

УДК 517.988 : 519.632

О.І. Заверуха¹, М.В. Сидоров², І.Г. Яловега³¹ Харківський національний університет радіоелектроніки,
м. Харків, Україна, olha.zaverukha@nure.ua;² Харківський національний університет радіоелектроніки,
м. Харків, Україна, maxim.sidorov@nure.ua³ Харківський національний педагогічний університет імені Г.С. Сковороди,
м. Харків, Україна, yalovegaira@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ МАГНІТНИХ СИСТЕМ

В роботі розглядається задача математичного моделювання магнітної системи. Математичною моделлю розглядуваної системи є крайова задача для z -координати векторного потенціалу вектора магнітної індукції (задача магнітостатики). Використовуючи метод R -функцій, побудовано структуру розв'язку заданої крайової задачі, яка враховує умови спряження на межі контакту «ферромагнетик-вакуум». Для апроксимації невизначеної компоненти структури розв'язку пропонується використати проєкційний метод Гальоркіна. Наведено результати обчислювального експерименту для тестових значень параметрів моделі.

МАГНІТНА СИСТЕМА, ЗАДАЧА МАГНІТОСТАТИКИ, МЕТОД R-ФУНКЦІЙ, МЕТОД ГАЛЬОРКІНА

Заверуха О.І., Сидоров М.В., Яловега І.Г. Применение метода R-функций в математическом моделировании магнитных систем. В работе рассматривается задача математического моделирования магнитной системы. Математической моделью рассматриваемой системы является крайовая задача для z -координаты векторного потенциала вектора магнитной индукции (задача магнитостатики). Используя метод R -функций, строится структура решения поставленной крайовой задачи, учитывающая условия сопряжения на границе контакта «ферромагнетик-вакуум». Для аппроксимации неопределенной компоненты структуры решения предлагается использовать проекционный метод Галёркина. Приводятся результаты вычислительного эксперимента для тестовых значений параметров модели.

МАГНИТНАЯ СИСТЕМА, ЗАДАЧА МАГНИТОСТАТИКИ, МЕТОД R-ФУНКЦИЙ, МЕТОД ГАЛЁРКИНА

Zaverukha O.I., Sidorov M.V., Yalovega I.G. Application of R-functions method in mathematical modeling of magnetic systems. The work is representing mathematical modeling tasks of a magnetic system. The boundary value problem for the z -coordinate of the vector potential of the magnetic induction vector (magnetostatic problem) is the mathematical model of the system which we consider in the work process. We are use the R -function method, which constructed the structure of the solution of the boundary value problem which takes into account the conjugation conditions on the “ferromagnetic-vacuum” contact boundary. To approximate the uncertain component of the structure of the solution, it is proposed to use the projection Galerkin method. The results of the computational experiment for the test values of the model parameters are presented.

MAGNETIC SYSTEM, THE TASK OF MAGNITOSTATICS, R-FUNCTIONS METHOD, GALERKIN METHOD

Вступ

Магнітні системи поширені у природі та техніці – це атоми у кристалічній решітці ферромагнетиків, магніти прискорювачів, системи стабілізації штучних супутників тощо. Через високу ціну натурного дослідження таких систем у останні десятиріччя на перший план вийшли математичне моделювання та чисельний аналіз за допомогою ЕОМ. Зазвичай для чисельного аналізу магнітних систем використовують методи скінченних різниць, скінченних елементів, граничних інтегральних елементів тощо. Кожен з цих методів має свої переваги та недоліки [1]. Основним недоліком зазначених методів є те, що при переході до нової області потрібно наново генерувати та підстроювати під особливості області розрахункову сітку. Альтернативою існуючим методам чисельного розрахунку магнітних

систем є використання структурно-варіаційного методу R -функцій, запропонованого академіком Національної академії наук України В.Л. Рвачовим [5, 6, 8]. При розв'язанні задач математичної фізики метод R -функцій дозволяє будувати так звані структури розв'язку крайових задач – жмутки функцій, які точно задовольняють крайові умови задачі. При цьому геометрія області враховується точно.

Отже, вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу магнітних систем, використовуючи для цього метод R -функцій, є актуальною науковою задачею.

