УДК 519.7

О БУЛЕВЫХ РЕЛЯЦИОННЫХ СЕТЯХ

М. Ф. Бондаренко[1], И. В. Каменева[2], Н. Е. Русакова[3], Ю. П. Шабанов-Кушнаренко[4], И. Ю. Шубин[5]

[1-5]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

В статье [1] были введены алгебра логики, ее обобщение – алгебра Буля и частный случай алгебры Буля – алгебра конечных предикатов. В настоящей работе описывается на языке алгебры конечных предикатов процесс минимизации формул алгебры булевых функций. Делается это с той целью, чтобы начать разработку теории реляционных сетей, решающих уравнения алгебры булевых функций. Такие сети называются *булевыми реляционными сетями.*

АЛГЕБРА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, СКОБОЧНЫЕ ФОРМЫ, МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ РЕЛЯЦИОННЫХ СЕТЕЙ

Введение

Рассмотрим множество $\Sigma = \{0, 1\}$, состоящее из элементов 0 и 1, называемых *логическими*. Введем *логические переменные* $\xi, \eta \in \Sigma$. На множестве Σ определяем *логические операции дизъюнкции* $\xi \vee \eta$, *конъюнкции* $\xi \wedge \eta = \xi \cdot \eta = \xi\eta$ и *отрицания* $\neg\xi = \overline{\xi}$ следующими равенствами: $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$; $0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1$; $\neg 0 = 1, \neg 1 = 0$. Система, состоящая из множества Σ и заданных на нем операций $\vee$, $\wedge$, $\neg$ называется *алгеброй логики*. Множество Σ играет роль *носителя* алгебры логики, а логические операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$ – роль ее *базисных операций*. Для полноты *базиса* алгебры логики в нем необходимо ввести еще *базис элементов*. Если ввести базис элементов в виде множества {0, 1}, то получим полную алгебру. Этот базис алгебры логики избыточен. Примером несократимого базиса может служить базис, образованный из базиса элементов {0} и базиса операций $\{\neg\}$.

Приведем примеры формул алгебры логики: в первом базисе – $\neg((0 \vee 1) \cdot 0)$, во втором – $\neg 0$. Эти формулы тождественны, поскольку выражают один и тот же логический элемент 1. Примером тождества алгебры логики может служить запись $\neg((0 \vee 1) \cdot 0) = \neg 0$. Примерами законов алгебры логики могут служить записи: $\xi \vee \xi = \xi$, $\xi \wedge \eta = \eta \wedge \xi$, $\overline{\xi \cdot \eta} = \overline{\xi}\ \overline{\eta}$. Эти законы представляют собой *схемы тождеств* алгебры логики, они выражены не на языке алгебры логики, а на каком-то ином языке, который является метаязыком по отношению к языку алгебры логики. Что собой представляет этот метаязык? Это есть алгебра, в которой базисными элементами служат логические переменные ξ, η, ζ и булевы функции 0 и 1. Носителем этой алгебры является множество возможных трехместных булевых функций вида $f(\xi, \eta, \zeta)$, а в роли ее базисных операций выступают дизъюнкция, конъюнкция и отрицание булевых функций. Очевидно, что рассматриваемый метаязык – это алгебра трехместных булевых функций. Таким образом, алгебра логики естественным путем выводит нас на алгебру булевых функций. В общем случае алгебра булевых функций имеет носитель, образованный из всевозможных булевых функций типа $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, где $x_1, x_2, ..., x_m \in \{0, 1\}$. В роли базисных элементов в этой алгебре выступают булевы функции $x_1, x_2, ..., x_m$, 0, 1, а в роли базисных операций – дизъюнкция, конъюнкция и отрицание булевых функций указанного типа.

