УДК 621.391:51.142

С. В. ЧУМАЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ КОЛЬЦЕВОГО ТОКА С НЕОДНОРОДНОЙ ВОЛНОВОДНОЙ СТРУКТУРОЙ

1 Введение

Методы суммирования рядов представляют как чисто теоретический, так и практический интерес. Определение суммы ряда в тех случаях, когда это возможно, позволяет получить аналитическое решение задачи, удобное для дальнейшего численного анализа. Усовершенствование, развитие известных и создание новых методов решения граничных задач математической физики, которые упрощают, ускоряют, и как следствие удешевляют численный эксперимент, а также допускают построение строгого аналитического решения, продолжают оставаться *актуальными* во многих научных направлениях. Например, при решении задач дифракции электромагнитных волн на периодических структурах; при рассмотрении вопросов дифракционной электроники; в теории фазированных антенных решеток; для повышения эффективности проектирования радиоэлектронных и цифровых систем [1-5]. Расчет волноводов с нерегулярностями продолжает оставаться актуальным научным направлением в связи с использованием данных структур в ядерной физике.

Данная статья является продолжением публикаций в указанном направлении [1, 6-9]. Здесь развивается подход к суммированию рядов по выборочным значениям в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром (ГПВЯ), основы которого рассмотрены в [10]. Метод суммирования в ГПВЯ позволяет аналитически получать представления для коэффициентов электромагнитного поля, не содержащие рядов. Он дает математический аппарат для точного аналитического решения некоторых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

2 Постановка задачи

Рассматриваемая структура состоит из круглых волноводов с радиусами a и b, соединенных фланцем в плоскости $z = 0$. Источником поля является кольцевой ток, движущийся вдоль оси структуры со скоростью $\mathrm{v} = \beta c$. Плотность тока и его спектральная амплитуда известны [2].

Цель исследования – получить прямые формулы для вычисления амплитуд возбуждаемых волноводных гармоник (неопределенных коэффициентов электромагнитного поля) методом суммирования рядов по выборочным значениям в ГПВЯ.

3 Метод решения

Предлагается использовать метод суммирования рядов в ГПВЯ. Принципиальная особенность его применения состоит в том, что для нахождения коэффициентов, определяющих спектральные амплитуды рассеянного поля, получаются прямые формулы. В отличие от метода, приведенного в [2], указанные коэффициенты вычисляются в результате численного решения бесконечной системы уравнений. Для решения данной задачи используется следующая теорема и следствие из нее [10].

Теорема. Пусть H – абстрактное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром $K(s,t)$, определенным на множестве T. Пусть $\{\varphi_i(s,t_i)\}$, $t_i \in T$ – полная ортонормированная система в H. Если существуют ненулевые действительные постоянные c_i такие, что $\varphi_i(s,t_i) = c_i K(s,t_i)$, $|K(t,t)| \le c_i < \infty$, $t \in T$, то разложение по полной ортонормированной системе для любой функции $f \in A$, $f(s) = \sum a_i \varphi_i(s,t_i)$, $s \in T$, $a_i = (f, \varphi_i)$, является рядом по выборочным значениям.

Следствие. Любая функция $f \in H$ в ГПВЯ H представима в виде ряда по выборочным значениям

$$f(s)=\sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\frac{2(st_k)^{1/2}}{\pi J_{\nu+1}(\pi t_k)}\frac{J_\nu(\pi s)}{(t_k^2-s^2)},\ 0\le s<\infty, \tag{1}$$

где πt_k – положительные нули функции Бесселя.

Следует заметить, что (1) путем эквивалентных преобразований приводится к виду

$$f(\frac{y_m}{\pi})=\sum_{s=1}^{\infty} f(\frac{\mu_s}{\pi})\frac{2(y_m\mu_s)^{1/2}}{J_{\nu+1}(\mu_s)}\frac{J_\nu(y_m)}{(\mu_s^2-y_m^2)},\ 0\le y_m<\infty. \tag{2}$$

4 Определение неизвестных коэффициентов (решение задачи)

Как показано в [2, формулы (5) и (6)], неизвестные коэффициенты A_n определяются из бесконечной СЛАУ:

$$\frac{h_n J_0(\mu_n)}{\mu_n}A_n+\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_{ns}A_s=F_n,\ n=1,2,3,..., \tag{3}$$

где α_{ns} и F_n задаются так

$$\alpha_{ns}=4\left(\frac{a}{b}\right)^2\mu_s J_0(\mu_s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1^2(y_m)}{J_0^2(\mu_m)}\frac{g_m}{(y_m^2-\mu_s^2)(y_m^2-\mu_n^2)}, \tag{4}$$

$$F_n=\frac{4ik\rho\Pi_1(\Gamma\rho)}{\beta c^2}\left[\frac{2}{I_1(\Gamma a)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1^2(y_m)}{J_0^2(\mu_m)}\frac{g_m}{(y_m^2-\mu_n^2)(\Gamma^2b^2+\mu_n^2)}-\frac{kI_1(\Gamma a)}{\beta}\frac{\Phi}{\Gamma^2a^2+\mu_n^2}\right],$$

$$y_m=\frac{a}{b}\mu_m,\ \Phi=\frac{K_1(\Gamma b)}{I_1(\Gamma b)}-\frac{K_1(\Gamma a)}{I_1(\Gamma a)}.$$