Метою роботи є застосування методу R -функцій до задачі чисельного аналізу тестової магнітної системи.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- розглянути постановку крайової задачі для потенціалу магнітного поля;
- з використанням методів теорії R-функцій розробити метод розв’язання розглядуваної задачі;
- провести обчислювальні експерименти для тестових значень параметрів моделі і проаналізувати результати.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [10].

1. Постановка задачі

Розглянемо магнітну систему (рис. 1), яка складається з феромагнетика Ω_f і вакууму Ω_v із замкнутими струмовими обмотками Ω_c . Постановка задачі магнітостатики полягає в тому, що треба знайти розподіл магнітного поля, яке створене стаціонарними струмами і намагніченістю ізотропних феромагнетиків [2, 3]. вважатимемо, що продовжний розріз магніту суттєво більше повздовжнього. Тоді векторний потенціал вектора магнітної індукції матиме лише одну ненульову координату $u = u(x, y)$ і від системи рівнянь Максвелла для стаціонарного магнітного поля можна перейти до скалярного рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\mu_0 J_z(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Тут μ – функція магнітної проникності феромагнетика, яка є відомою у Ω_f нелінійною функцією від вектора напруженості магнітного поля (для немагнітного середовища $\mu=1$), μ_0 – магнітна проникність вакууму, $J_z(x, y)$ – z-я компонента вектора об’ємної щільності струму, що відрізняється від нуля лише у Ω_c і задовольняє умову $\iint_{\Omega_c} J_z(x, y) dx dy = 0$,

$$u(x, y) = \begin{cases} u_f(x, y), & (x, y) \in \Omega_f, \\ u_v(x, y), & (x, y) \in \Omega_v. \end{cases}$$

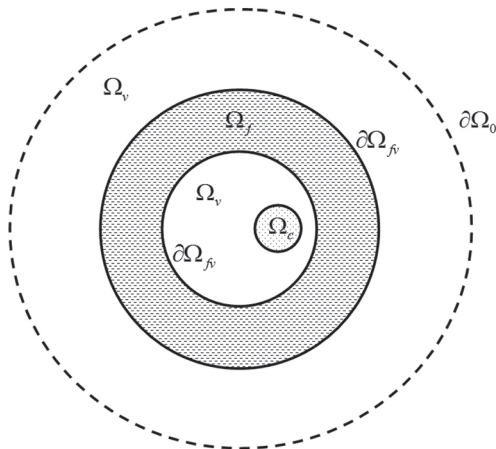


Рис. 1. Умовна схема магнітної системи

Рівняння (1) слід доповнити умовами спряження на межі $\partial\Omega_{fv}$ розділу феромагнетика та вакууму

$$u_f|_{\partial\Omega_{fv}} = u_v|_{\partial\Omega_{fv}}, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial u_f}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega_{fv}} = \frac{\partial u_v}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega_{fv}}, \quad (2)$$

де \mathbf{n} – одиничний вектор нормалі до $\partial\Omega_{fv}$, та умовою на нескінченності:

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} u = 0. \quad (3)$$

2. Загальні положення метода R-функцій

Математичною моделлю фізико-механічного поля зазвичай є розглядуване в деякій області Ω операторне рівняння

$$Au = f$$

з заданими крайовими умовами на межі $\partial\Omega$ області Ω . Тут u – деяка характеристика поля (температура, функція течії, зміщення від положення рівноваги тощо). Аналітичними компонентами крайової задачі є наведені в постановці функції і оператори, а область Ω та її межа $\partial\Omega$ – є геометричними компонентами. Через існування двох різнорідних видів інформації (аналітичної і геометричної) при знаходженні розв’язку крайової задачі виникають серйозні перешкоди, пов’язані з тим, що необхідно не тільки врахувати вигляд формул, що входять до постановки задачі, а й мати засоби зводити геометричну інформацію до аналітичного вигляду, щоб її можна було включити до розрахункового алгоритму. Провести цю процедуру і дозволяє метод R-функцій.