1. Задача построения булевых реляционных сетей

В этой статье разрабатываются некоторые аспекты теории булевых реляционных сетей. Изложить эту теорию на языке алгебры булевых функций не представляется возможным, поскольку в такой сети потребуются полюсы не только с логическими переменными, но и с буквенными. Поэтому приходится обратиться к языку алгебры предикатов [2], переводя формулы алгебры булевых функций на язык алгебры конечных предикатов. Способ такого перевода весьма прост. Логическим переменным ставятся $x_1, x_2, ..., x_m$ во взаимно однозначное соответствие *предметные (т.е. буквенные) переменные* $x_1, x_2, ..., x_m$, принимающие *буквенные значения* 0 или 1. Области изменения этих переменных определяются *усеченными законами истинности:*

$$x_1^{\,0} \vee x_1^{\,1} = 1,\ x_2^{\,0} \vee x_2^{\,1} = 1, \ldots, x_m^{\,0} \vee x_m^{\,1} = 1.$$

Каждая *формула алгебры булевых функций* переводится в соответствующую ей *форму алгебры предикатов* следующим образом: логическая переменная превращается в предикат узнавания буквы x_i^1, ее отрицание $\overline{x_i}$ – в предикат x_i^0 или же в предикат $\overline{x_i^1}$, знаки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ алгебры булевых функций заменяются на такие же по начертанию обозначения булевых операций алгебры предикатов. Рассмотрим пример такого перевода. Берем формулу алгебры булевых функций $\overline{x_1 \vee x_2} \cdot \overline{x_1}$. Ей соответствует формула алгебры предикатов $\overline{x_1^{\,1} \vee x_2^{\,1}} \cdot x_1^{\,0}$ или же формула $\overline{x_1^{\,1} \vee x_2^{\,1}} \cdot \overline{x_1^{\,1}}$, которая тоже дает правильный перевод.

2. Минимизация формул алгебры булевых функций

Изложим теперь теорию минимизации алгебры булевых функций на языке алгебры конечных предикатов. Пусть $x_1, x_2, ..., x_m$ – предметные переменные, области изменения которых ограничены множеством параметров 0 и 1. Образуем множество M всех предикатов типа $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, $x_1, x_2, ..., x_m \in \{0, 1\}$. Займемся отысканием *минимальной дизъюнктивной нормальной формы* для предикатов из множества M. Здесь мы наметим последовательность действий, которые должны быть выполнены при нахождении минимальной ДНФ.

Элементарной конъюнкцией называется любая конъюнкция предикатов узнавания с различными буквенными переменными, взятыми с произвольно фиксированными буквенными показателями. Наибольшее число множителей в элементарной конъюнкции равно m, наименьшее – нулю. В роли элементарной конъюнкции, не имеющей в своем составе ни одного предиката узнавания буквы, принимается формула 1. Примерами элементарных конъюнкций в алгебре предикатов типа $f(x_1, x_2, x_3)$, $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$ могут служить формулы $x_1^0 x_2^1$, $x_2^1 x_3^0$, $x_1^1 x_2^1 x_3^0$.

Любая дизъюнкция произвольного числа различных элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*. В роли ДНФ, не содержащей ни одного дизъюнктивного члена, принимается формула 0. Примером ДНФ в алгебре типа $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$ может служить формула $x_1^0 x_2^1 \vee x_2^1 x_3^0 \vee x_1^1 x_2^1 x_3^0$. Любая элементарная конъюнкция, в которой встречаются все предметные переменные алгебры предикатов заданного типа, называется *конституэнтой единицы*. Любая дизъюнкция произвольного числа различных конституэнт единицы называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)* предиката. Ниже приводится описание алгоритма преобразования произвольной формулы к СДНФ, сопровождаемого примером. Требуется преобразовать к СДНФ типа $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$ формулу

$$f = (x_1^0 \vee x_2^1)(x_1^0 \vee x_1^1 x_3^0) \vee (x_1^0 \vee x_2^0)(x_2^1 x_3^1 \vee x_2^0 x_3^0).$$

