функции $\omega_j(x, y, z)$ и $\omega(x, y, z)$ обладают следующими свойствами:

$$\omega_j(x, y, z)|_{s_j} = 0; \quad (2)$$

$$\omega_j(x, y, z) > 0 \text{ в области } \Omega;$$

$$\left. \frac{\partial \omega_j(x, y, z)}{\partial n} \right|_{s_j} = 1,$$

где s_j — соответственно поверхности частей

РЭА $(N_1), (N_2), \dots, (N_m)$ ($j = 1, 2, \dots, m$);

$$\omega(x, y, z)|_s = 0 \quad (3)$$

$\omega(x, y, z) > 0$ в области Ω ;

$$\left. \frac{\partial \omega(x, y, z)}{\partial \nu} \right|_s = 1;$$

$$\left(s = \bigcup_{j=1}^m s_j, \quad s_j = \bigcup_{i=1}^{2n} s_{ij} \right)$$

ν — направление внешней нормали к поверхности s).

1. Пусть на поверхностях s_{2ij} отдельных частей РЭА $(N_1), (N_2), \dots, (N_m)$ заданы тепловые потоки q_{2ij} ; между поверхностями s_{2i-1j} этих частей и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона (условие третьего рода).

Краевые условия в этом случае для искомой функции $u(x, y, z)$ представлены в следующей форме:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{s_{2ij}} = q_{2ij}; \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{s_{2i-1j}} + h_{2i-1j} u|_{s_{2i-1j}} = f_{2i-1j},$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), (j = 1, 2, \dots, m)$$

где q_{2ij} , h_{2i-1j} и f_{2i-1j} — функции, заданные на поверхностях s_{2ij} и s_{2i-1j} соответственно.

Введем функциональное пространство H , образованное непрерывно-дифференцируемыми функциями $u \in C^2$, которые имеют в Ω кусочно-непрерывные вторые производные и для которых выполняется условие (4), тогда настоящую краевую задачу можно сформулировать следующим образом.

Необходимо найти функцию $u \in H$, т. е. удовлетворяющую краевому условию (4) и являющуюся в области Ω решением дифференциального уравнения

$$L[u] = F, \quad (5)$$

где F — заданная в $\Omega + S$ непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывные первые производные.

Отметим, что функции q_{2ij} , h_{2i-1j} и f_{2i-1j} на поверхностях s_{2ij} и s_{2i-1j} соответственно не могут быть заданы произвольно, а должны удовлетворять следующему условию [5]:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \iint_{s_{2i-1j}} [f_{2i-1j} - h_{2i-1j} u] d\sigma + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \iint_{s_{2ij}} f_{2ij} d\sigma = \iiint_{\Omega} F dv, \quad (6)$$

которое является необходимым для разрешения данной краевой задачи. Так как $L[c] = 0$ для любого постоянного c , то вместе с любым решением u решением будет также $u + \text{const}$ и условие

$$\iiint_{\Omega} \varphi \cdot u dv = 0, \quad (7)$$

где φ — некоторая функция, положительная в $\Omega + S$ и непрерывно-дифференцируемая в Ω (например, $\varphi \equiv 1$); дает возможность однозначно определить постоянную c и установить единственность решения данной задачи.

При выполнении приведенных выше условий можно показать, что какова бы ни была непрерывно-дифференцируемая в $\Omega + S$ функция Φ , функция

$$u = \Phi + \left[\frac{\sum_{j=1}^m W_j \tau_j}{\sum_{j=1}^m \tau_j} - D_1 \Phi \right] \cdot \omega, \quad (8)$$

$$W_j = \frac{\sum_{i=1}^n [\psi_{2ij} \tau_{2ij} + (\psi_{2i-1j} - \delta_{2i-1j} \Phi) \tau_{2i-1j}]}{\sum_{i=1}^{2n} \tau_{ij}};$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

$$D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\left(\omega = \frac{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_m}{V (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_m)^2 + |\text{grad} (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_m)|^2} \right)$$

$\tau_{ij} = \frac{1}{\omega_{ij}}$; ψ_{ij} и δ_{2i-1j} — непрерывно-дифференцируемые в $\Omega + S$ функции, при которых

$$\psi_{2i-1j}|_{s_{2i-1j}} = f_{2i-1j};$$

$$\psi_{2ij}|_{s_{2ij}} = q_{2ij};$$

$$\delta_{2i-1j}|_{s_{2i-1j}} = h_{2i-1j}$$

будут удовлетворять краевым условиям (4). В случае неограниченной области, если, согласно физическим соображениям, следует, что скорость спада искомой функции на бесконечности порядка $\frac{1}{r^v}$, функцию Φ следует искать в виде приближения [6]