Метод R-функцій було запропоновано академіком НАН України В.Л. Рвачевим [8]. При знаходженні розв’язку крайових задач математичної фізики метод R-функцій пропонує побудувати так звану структуру розв’язку крайової задачі, тобто жмуток функцій, який точно задовольняє всім крайовим умовам задачі і залежить від деяких невідомих компонент. Зазначені невідомі компоненти далі обирають так, щоб у деякому сенсі задовольнити рівняння задачі. Для цього можна використовувати проєкційні чи варіаційні методи (метод Рітца, метод Гальоркіна, метод найменших квадратів, колокацій тощо). Зазначимо, що при цьому геометрія області враховується точно.

Застосування методу R-функцій в задачах чисельного аналізу фізико-механічних полів складається з наступних етапів:

- точний аналітичний опис геометрії розрахункової області, тобто побудова такої функції, яка б дорівнювала нулеві на межі, була б додатною всередині області і нормальна похідна (в напрямку зовнішньої нормалі) від якої на межі б дорівнювала -1 ;
- продовження крайових умов всередину області, тобто до визначення функцій і операторів, заданих на межі, у внутрішніх точках області;
- побудова загальної структури розв’язку, тобто такої формули, яка залежить від деяких невизначених функцій і при будь-якому їх виборі точно задовольняє всі крайові умови задачі;
- побудова наближеного розв’язку, тобто апроксимація невизначених функцій, що входять до структури розв’язку, одним із чисельних методів.

Розглянемо загальні положення теорії метода R -функцій [5, 6, 8].

Означення. R -функцією (функцією В.Л. Рвачева), що відповідає розбиттю числової осі на проміжки $(-\infty, 0)$ та $[0, +\infty)$, називається така функція, знак якої цілком визначається знаками її аргументів, тобто функція $z = f(x, y)$ називається R -функцією, якщо існує така булева функція F , що

$$S[z(x, y)] = F[S(x), S(y)],$$

де двозначний предикат

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

В цьому випадку булева функція F називається супроводжуючою.

Найбільш уживаною системою R -функцій є система \mathcal{R}_0 :

$$\begin{aligned} \bar{x} &\equiv -x, \\ x \wedge_0 y &\equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x \vee_0 y &\equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Супроводжуваними булевими функціями для них є відповідно \neg, \wedge, \vee .

Сформулюємо обернену задачу аналітичної геометрії. Нехай в \mathbb{R}^2 заданий геометричний об'єкт Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ і треба побудувати функцію $\omega(x, y)$, яка є додатною всередині Ω , від'ємною поза межами Ω і дорівнює нулю на $\partial\Omega$. Отже, рівняння $\omega(x, y) = 0$ буде в неявній формі визначати геометричне місце точок, яке відповідає межі $\partial\Omega$ області Ω .

Припустимо, що область Ω можна побудувати з більш простих областей

$$\Omega_1 = \{\omega_1(x, y) \geq 0\}, \dots, \Omega_m = \{\omega_m(x, y) \geq 0\},$$

де $\omega_i(x, y)$ – елементарні функції, $i = 1, 2, \dots, m$, за допомогою теоретико-множинних операцій об'єднання \cup , перетину \cap та доповнення \neg . Тоді області Ω можна поставити у відповідність предикат

$$\Omega = F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m),$$

який приймає значення 1, якщо $(x, y) \in \Omega \cup \partial\Omega$, і 0, якщо $(x, y) \notin \Omega \cup \partial\Omega$.

Перехід від предикатної форми задання області до звичайної, яка прийнята в аналітичній геометрії, відбувається за допомогою формальної заміни Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, m$, а символів $\{\cap, \cup, \neg\}$ – на символи R -операцій $\{\wedge_0, \vee_0, \neg\}$ відповідно. В результаті отримаємо єдиний аналітичний вираз $\omega(x, y)$, який визначає в елементарних функціях шукане рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$. При цьому для внутрішніх точок області буде виконуватися нерівність $\omega(x, y) > 0$, а для зовнішніх – $\omega(x, y) < 0$.

Означення. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається нормалізованим на межі $\partial\Omega$, якщо функція $\omega(x, y)$ задовольняє умовам

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = -1,$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Якщо $|\nabla\omega_1| \neq 0$ в $\Omega \cup \partial\Omega$, то для побудови нормалізованого рівняння $\partial\Omega$ можна скористатися формулою

$$\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla\omega_1|}.$$

Крім того, в деяких випадках, для нормалізації рівняння можна лише ввести сталі множники.