1. Раскрываем в формуле все скобки и производим упрощение:

$$f = x_1^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^1 x_3^0 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^1 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^0 \vee x_2^0 x_3^0.$$

В результате получаем некоторую ДНФ предиката.
2. Во все конъюнкции вводим недостающие переменные:

$$f = x_1^0 (x_2^0 \vee x_2^1)(x_3^0 \vee x_3^1) \vee x_1^0 x_2^1 (x_3^0 \vee x_3^1) \vee x_1^1 x_2^1 x_3^0 \vee$$
$$\vee x_1^1 x_2^1 x_3^0 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^0 \vee (x_1^0 \vee x_1^1) x_2^0 x_3^0.$$

3. Снова раскрываем скобки и производим упрощения:

$$f = x_1^0 x_2^0 x_3^0 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^1 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^0 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^1 \vee$$
$$\vee x_1^1 x_2^0 x_3^0 \vee x_1^1 x_2^1 x_3^0.$$

В результате получаем СДНФ предиката.

Элементарную конъюнкцию g назовем *собственной частью* элементарной конъюнкции f, если g может быть получена из f исключением некоторых предикатов узнавания буквы. Например, элементарная конъюнкция $x_1^0 x_3^1$ есть собственная часть элементарной конъюнкции $x_1^0 x_2^1 x_3^1$. Предикат g называется *импликантой* предиката f, если на любом наборе значений аргументов, для которого $f = 1$, имеем также $g = 1$. Будем говорить, что импликанта g накрывает своими единицами единицы предиката f. *Простой импликантой* предиката f называется любая элементарная конъюнкция, обладающая следующими свойствами: она есть импликанта предиката f и никакая ее собственная часть не является импликантой предиката f.

Дизъюнкция любого числа импликант конечного предиката есть импликанта этого предиката. Система S импликант конечного предиката f называется *полной*, если любая единица из таблицы предиката f накрывается единицами хотя бы одной импликанты системы S. Тому или иному конечному предикату может соответствовать, вообще говоря, несколько различных полных систем импликант. Дизъюнкция всех импликант полной системы импликант любого конечного предиката выражает собой этот предикат. Система всех простых импликант любого конечного предиката является его полной системой. Дизъюнкция всех простых импликант каждого конечного предиката представляет собой этот предикат. Она называется *сокращенной дизъюнктивной нормальной формой* данного конечного предиката.

Во многих случаях (однако далеко не всегда) сокращенная дизъюнктивная нормальная форма представляет собой более экономное средство записи конечных предикатов, чем СДНФ. Однако сокращенная форма, как правило, не совпадает с минимальной дизъюнктивной нормальной формой, оказывается сложнее ее. *Дизъюнктивным ядром* конечного предиката называется множество всех таких его простых импликант, исключение каждого из которых из системы всех простых импликант делает эту систему неполной. Элементы дизъюнктивного ядра входят в состав любой полной системы простых импликант. Система простых импликант конечного предиката называется *приведенной*, если она полна и никакое ее собственное подмножество не является полной системой. Дизъюнкция всех простых импликант приведенной системы называется *тупиковой дизъюнктивной нормальной формой* предиката. Предикат может иметь более одной тупиковой дизъюнктивной нормальной формы.

Любая минимальная дизъюнктивная нормальная форма предиката является, вместе с тем, и тупиковой ДНФ. Существуют конечные предикаты, которые имеют более одной минимальной ДНФ, содержащих одинаковое число предикатов узнавания буквы. Выбирая из числа тупиковых ДНФ одну с наименьшим числом предикатов узнавания буквы, получаем минимальную ДНФ предиката. Сформулированные понятия и положения позволяют наметить ход действий, лежащих в основе минимизации формул алгебры конечных предикатов. Вначале надо отыскать все простые импликанты заданного конечного предиката и составить из них сокращенную ДНФ. Затем следует найти все тупиковые ДНФ и из их числа выбрать минимальную ДНФ предиката.

