Проблемы бионики
1998 Вып. 49. С. 39 — 45

ХТУРЭ

УДК 519.7

С.А. ПОСЛАВСКИЙ, В.А. ПОХОДЕНКО,
С.Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДИКАТА И ЕГО СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ*

Пусть на декартовом квадрате m-мерного векторного пространства M над полем G задан предикат E. Базис $(p_1, p_2, ..., p_m)$ пространства M произвольно фиксирован. Предикат E называется *линейным*, если для любых x, $y \in M$ он может быть выражен в виде

$$E(x, y)=D(F(x), F(y)), \tag{1}$$

где

$$F(x)=(xk_1, xk_2, ..., xk_n), \tag{2}$$

$$xk_i=\xi_1\chi_{1i}+\xi_2\chi_{2i}+...+\xi_m\chi_{mi}. \tag{3}$$

Здесь $k_1, k_1, ..., k_n$ - фиксированные линейно независимые векторы; $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$ - координаты вектора x; $\chi_{1i}, \chi_{2i}, ..., \chi_{mi}$ - координаты вектора k_i; D - предикат равенства, заданный на $G^n \times G^n$. Имеется в виду, что $n \leq m$. Символом F обозначен линейный оператор, отображающий M в G^n.

Предикат E называется *аддитивным*, если для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ из x_1Ey_1 и x_2Ey_2 следует $(x_1+y_1)E(x_2+y_2)$. Предикат E называется *однородным*, если для любых $\alpha \in G$ и x, $y \in M$ из xEy следует $\alpha xE\alpha y$. Предикат E называется *n-мерным*, если существуют векторы $e_1, e_2, ..., e_n \in M$ такие, что равенство

$$E(x, \sum_{i=1}^{n} F_i(x)e_i)=1 \tag{4}$$

выполняется для каждого $x \in M$ при единственном наборе коэффициентов $F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)$. Здесь $F_1, F_2, ..., F_n$ - фиксированные функции, определенные на множестве M со значениями в множестве G. Ниже формулируется и доказывается теорема об условиях существования линейного предиката.

Теорема. *Предикат E линеен в том и только том случае, когда он рефлексивен, симметричен, транзитивен, аддитивен, однороден и n-мерен.*
Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что предикат E линеен, и

---

* Статья публикуется в авторской редакции.

выведем отсюда его рефлексивность, симметричность, транзитивность, аддитивность, однородность и n-мерность. Выводим рефлексивность. Для любого $x \in M$ $F(x)DF(x)$. В силу линейности предиката E xEx. Выводим симметричность. Предположим, что $x,y \in M$ таковы, что xEy. Тогда $F(x)DF(y)$, $F(y)DF(x)$, yEx. Выводим транзитивность. Пусть x, y, $z \in M$ таковы, что xEy и xEz. Тогда $F(x)DF(y)$, $F(y)DF(z)$, $F(x)DF(z)$, xEz. Выводим аддитивность. Пусть x_1, x_2, y_1, $y_2 \in M$ выбраны так, что x_1Ey_1 и x_2Ey_2. Отсюда следует, что $F(x_1)DF(y_1)$ и $F(x_2)DF(y_2)$. Ввиду линейности предиката E для любого $i=1,2, ...,n$ имеем $x_1k_i=y_1k_i$ и $x_2k_i=y_2k_i$. Отсюда, пользуясь свойствами арифметического пространства, выводим $x_1k_i+x_2k_i = y_1k_i+y_2k_i$, $(x_1+x_2)k_i = =(y_1+y_2)k_i$. Следовательно $F(x_1+x_2)DF(y_1+y_2)$, а значит, $(x_1+x_2)E(y_1+y_2)$. Выводим однородность. Пусть x, $y \in M$ таковы, что xEy. Это означает, что $xk_i=yk_i$. Для произвольного $\alpha \in G$ имеем $\alpha(xk_i)=\alpha(yk_i)$, $(\alpha x)k_i=(\alpha y)k_i$, Отсюда следует $F(\alpha x)DF(\alpha y)$ и $\alpha xE\alpha y$.