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{i+j+k=0}^n C_{ijk} P_i \left[\frac{l_i x}{(1+\omega)^{i+\frac{v}{3}}} \right] P_j \left[\frac{l_j y}{(1+\omega)^{j+\frac{v}{3}}} \right] P_k \left[\frac{l_k z}{(1+\omega)^{k+\frac{v}{3}}} \right], \quad (9)$$

где $P_\lambda(lt)$ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$) подходящим образом выбранная полная последовательность функций (полиномов Чебышева, Лежандра, тригонометрических полиномов и т. д.).

При $m = 1$, т. е. для одной части, РЭА (8) принимает вид

$$u = \Phi + \left[\frac{\sum_{i=1}^n [\psi_{2i} \tau_{2i} + (\psi_{2i-1} - \delta_{2i-1} \Phi) \tau_{2i-1}]}{\sum_{i=1}^{2n} \tau_i} - D_1 \Phi \right] \omega. \quad (10)$$

Для трех частей РЭА (N_1), (N_2), (N_3) при краевых условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{s_{21}} &= q_{21}; \quad \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{s_{22}} = q_{22}; \quad \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{s_{23}} = q_{23}; \\ \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{s_{11}} + h_{11} u|_{s_{11}} &= f_{11}; \quad \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{s_{12}} + h_{12} u|_{s_{12}} = f_{12}; \quad \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{s_{13}} + h_{13} u|_{s_{13}} = f_{13}, \end{aligned} \quad (11)$$

для искомой функции $u(x, y, z)$ имеем

$$u = \Phi + \left[\frac{A_1 + A_2 + A_3}{(\omega_2 \omega_3 + \omega_1 \omega_3 + \omega_1 \omega_2)(\omega_{11} + \omega_{21})(\omega_{12} + \omega_{22})(\omega_{13} + \omega_{23})} - D_1 \Phi \right] \omega, \quad (12)$$

где $A_1 = [\psi_{21} \omega_{11} + \omega_{21} (\psi_{11} - \delta_{11} \Phi)] (\omega_{12} + \omega_{22}) (\omega_{13} + \omega_{23}) \omega_2 \omega_3$;

$$A_2 = [\psi_{22} \omega_{12} + \omega_{22} (\psi_{12} - \delta_{12} \Phi)] (\omega_{11} + \omega_{21}) (\omega_{13} + \omega_{23}) \omega_1 \omega_3;$$

$$A_3 = [\psi_{23} \omega_{13} + \omega_{23} (\psi_{13} - \delta_{13} \Phi)] (\omega_{11} + \omega_{21}) (\omega_{12} + \omega_{22}) \omega_1 \omega_2.$$

Функция $u(x, y, z)$, определяемая (8), удовлетворяет условиям (4) независимо от выбора постоянных C_{ijk} . Согласно [7], выбор C_{ijk} из усло-

вия наилучшего удовлетворения исходному уравнению можно произвести, применяя один из вариационных методов.

2. Допустим, что на поверхностях s_{2ij} отдельных частей РЭА (N_1), (N_2), ..., (N_m) задано распределение температуры, а на поверхностях s_{2i-1j} заданы тепловые потоки q_{2i-1j} .

Краевые условия в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} u|_{s_{2ij}} &= f_{2ij}; \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{s_{2i-1j}} &= q_{2i-1j}. \end{aligned} \quad (13)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), (j = 1, 2, \dots, m).$$

Задача со смешанными краевыми условиями может быть сформулирована следующим образом.

Найти функцию $u \in H_0$, т. е. удовлетворяющую краевому условию (13) и являющуюся в области Ω решением дифференциального уравнения (5). Предполагается, что условия (6) и (7) выполняются.