3. Пример минимизации формулы алгебры булевых функций

В качестве исходной формулы булевой функции f берем СДНФ ее предиката f:

$$f = x_1^0x_2^0x_3^0x_4^0x_5^0 \vee x_1^0x_2^0x_3^1x_4^0x_5^1 \vee x_1^0x_2^0x_3^1x_4^1x_5^0 \vee$$

$$\vee x_1^0x_2^1x_3^0x_4^0x_5^0 \vee x_1^0x_2^1x_3^1x_4^0x_5^1 \vee x_1^0x_2^1x_3^1x_4^1x_5^0 \vee$$

$$\vee x_1^0x_2^1x_3^1x_4^1x_5^1 \vee x_1^1x_2^0x_3^0x_4^0x_5^0 \vee$$

$$\vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^0x_5^0 \vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^0x_5^1 \vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^1x_5^1 \vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^1x_5^0 \vee$$

$$\vee x_1^1x_2^1x_3^0x_4^0x_5^0 \vee x_1^1x_2^1x_3^1x_4^0x_5^1 \vee x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1x_5^0.$$

Отыскиваем все простые импликанты предиката f:

$$x_1^0x_2^1x_3^1x_4^1x_5^0 \vee x_1^0x_2^1x_3^1x_4^1x_5^1 = x_1^0x_2^1x_3^1x_4^1(x_5^0 \vee x_5^1) = x_1^0x_2^1x_3^1x_4^1;$$

$$x_1^0x_2^1x_3^1x_4^0x_5^1 \vee x_1^0x_2^1x_3^1x_4^1x_5^1 = x_1^0x_2^1x_3^1(x_4^0 \vee x_4^1)x_5^1 = x_1^0x_2^1x_3^1x_5^1;$$

$$x_1^1x_2^0x_3^0x_4^0x_5^0 \vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^0x_5^0 = x_1^1x_2^0(x_3^0 \vee x_3^1)x_4^0x_5^0 = x_1^1x_2^0x_4^0x_5^0;$$

$$x_1^0x_2^0x_3^1x_4^1x_5^0 \vee x_1^0x_2^1x_3^1x_4^1x_5^0 \vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^1x_5^0 \vee x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1x_5^0 =$$

$$= x_1^0(x_2^0 \vee x_2^1)x_3^1x_4^1x_5^0 \vee x_1^1(x_2^0 \vee x_2^1)x_3^1x_4^1x_5^0 = (x_1^0 \vee x_1^1) \wedge$$

$$\wedge (x_2^0 \vee x_2^1)x_3^1x_4^1x_5^0 = x_3^1x_4^1x_5^0;$$

$$x_1^0x_2^0x_3^1x_4^0x_5^1 \vee x_1^0x_2^1x_3^1x_4^0x_5^1 \vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^0x_5^1 \vee x_1^1x_2^1x_3^1x_4^0x_5^1 =$$

$$= x_1^0(x_2^0 \vee x_2^1)x_3^1x_4^0x_5^1 \vee x_1^1(x_2^0 \vee x_2^1)x_3^1x_4^0x_5^1 = (x_1^0 \vee x_1^1) \wedge$$

$$\wedge (x_2^0 \vee x_2^1)x_3^1x_4^0x_5^1 = x_3^1x_4^0x_5^1;$$

$$x_1^1x_2^0x_3^1x_4^0x_5^0 \vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^0x_5^1 \vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^1x_5^1 \vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^1x_5^0 =$$

$$= x_1^1x_2^0x_3^1x_4^0(x_5^0 \vee x_5^1) \vee x_1^1x_2^0x_3^1x_4^1(x_5^0 \vee x_5^1) = x_1^1x_2^0x_3^1 \wedge$$

$$\wedge (x_4^0 \vee x_4^1)(x_5^0 \vee x_5^1) = x_1^1x_2^0x_3^1;$$

$$x_1^0x_2^0x_3^0x_4^0x_5^0 \vee x_1^0x_2^1x_3^0x_4^0x_5^0 \vee x_1^1x_2^0x_3^0x_4^0x_5^0 \vee x_1^1x_2^1x_3^0x_4^0x_5^0 =$$

$$= x_1^0(x_2^0 \vee x_2^1)x_3^0x_4^0x_5^0 \vee x_1^1(x_2^0 \vee x_2^1)x_3^0x_4^0x_5^0 = (x_1^0 \vee x_1^1) \wedge$$