Выводим n-мерность. Выберем векторы e_1, e_2, ..., $e_n \in M$ так, чтобы набор $(e_1, e_2..., e_n)$ был дуален набору векторов $(k_1, k_2, ..., k_n)$. Как известно [1], такой набор всегда существует. Требование n-мерности предиката E означает, что уравнение (4) при каждом $x \in M$ однозначно разрешимо относительно набора коэффициентов $(F_1(x), F_2x), ..., F_n(x))$. Докажем это. Уравнение (4), согласно (1)-(3), равносильно системе уравнений

$$xk_j=(\sum_{i=1}^{n} F_j(x)e_i)k_j,$$

где $j=1,2, ...,n$. Используя законы арифметического пространства, последнюю систему равенств переписываем в виде

$$xk_j=(\sum_{i=1}^{n} F_i(x))(e_ik_j).$$

В силу дуальности наборов векторов $(e_1, e_2..., e_n)$ и $(k_1, k_2..., k_n)$ имеем $e_ik_j=0$ при $i \neq j$ и $e_ik_i=1$ при $i=j$. Поэтому последняя система равенств запишется в виде $F_i(x)=xk_i$. Это означает, что коэффициенты $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ при каждом x однозначно определены. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что предикат E рефлексивен, симметричен, транзитивен, аддитивен, однороден и n-мерен, и выведем отсюда его линейность. Докажем сначала, что функции $F_1(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$, фигурирующие в условии n-мерности, линейны. Для этого нужно убедиться в их адитивности и однородности [2]. В силу n-мерности предиката E для любых x, y M имеет место равенство (4), а также равенства

$$E(y, \sum_{i=1}^{n} F_i(y)e_i)=1, \tag{5}$$

$$E(x+y, \sum_{i=1}^{n} F_i(x+y)e_i)=1. \tag{6}$$

Пользуясь свойством аддитивности предиката E, из (4) и (5) выводим

$$E(x+y, (\sum_{i=1}^{n} F_i(x)+\sum_{i=1}^{n} F_i(y))e_i)=1. \tag{7}$$

В силу n-мерности предиката E множители при векторах e_i в (6) и (7) совпадают, поэтому $F_i(x+y)=F_i(x)+F_i(y)$ при всех $i=1,2, ..., n$. Таким образом, функции $F_1(x)$, $F_2x)$, ..., $F_n(x)$ аддитивны. В силу n-мерности предиката E для любых $\alpha \in G$ и x M имеем:

$$E(\alpha x, \sum_{i=1}^{n} F_i(\alpha x)e_i)=1. \tag{8}$$

Используя однородность предиката E, из (3) выводим

$$E(\alpha x, \sum_{i=1}^{n} F_i(x)e_i)=1. \tag{9}$$

Производим преобразования в последнем равенстве с помощью равенств (5) и (6):

$$E(\alpha x, \sum_{i=1}^{n} (\alpha F_i(x))e_i)=1 \tag{10}$$

В силу n-мерности предиката E множители при векторах e_i в (8) и (9) совпадают, поэтому $F_i(\alpha x)=\alpha F_i(x)$ при любых α и x для всех $i=1,2, ..., n$. Таким образом, функции $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ однородны, следовательно, они линейны. Любая линейная функция $F(x)$ на M со значениями в множестве G может быть представлена в виде $F(x)=xk$ [3], где k - некоторый вектор из M. Значит, найдутся векторы $k_1, k_2, ..., k_n$ G такие, что

$$F_1(x)=xk_1,\ F_2(x)=xk_2,\ ...,\ F_n(x)=xk_n. \tag{11}$$

Докажем далее, что для любых x, y M xEy в том и только том случае, когда $F_i(x)=F_i(y)$ для всех $i=1,2, ..., n$. Пусть xEy. Из этого соотношения и из

(5) с помощью свойства транзитивности предиката E выводим:

$$E(x, \sum_{i=1}^{n} F_i(y)e_i)=1.$$

Из (12) и только что записанного равенства, используя свойство n-мерност предиката E, находим $F_i(x)=F_i(y)$ для всех $i=1,2, ...,n$. Пусть тепер $F_i(x)=F_i(y)$ для всех $i=1,2, ...,n$. Отсюда следует

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x)e_i=\sum_{i=1}^{n} F_i(y)e_i.$$

Из последнего равенства и (5) находим

$$E(y, \sum_{i=1}^{n} F_i(x)e_i)=1.$$

Из (4) и только что записанного равенства с помощью свойств симметри . ности и транзитивности выводим xEy.

Доказанное означает, что условие xEy равносильно равенству $(F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x))=(F_1(y), F_2(y), ..., F_n(y))$. Для каждой линейной функции $F: M\rightarrow G$ найдется такое $k\in M$, что $F(x)=xk$ для всех $x\in M$. Поэтому $F_i(x)=xk_i$ и $F_i(y)=yk_i$ для любых $x, y\in M$ и всех $i=1,2, ...,n$. Это означает, что условие xEy равносильно равенству $(xk_1, xk_2, ..., xk_n)=(yk_1, yk_2, ..., yk_n)$, т.е. равенству $F(x)=F(y)$. Итак, мы доказали, что любой рефлексивный, симметричный, транзитивный, аддитивный, однородный и n-мерный предикат может быть выражен в виде (1)-(3) при подходящем выборе векторов $k_1, k_2, ..., k_n$. Осталось доказать линейную независимость векторов $k_1, k_2, ..., k_n$. С этой целью установим, что функции $F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)$ линейно независимы. Для этого достаточно доказать, что равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_i(x)=0$$

выполняется для всех $x\in M$ лишь в том случае, когда все коэффициенты γ равны нулю.