Аналогично п. 1 вводятся функции $\psi_{ij}(x, y, z)$, непрерывно дифференцируемые в области Ω и такие, при которых

$$\begin{aligned} \psi|_{s_{2ij}} &= f_{2ij}; \\ \psi|_{s_{2i-1j}} &= q_{2i-1j}. \end{aligned} \quad (14)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), (j = 1, 2, \dots, m).$$

При этом можно показать, что какова бы ни была непрерывно-дифференцируема в $\Omega + S$ функция $\Phi(x, y, z)$, функция

$$u = \Phi_0 + \left[\frac{\sum_{j=1}^m W_j \tau_j}{\sum_{j=1}^m \tau_j} - D_1 \Phi_0 \right] \omega, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{\sum_{j=1}^m \Phi_j \tau_j}{\sum_{j=1}^m \tau_j}; \\ \Phi_j &= \frac{\sum_{i=1}^n [\psi_{2ij} \tau_{2ij} - \Phi \tau_{2i-1j}]}{\sum_{i=1}^n \tau_{ij}}, \\ W_j &= \frac{\sum_{i=1}^n [\psi_{2i-1j} \tau_{2i-1j} + \Phi \tau_{2ij}]}{\sum_{i=1}^n \tau_{ij}}, \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), (j = 1, 2, \dots, m)$$

удовлетворяет краевым условиям (13).

Для случая ограниченной области функции $\Phi(x, y, z)$ следует искать в виде приближения

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{i+j+k=0}^n C_{ijk} P_i[l_i x] P_j[l_j y] P_k[l_k z]. \quad (16)$$

При $m = 1$, т. е. для случая одной части РЭА функция $u(x, y, n)$

$$u = \frac{\sum_{i=1}^n [\psi_{2i} \tau_{2i} + \Phi \tau_{2i-1}]}{\sum_{i=1}^{2n} \tau_i} + \left[\frac{\sum_{i=1}^n [\psi_{2i-1} \tau_{2i-1} + \Phi \tau_{2i}]}{\sum_{i=1}^{2n} \tau_i} - D_1 \Phi_0 \right] \omega, \quad (17)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\sum_{i=1}^n [\psi_{2i} \tau_{2i} + \Phi \tau_{2i-1}]}{\sum_{i=1}^{2n} \tau_i}.$$

Для двух частей РЭА при краевых условиях

$$\begin{aligned} u|_{s_{21}} &= f_{21}; \quad u|_{s_{22}} = f_{22}; \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{s_{11}} &= q_{11}; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{s_{12}} = q_{12}. \end{aligned} \quad (18)$$

Функция $u(x, y, z)$ принимает вид

$$u = \left[\frac{(\psi_{11} \omega_{21} + \Phi \omega_{11})(\omega_{12} + \omega_{22}) \omega_2 + (\psi_{12} \omega_{22} + \Phi \omega_{12})(\omega_{11} + \omega_{21}) \omega_1}{(\omega_{11} + \omega_{21})(\omega_{12} + \omega_{22})(\omega_1 + \omega_2)} - D_1 \Phi_0 \right] \omega + \Phi_0, \quad (19)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{(\psi_{21} \omega_{11} + \Phi \omega_{21})(\omega_{12} + \omega_{22}) \omega_2 + (\psi_{22} \omega_{12} + \Phi \omega_{22})(\omega_{11} + \omega_{21}) \omega_1}{(\omega_{11} + \omega_{21})(\omega_{12} + \omega_{22})(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Выбор постоянных C_{ijk} для наилучшего удовлетворения исходному уравнению производится аналогично п. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. Изд-во «Высшая школа», 1967.
2. П. Шнейдер. Инженерные проблемы теплопроводности. Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Г. Н. Дульнев, Э. М. Семяшкин. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах. Изд-во «Энергия», Л., 1968.
4. В. Л. Рвачев. Геометрические приложения алгебры логики. Изд-во «Техника», К., 1967.
5. В. Ф. Кравченко, А. П. Слесаренко, В. Л. Рвачев. «Дифференциальные уравнения», т. 6, № 10, Минск, 1970.
6. В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко, В. Ф. Кравченко, В. К. Ярмолюк. Доклады АН УССР, № 6, К., 1970.
7. Л. В. Канторович, В. Н. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.

РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ СЕТЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ РЕКОНСТРУКЦИИ

Э. Н. Рыбников

Харьков

Один из способов повышения надежности работы сложных сетевых систем — превращение разветвленных сетей в кольцевые. При этом возникает задача выбора отдельных параметров участков сети, при которых суммарные капитальные затраты на строительство и эксплуатацию за расчетный период работы минимальны. К сложным сетевым системам относятся и гидравлические системы, в частности, водопроводные. Упо-