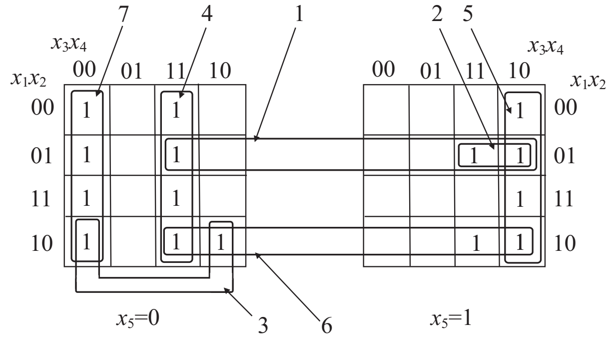
$$\wedge (x_2^0 \vee x_2^1)x_3^0x_4^0x_5^0 = x_3^0x_4^0x_5^0;$$

Сокращенная ДНФ предиката f имеет вид:

$$f = x_1^0x_2^1x_3^1x_4^1 \vee x_1^0x_2^1x_3^1x_5^1 \vee x_1^1x_2^0x_4^0x_5^0 \vee x_3^1x_4^1x_5^0 \vee x_3^1x_4^0x_5^1 \vee$$

$$\vee x_1^1x_2^0x_3^1 \vee_3^0 x_4^0x_5^0.$$

Изображаем сокращенную ДНФ предиката f графически в виде системы параллелепипедов на карте Карнау, каждый из которых соответствует своей простой импликанте (рис. 1).



$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

Рис. 1

Дизъюнктивное ядро предиката f образует простые импликанты с номерами 4, 5, 6 и 7. Простая импликанта 3 лишняя, а одна из импликант 1 и 2 в минимальной ДНФ необходима. Получаем два равноценных варианта минимальной ДНФ для предиката f:

$$\overset{1}{x_1^0x_2^1x_3^1x_4^1} \vee \overset{4}{x_3^1x_4^1x_5^0} \vee \overset{5}{x_3^1x_4^0x_5^1} \vee \overset{6}{x_1^1x_2^0x_3^1} \vee \overset{7}{x_3^0x_4^0x_5^0};$$

$$\overset{2}{x_1^0x_2^1x_3^1x_5^1} \vee \overset{4}{x_3^1x_4^1x_5^0} \vee \overset{5}{x_3^1x_4^0x_5^1} \vee \overset{6}{x_1^1x_2^0x_3^1} \vee \overset{7}{x_3^0x_4^0x_5^0}.$$

4. Теория минимизации булевых реляционных сетей

Разрабатывая теорию анализа и синтеза реляционных сетей, мы с удивлением обнаружили, что она своими корнями уходит в теорию минимизации формул алгебры предикатов. Наиболее ясно это видно на примере булевых реляционных сетей. Эффективно действующие реляционные сети для решения уравнений алгебры булевых функций невозможно построить, используя лишь язык алгебры булевых функций. Дело в том, что перед построением сети приходится бинаризовать булево отношение, выраженное уравнением алгебры булевых функций, а для этого надо ввести в булевом отношении дополнительную буквенную переменную с числом значений, большим двух. А это требует перехода от двоичного языка алгебры булевых функций к буквенному языку алгебры предикатов. Вот почему нам пришлось изложить учение о минимизации булевых функций на языке алгебры предикатов.