Докажем последнее утверждение. Доказательство ведем от противно го. Предположим, что это утверждение неверно. Тогда найдется такой но мер j из множества $\{1,2, ...,n\}$, для которого при любом x

$$F_j(x)=\sum_{i=1,\ j\neq i}^{n} \beta_i F_i(x), \quad (12$$

где $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, ..., \beta_n$ - подходящие коэффициенты. Предикат E рефлексивен, значит, $E(e_j, e_j)=1$ для любого $j=1, 2, ..., n$. Иначе говоря, $E(e_j, 0e_1+0e_2+...+0e_{j-1}+1e_j+0e_{j+1}+...+0e_n)=1$. По свойству n-мерности предиката E из последнего равенства выводим $F_j(e_j)=1$, для всех же $i \neq j$ имеем $F_i(e_j)=0$. Вместе с тем, подставляя в (12) $x=e_j$, находим $F_j(e_j)=\beta_1F_1(e_j)+\beta_2(e_j)+...+\beta_{j-1}F_{j-1}(e_j)+\beta_{j+1}F_{j+1}(e_j)+...+\beta_nF_n(e_j) = \beta_10+\beta_20+ +...+\beta_{j-1}0+\beta_{j+1}0+...+\beta_n0=0$. Получили равенство 1=0. Однако известно [4], что в любом векторном пространстве $1 \neq 0$. Мы пришли к противоречию. Отсюда вытекает линейная независимость функций $F_1(x)$, $F_2x)$, ..., $F_n(x)$, а следовательно, и линейная независимость векторов k_1, k_2..., k_n. Достаточность доказана. Итак, мы доказали, что все рефлексивные, симметричные, транзитивные, аддитивные, однородные и n-мерные предикаты, и только такие предикаты, могут быть представлены в виде $E(x,y)=D((F_1(x), F_2x), ..., F_n(x)), (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)))$, где $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ - подходящие линейно независимые линейные функции. Теорема доказана.

Прикладное значение теоремы состоит в том, что она указывает полную систему признаков линейной конечномерной операции F, идентифицируемой компараторным методом. Если предикат E, реализуемый системой компараторной идентификации объекта F, обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, однородности, аддитивности и n-мерности, то объект идентификации F можно описать в виде линейного оператора. В противном случае это невозможно. Таким образом, теорема указывает практический способ распознавания любого объекта, который можно идентифицировать рассматриваемым способом. Рассмотрим способ практической проверки характеристических свойств линейного объекта на примере зрительной системы человека.

Специфика проверки свойств аддитивности, однородности и n-мерности в случае цветового зрения человека состоит в том, что реально не существует световых излучений со спектрами, имеющими отрицательные компоненты. Кроме того, испытуемому нельзя предъявить излучения слишком большой интенсивности, иначе глаз ослепнет. Таким образом, в множестве M теоретически возможных входных сигналов органа зрения имеется некоторая часть M_1 всех тех световых излучений, которые реально могут быть предъявлены испытуемому в процессе идентификации его зрительной системы. Поскольку законы рефлексивности, симметричности и транзитивности выполняются для всех входных сигналов органа зрения, содержащихся в множестве M_1, то они могут быть чисто формально распространены на все множество M. Производя такое доопределение предиката E, мы не входим в противоречие с фактами зрения.

Закон аддитивности следует проверять на всех тех реальных излучениях x_1, x_2 y_1, y_2 M_1, суммы которых x_1+y_1 *и* x_2+y_2 также не выходят за пределы множества M_1. Кроме того, в роли равновыглядящих излучений можно брать любые равные элементы x и x множества M с физически нереализуемыми спектрами, поскольку закон рефлексивности только что был распространен на все множество M. Таким образом, если реальные излучения x_1 и y_1 выглядят для данного испытуемого равноцветными, то должны выглядеть равноцветными и излучения x_1+x и y_1+x, даже если сигнал x имеет физически нереализуемый спектр с отрицательными компонентами. Единственное ограничение при выборе сигнала x состоит в том, чтобы сигналы x_1+x и y_1+x были физически реализуемы, т.е. входили в состав множества M_1. Если это условие не будет выполняться, то опыт с предъявлением суммарных излучений просто нельзя будет выполнить на практике. Известно, что при всевозможных проверках такого рода закон аддитивности выполняется с той точностью, с которой реализуется предикат E [5]. Этот результат дает нам право, не вступая в противоречие с фактами, распространить действие закона аддитивности на все элементы множества M.