Решение бесконечной системы (3) проводилось в [2] численно. При помощи метода суммирования рядов в ГПВЯ решение данной системы можно получить аналитически. Для этого подставляем (4) в (3):

$$\frac{h_n J_0(\mu_n)}{\mu_n}A_n-4\left(\frac{a}{b}\right)^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1^2(y_m)}{J_0^2(\mu_m)}\frac{g_m}{(y_m^2-\mu_n^2)}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mu_s J_0(\mu_s)A_s}{(\mu_s^2-y_m^2)}=F_n,\ n=1,2,3,.... \tag{5}$$

В (5) просуммируем ряд:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mu_s J_0(\mu_s)A_s}{(\mu_s^2-y_m^2)}. \tag{6}$$

С этой целью представим искомые коэффициенты A_s в виде:

$$A_s=C_s J_1(\frac{b}{a}\mu_s)\frac{2(\mu_s)^{1/2}}{J_2(\mu_s)},\ s=1,2,3,... . \tag{7}$$

С учетом (7) для ряда (6) имеем:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mu_s J_0(\mu_s)A_s}{(\mu_s^2-y_m^2)}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mu_s J_0(\mu_s)}{(\mu_s^2-y_m^2)}J_1(\frac{b}{a}\mu_s)\frac{2(\mu_s)^{1/2}}{J_2(\mu_s)}C_s\frac{(y_m)^{1/2}}{(y_m)^{1/2}}\frac{J_1(y_m)}{J_1(y_m)}=$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2(y_m\mu_s)^{1/2}}{J_2(\mu_s)}\frac{J_1(y_m)}{(\mu_s^2-y_m^2)}\frac{\mu_s J_0(\mu_s)J_1(\frac{b}{a}\mu_s)}{(y_m)^{1/2}J_1(y_m)}C_s=$$

$$=\frac{\mu_s J_0(\mu_s)J_1(\frac{b}{a}\mu_s)}{(y_m)^{1/2}J_1(y_m)}C_s\Bigg|_{\mu_s=y_m}=\frac{y_m J_0(y_m)J_1(\frac{b}{a}y_m)}{(y_m)^{1/2}J_1(y_m)}C_m\Bigg|_{y_m=\frac{a}{b}\mu_m}=$$

$$=\frac{(\frac{a}{b}\mu_m)^{1/2}J_0(\frac{a}{b}\mu_m)J_1(\mu_m)}{J_1(\frac{a}{b}\mu_m)}C_m=0. \tag{8}$$

Последнее равенство верно, поскольку μ_m – корни уравнения $J_1(\mu_m)=0$. Таким образом, установлено, что ряд (6) обращается в ноль. Теперь система (3) принимает вид:

$$\frac{h_n J_0(\mu_n)}{\mu_n}A_n=F_n,\ n=1,2,3,\dots \tag{9}$$

Отсюда можно получить выражение для определения коэффициентов A_n:

$$A_n=\frac{\mu_n F_n}{h_n J_0(\mu_n)},\ n=1,2,3,\dots. \tag{10}$$

Коэффициенты B_n определяются по формуле [2]:

$$B_n=\frac{J_1(y_n)}{J_0^2(\mu_n)}[2(a/b)^2\sum_{s=1}^{\infty}A_s\frac{\mu_s J_0(\mu_s)}{y_n^2-\mu_s^2}-i\frac{4Ik\rho}{\beta c^2}\frac{I_1(\Gamma\rho)}{I_1(\Gamma a)}(\Gamma^2 b^2+\mu_n^2)^{-1}]. \tag{11}$$

Подставляя (7) в ряд по s из (11), определим его сумму:

$$\sum_{s=1}^{\infty}A_s\frac{\mu_s J_0(\mu_s)}{y_n^2-\mu_s^2}=\sum_{s=1}^{\infty}C_s J_1(\frac{b}{a}\mu_s)\frac{2(\mu_s)^{1/2}\mu_s J_0(\mu_s)}{J_2(\mu_s)(y_n^2-\mu_s^2)}=$$

$$=-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{C_s\mu_s J_0(\mu_s)J_1(\frac{b}{a}\mu_s)}{(y_n)^{1/2}J_1(y_n)}\frac{2(y_n\mu_s)^{1/2}J_1(y_n)}{J_2(\mu_s)(\mu_s^2-y_n^2)}=0. \tag{12}$$

С учетом результата (12) формула для нахождения неизвестных коэффициентов B_n принимает вид:

$$B_n=-\frac{J_1(y_n)}{J_0^2(\mu_n)}\frac{4iIk\rho}{\beta c^2}\frac{I_1(\Gamma\rho)}{I_1(\Gamma a)}(\Gamma^2 b^2+\mu_n^2)^{-1}. \tag{13}$$