Рассмотрим пример бинаризации булева отношения. Берем уравнение

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1, \tag{1}$$

где f – булева функция, использованная выше в нашем примере минимизации и выраженная на языке алгебры предикатов. Составляем таблицу 1 отношения, выраженного уравнением (1). В таблицу вводим дополнительный столбец с номером строки x_6 таблицы.

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	2
0	0	1	1	0	3
0	1	0	0	0	4
0	1	1	0	1	5
0	1	1	1	0	6
0	1	1	1	1	7
1	0	0	0	0	8
1	0	1	0	0	9
1	0	1	0	1	10
1	0	1	1	1	11
1	0	1	1	0	12
1	1	0	0	0	13
1	1	1	0	1	14
1	1	1	1	0	15

$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

Получили новый предикат $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, равный:

$$g = x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^0 x_5^0 x_6^1 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^1 x_4^0 x_5^1 x_6^2 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^0 x_6^3 \vee$$
$$\vee x_1^0 x_2^1 x_3^0 x_4^0 x_5^0 x_6^4 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^0 x_5^1 x_6^5 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^1 x_5^0 x_6^6 \vee$$
$$\vee x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^1 x_5^1 x_6^7 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^0 x_5^0 x_6^8 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^0 x_5^0 x_6^9 \vee$$
$$\vee x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^0 x_5^1 x_6^{10} \vee x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^1 x_6^{11} \vee x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^0 x_6^{12} \vee$$
$$\vee x_1^1 x_2^1 x_3^0 x_4^0 x_5^0 x_6^{13} \vee x_1^1 x_2^1 x_3^1 x_4^0 x_5^1 x_6^{14} \vee x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^0 x_6^{15}.$$

Бинаризуя предикат g, получаем пять бинарных предикатов g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 (табл. 2).

Таблица 2

x_1	x_6	x_2	x_6	x_3	x_6	x_4	x_6	x_5	x_6
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	2	0	2	1	2	0	2	1	2
0	3	0	3	1	3	1	3	0	3
0	4	1	4	0	4	0	4	0	4
0	5	1	5	1	5	0	5	1	5
0	6	1	6	1	6	1	6	0	6
0	7	1	7	1	7	1	7	1	7
1	8	0	8	0	8	0	8	0	8
1	9	0	9	1	9	0	9	0	9
1	10	0	10	1	10	0	10	1	10
1	11	0	11	1	11	1	11	1	11
1	12	0	12	1	12	1	12	0	12
1	13	1	13	0	13	0	13	0	13
1	14	1	14	1	14	0	14	1	14
1	15	1	15	1	15	1	15	0	15
$g_1(x_1, x_6)$		$g_2(x_2, x_6)$		$g_3(x_3, x_6)$		$g_4(x_4, x_6)$		$g_5(x_5, x_6)$	

Выписываем формулы для предикатов $g_1 \div g_5$:

$$g_1(x_1, x_6) = x_1^0(x_6^1 \vee x_6^2 \vee x_6^3 \vee x_6^4 \vee x_6^5 \vee x_6^6 \vee x_6^7) \vee$$
$$\vee x_1^1(x_6^8 \vee x_6^9 \vee x_6^{10} \vee x_6^{11} \vee x_6^{12} \vee x_6^{13} \vee x_6^{14} \vee x_6^{15});$$

$$g_2(x_2, x_6) = x_2^0(x_6^1 \vee x_6^2 \vee x_6^3 \vee x_6^8 \vee x_6^9 \vee x_6^{10} \vee x_6^{11} \vee x_6^{12}) \vee$$
$$\vee x_2^1(x_6^4 \vee x_6^5 \vee x_6^6 \vee x_6^7 \vee x_6^{13} \vee x_6^{14} \vee x_6^{15});$$