Закон однородности следует проверять на всех тех реальных излучениях $x, y \in M_1$ и числах $\alpha \in G$, произведения которых αx и αy не выходят за пределы множества M_1. Известно [6], что при всевозможных проверках такого рода закон однородности выполняется с той точностью, с которой фактически реализуется предикат E. Опираясь на этот факт, мы распространяем действие закона однородности на все элементы множества M и множества G. Пользуясь законом однородности, можно еще более разнообразить проверку закона аддитивности. Пусть имеются две пары x_1, x_2 и y_1, y_2 одноцветных излучений. Тогда при любых α, $\beta \in G$ элементы αx_1, αx_2 и βy_1, βy_2 следует признать одноцветными, даже если они физически нереализуемы. Если суммарные излучения $\alpha x_1+\beta y_1$ и $\alpha x_2+\beta y_2$ могут быть предъявлены испытуемому (т.е. принадлежат множеству M_1), то они должны породить в сознании испытуемого одинаковые цвета. В практике колориметрических измерений проводились и такого рода опыты, они неизменно подтверждали закон аддитивности [7].

Закон n-мерности при данной интерпретации в эксперименте проверяется при $n=3$. Предположим, что на левом поле сравнения сформировано световое излучение $x+\alpha'_1e_1+\alpha'_2e_2+\alpha'_3e_3$, а на правом - излучение $\alpha''_1e_1+\alpha''_2e_2+\alpha''_3e_3$. Здесь e_1, e_2, e_3 - специально подобранные элементы множества M. В роли этих элементов не обязательно использовать физически реализуемые световые излучения. Коэффициенты α'_1, α''_1, α'_2, α''_2, α'_3, α''_3 также можно брать произвольными из множества G. Символом x обозначен произвольный элемент множества M. В частности, им может быть элемент множества M_1, т.е. физически реализуемое световое излучение. Эксперимент состоит в том, что испытуемый сравнивает цвета полей сравнения и устанавливает их совпадение или несовпадение.

В качестве значений функций $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, фигурирующих в законе трехмерности, следует брать коэффициенты α'_1-α''_1, α'_2-α''_2, α'_3-α''_3. Принимая эти разности коэффициентов, мы следуем методу, указанному Шабановым-Кушнаренко [8]. Закон трехмерности будет выполняться, если для каждого элемента x, принадлежащего множеству M, в эксперименте наблюдается равенство цветов полей сравнения при единственном наборе значений коэффициентов $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$. Обширная практика колориметрических измерений [9] показывает, что закон трехмерности выполняется во всех без исключения случаях (для лиц с нормальным зрением, в патологических случаях этот закон выполняется в двумерной или одномерной формулировке) с той точностью, с которой испытуемый реализует предикат E. Коэффициенты $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ называются *координатами цвета*, соответствующего световому излучению x.

Итак, можно с полным основанием утверждать, что все условия, при которых вступает в силу теорема, выполняются применительно к зрительной системе человека. Это означает, что преобразование светового излучения в цвет, осуществляемое органом зрения человека, может быть математически описано в форме линейного оператора, отображающего m-мерное пространство световых излучений, где m - число линий в спектре светового излучения, в трехмерное пространство цветов. Подобно тому, как это только что сделано для цветового зрения человека, с помощью теоремы можно провести структурную идентификацию любого физического, технического или социально-экономического объекта и в результате выяснить, можно ли его отнести к классу конечномерных линейных объектов. Если да, то этот объект можно будет математически описать, пользуясь методами параметрической компараторной идентификации.

Список литературы: 1. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 415 с. 2. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971. 271 с. 3. *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969. 475 с. 4. *Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979. 623 с. 5. *Нюберг Н.Д.* Грассмана законы // Физ. энцикл. слов. 1960. Т. 1. С. 136. 6. *Нюберг Н.Д.* Курс цветоведения. М.: Гизлегпром, 1932. 140 с. 7. *Гуревич М.М.* Цвет и его измерение. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950. 268 с. 8. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Математическое моделирование некоторых функций человеческого зрения: Дис. ... д-ра техн. наук. Х., 1968. 280 с. Машинопись 9. *Федоров Н.Т.* Общее цветоведение. М.: Гостехтеориздат, 1939. 183 с.

Поступила в редколлегию 24.11.97