5 Результаты и выводы

С помощью коэффициентов A_n и B_n, представленных (10) и (13), можно определить различные энергетические характеристики рассеянного поля. Например, полный поток энергии через сечения волноводов S_1 и S_2. которые расположены по обе стороны от неоднородности, находится по формуле [2]:

$$P = \int_0^\infty P_\omega d\omega, \tag{14}$$

где $P_\omega = \dfrac{\pi c a^2}{k} \sum_k J_0^2(\mu_n)(h_n \mid A_n \mid^2 + (b/a)^2 g_n \mid B_n \mid^2)$. В (14) суммирование ведется только по тем волнам, которые свободно распространяются в волноводах.

Работа, совершаемая за все время пролета над заданным током I, определяется азимутальной составляющей электрического поля и равна

$$T^E = \int_0^\infty T_\omega^E d\omega,$$

где
$$T_\omega^E = \frac{4\pi a^2 I\rho}{c\beta} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n J_1(\frac{\mu_n \rho}{a}) \frac{h_n - \omega/v}{\mu_n^2 + \Gamma^2 a^2} + (b/a)^2 B_n J_1(\frac{\mu_n \rho}{b}) \frac{g_n + \omega/v}{\mu_n^2 + \Gamma^2 b^2}].$$

Поле излучения обусловливает действие продольной силы на движущийся кольцевой ток. Полная работа продольной силы на всем пути движения, а также ее спектральная плотность выражаются как

$$T^H = \int_0^\infty T_\omega^H d\omega,$$

где
$$T_\omega^H = -\frac{4\pi\rho a^2}{\omega} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n J_1(\frac{\mu_n \rho}{a}) h_n \frac{h_n - \omega/v}{\mu_n^2 + \Gamma^2 a^2} - (b/a)^2 B_n J_1(\frac{\mu_n \rho}{b}) g_n \frac{g_n + \omega/v}{\mu_n^2 + \Gamma^2 b^2}].$$

Приведенные результаты позволяют сделать следующие **выводы.**

1) Метод суммирования рядов в ГПВЯ можно использовать для определения сумм избранных рядов.

2) Преимущества названного метода заключаются: в применении эквивалентных преобразований к общему члену ряда, что позволяет аналитически получить решение за меньшее количество шагов; в отсутствии необходимости использовать таблицы интегральных преобразований и обращаться к интегрированию в комплексной области.

3) Применение известных результатов теории ГПВЯ для решения граничных электродинамических задач дает возможность упрощать известные методы и получать на их основе аналитическое решение, удобное для дальнейшего численного анализа.

4) Путем доказательства теорем могут быть получены новые математические результаты для суммирования рядов [1].

Список литературы: 1. *Chumachenko S.V.* Summation method of selected series for IP-core design // Radioelectronika i informatika. 2003. №3. P. 197 – 203. 2. *Воскресенский Г.В., Курдюмов В.Н.* О характеристиках взаимодействия движущегося кольцевого тока с неоднородной волноводной структурой // Радиофизика. 1976. Т. XIX, №1. 3. *Воскресенский Г.В., Курдюмов В.Н.* Излучение электронного кольца при пролете возле стыка двух круглых волноводов // Изв. вузов. Радиофизика, 1971. Т.XIV, №5. С. 778 – 787. (Изв. высш.учеб.заведений). 4. *Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И., Турбин П.В., Мищенко Е.А.* Численный анализ электродинамических свойств волноводов с прямоугольными нерегулярностями методом дискретных особенностей / Труды VIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Украина, Крым. 1-5 июня 1999. С. 17 – 19. 5. *Sergey P. Skobelev.* Shaping of Flat-Topped Element Patterns in an Array of Slow-Wave Strip Structures Excited by Parallel-Plate Waveguides // IEEE Transactions on antennas and propagation. Vol. 49, N12, December 2001. P. 1763 – 1768. 6. *Чумаченко В.С., Чумаченко С.В.* Синфазне збудження решітки, утвореної плоскими напівобмеженими хвилеводами // Радіоелектроніка та інформатика. 2002. № 2. С. 15 – 18. 7. *Чумаченко С.В.* Возбуждение решетки с диэлектрической пластиной // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №3. С. 14 – 17. 8. *Чумаченко С.В.* Возбуждение фазированной антенной решетки сложной структуры // Радиоэлектроника и информатика. 2003. №1. С. 10 – 14. 9. *Чумаченко С.В.* Електромагнітне випромінювання електронного кільця, що рухається уздовж неоднорідної хвилевідної структури // Радіоелектроніка та інформатика. 2003. № 2. С. 31 – 33. 10. ***Функции*** с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике: Пер. М.К. Размахнина и В.П. Яковлева. М.: Сов. радио, 1971. 256 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 29.03.2004