$$g_3(x_3, x_6) = x_3^0(x_6^1 \vee x_6^4 \vee x_6^8 \vee x_6^{13}) \vee x_3^1(x_6^2 \vee x_6^3 \vee x_6^5 \vee$$
$$\vee x_6^6 \vee x_6^7 \vee x_6^9 \vee x_6^{13} \vee x_6^{10} \vee x_6^{11} \vee x_6^{12} \vee x_6^{13} \vee x_6^{14});$$

$$g_4(x_4, x_6) = x_4^0(x_6^1 \vee x_6^2 \vee x_6^4 \vee x_6^5 \vee x_6^8 \vee x_6^9 \vee x_6^{10} \vee x_6^{13} \vee x_6^{14}) \vee$$
$$\vee x_4^1(x_6^3 \vee x_6^6 \vee x_6^7 \vee x_6^{11} \vee x_6^{12} \vee x_6^{15});$$

$$g_5(x_5, x_6) = x_5^0(x_6^1 \vee x_6^3 \vee x_6^4 \vee x_6^6 \vee x_6^8 \vee x_6^9 \vee x_6^{12} \vee x_6^{13} \vee x_6^{15}) \vee$$
$$\vee x_5^1(x_6^2 \vee x_6^5 \vee x_6^7 \vee x_6^{10} \vee x_6^{11} \vee x_6^{14}).$$

Реляционная сеть изображена на рис. 2.

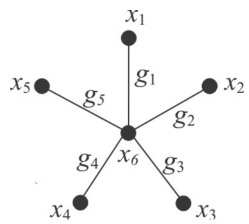


Рис. 2

Ее сложность оценивается 85-ю предикатами узнавания буквы. Столь же эффективно действующую сеть можно получить, если вместо номеров конституэнт единицы предиката f использовать номера простых импликант из его минимальной ДНФ. Каждая простая импликанта представляет собой декартово произведение некоторых множеств. Декартовы произведения имеют максимальную размерность, совпадающую с размерностью предметного пространства. В нашем примере эта размерность равна пяти. Выбираем первый вариант минимальной ДНФ предиката. Получаем следующую нумерацию простых импликант:

$$№\,1 - x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^1 (x_5^0 \vee x_5^1),$$
$$№\,4 - (x_1^0 \vee x_1^1)(x_2^0 \vee x_2^1) x_3^1 x_4^1 x_5^0,$$
$$№\,5 - (x_1^0 \vee x_1^1)(x_2^0 \vee x_2^1) x_3^1 x_4^0 x_5^1,$$
$$№\,6 - x_1^0 x_2^0 x_3^1 (x_4^0 \vee x_4^1)(x_5^0 \vee x_5^1),$$
$$№\,7 - (x_1^0 \vee x_1^1)(x_2^0 \vee x_2^1) x_3^0 x_4^0 x_5^0.$$

Здесь мы выписали простые импликанты не в сокращенном, а в полном виде, чтобы было видно, что все они пятимерны, и какие множества являются сомножителями каждого декартова произведения.

В роли аналога таблицы 1 теперь выступает таблица 3.

Таблица 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	4
0	1	1	1	0	4
1	0	1	1	0	4
1	1	1	1	0	4
0	0	1	0	1	5
0	1	1	0	1	5
1	0	1	0	1	5
1	1	1	0	1	5
1	0	1	0	0	6
1	0	1	0	1	6
1	0	1	1	0	6
1	0	1	1	1	6
0	0	0	0	0	7
0	1	0	0	0	7
1	0	0	0	0	7
1	1	0	0	0	7

$h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7)$

Бинаризуя предикат h, получаем бинарные предикаты $h_1 \div h_5$ (табл. 4).

Таблица 4

x_1	x_7	x_2	x_7	x_3	x_7	x_4	x_7	x_5	x_7
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
0	4	0	4	1	4	1	4	1	1
1	4	1	4	1	5	0	5	0	4
0	5	0	5	1	6	0	6	1	5
1	5	1	5	0	7	1	6	0	6
1	6	0	6			0	7	1	6
0	7	0	7					0	7
1	7	1	7						
$h_1(x_1, x_7)$		$h_2(x_2, x_7)$		$h_3(x_3, x_7)$		$h_4(x_4, x_7)$		$h_5(x_5, x_7)$	

Выписываем формулы для предикатов $h_1 \div h_5$:

$$h_1(x_1, x_7) = x_1^0(x_7^1 \vee x_7^4 \vee x_7^5 \vee x_7^7) \vee x_1^1(x_7^4 \vee x_7^5 \vee x_7^6 \vee x_7^7);$$

$$h_2(x_2, x_7) = x_2^0(x_7^4 \vee x_7^5 \vee x_7^6 \vee x_7^7) \vee x_2^1(x_7^1 \vee x_7^4 \vee x_7^5 \vee x_7^7);$$

$$h_3(x_3, x_7) = x_3^0 x_7^7 \vee x_3^1(x_7^1 \vee x_7^4 \vee x_7^5 \vee x_7^6);$$

$$h_4(x_4, x_7) = x_4^0(x_7^5 \vee x_7^6 \vee x_7^7) \vee x_4^1(x_7^1 \vee x_7^4 \vee x_7^6);$$

$$h_5(x_5, x_7) = x_5^0(x_7^1 \vee x_7^4 \vee x_7^6 \vee x_7^7) \vee x_5^1(x_7^1 \vee x_7^5 \vee x_7^6);$$

Теперь сложность реляционной сети оценивается 44-мя предикатами узнавания буквы, что почти в два раза меньше.

Выводы

Таким образом, отправляясь от достижений теории минимизации формул алгебры булевых функций, мы получили метод минимизации булевых реляционных сетей, эффективно решающих уравнения алгебры булевых функций. Следующий шаг в развитии теории реляционных сетей заключается в том, чтобы, отправляясь от достижений теории минимизации формул алгебры предикатов, выйти на метод минимизации произвольных реляционных сетей, поскольку понятие простой импликанты здесь отказывается служить, и его приходится заменить более сложным понятием *скобочной формы* [1]. В случае же булевых реляционных сетей переход от понятия простой импликанты к понятию скобочной формы осуществляется обычным введением недостающих предметных переменных, например, простой импликанте $x_3^1 x_4^1 x_5^0$ соответствует скобочная форма $(x_1^0 \vee x_1^1)(x_2^0 \vee x_2^1)x_3^1 x_4^1 x_5^0$.

Список литературы: 1. *Бондаренко, М. Ф.* Об алгебре предикатов [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Н. П. Кругликова, И. А. Лещинская, Н. Е. Русакова, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Бионика интеллекта науч.-техн. журнал. – Х.: Изд-во ХНУРЭ, 2010. – № 3 – С. 00 – 00. **2.** *Бондаренко, М.Ф.* Теория интеллекта [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Изд-во «СМИТ», 2007. – 576 с.

Поступила в редколлегию 06.01.2011.

УДК 519.7

Про булеві реляційні мережі / М. Ф. Бондаренко, І. В. Каменева, Н. Є. Русакова, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко, І. Ю. Шубін // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 1 (75). – С. 3–7.

У статті на мові алгебри предикатів описується процес мінімізації формул алгебри булевих функцій. Також вводиться поняття дужкової форми, яке замінює поняття простої імпліканти.

Табл. 4. Іл. 2. Бібліогр.: 2 найм.

UDC 519.7

About boole relational networks / M. F. Bondarenko, I. V. Kamenieva, N. E. Rusakova, Yu. P. Shabanov-Kushnarenko, I. Yu. Shubin // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2011. – № 1 (75). – P. 3–7.

In the paper we describe the process of formula's minimization of functions of Boolean algebra using the Algebra predicates language. Also we work in the concept of "bracket form". It is substitute for the concept of simple implicant. Ref.: 2 items.

Tab. 4. Fig. 2. Ref.: 2 items.