Для продовження крайових умов всередину області використовуються два основних підходи [8].

Нехай в точках $\partial\Omega$ функція φ_0 задана у вигляді

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} \varphi_{0,1}(s), & s \in \partial\Omega_1, \\ \dots & \dots \\ \varphi_{0,n}(s), & s \in \partial\Omega_n, \end{cases}$$

де ділянки межі $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_n$ попарно різні, не мають спільних внутрішніх точок і $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_n$.

Нехай далі $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, такі, що $\varphi_i|_{\partial\Omega_i} = \varphi_{0,i}$, а $\omega_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, такі, що $\omega_i(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_i$ і $\omega_i(x, y) > 0$ в $\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega_i$. Тоді функція

$$\varphi = \frac{\frac{\varphi_1}{\omega_1} + \dots + \frac{\varphi_n}{\omega_n}}{\frac{1}{\omega_1} + \dots + \frac{1}{\omega_n}} = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j}{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j}$$

має властивість

$$\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0.$$

Цю формулу називають формулою «склейки» і позначають $\varphi = EC\varphi_0$, де EC називають оператором склеювання межових значень.

Другий підхід пов'язаний з продовженням диференціальних операторів, які задані на $\partial\Omega$, в середину області Ω . Нехай $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$ області Ω . Тоді оператор D_1 , який діє за правилом

$$D_1 u \equiv (\nabla\omega, \nabla u) = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y},$$

в регулярних точках $\partial\Omega$ задовольняє рівність

$$-D_1 u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

де \mathbf{n} – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль.

Зазначимо, що вираз $D_1 u$ має сенс всюди в $\bar{\Omega}$ і за допомогою оператора D_1 можна будувати жмутки функцій, нормальна похідна яких, або довільна лінійна комбінація нормальної похідної і самої функції на межі області приймає задані значення.

Означення. Загальною структурою розв'язку крайової задачі називається вираз

$$u = B(\Phi, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_j\}_{j=1}^m),$$

який при довільному виборі компонент вектора Φ точно задовольняє усі крайові умови задачі. Тут

B – оператор, що залежить від геометрії області Ω і ділянок $\partial\Omega_i$ її межі, а також операторів крайових умов, але не залежний від вигляду оператора A і функції f .

Отже, структура розв'язку здійснює продовження крайових умов всередину області.

Наприклад, крайовій умові

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi_0(s), \quad s \in \partial\Omega,$$

задовольняє жмуток функцій

$$u = \varphi + \omega\Phi,$$

де $\varphi = EC\varphi_0$, $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння $\partial\Omega$.

Майже усі наближені методи розв'язання крайових задач для рівнянь у частинних похідних базуються на зведенні нескінченновимірної задачі до скінченновимірної. В методі R-функцій це досягається шляхом подання невизначеної компоненти Φ структури розв'язку у вигляді суми

$$\Phi(x, y) \approx \Phi_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x, y),$$

де $\varphi_k(x, y)$ – відомі елементи повної функціональної послідовності, c_k , $k = 1, 2, \dots, n$, – невідомі коефіцієнти.

Невідомі коефіцієнти c_k , $k = 1, 2, \dots, n$, обираються так, щоб найкраще (у деякому сенсі) задовольнити рівняння крайової задачі.

2. Побудова структури розв'язку

Умову на нескінченності (3) замінимо умовою

$$u|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (4)$$

де контур $\partial\Omega_0$ знаходиться на достатньо великій відстані від Ω_f (рис. 1). Наприклад, можна взяти за $\partial\Omega_0$ коло $x^2 + y^2 = R_0^2$ досить великого радіуса R_0 .

Через Ω_0 позначимо розрахункову область задачі (1), (2), (4).

Нехай функція $\omega_0(x, y)$ така, що

- 1) $\omega_0(x, y) > 0$ у Ω_0 ;
- 2) $\omega_0(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_0$.

Функція $\omega_0(x, y)$ з вказаними властивостями можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу за допомогою конструктивного апарата теорії R-функцій [8].

Тоді умову (4) за будь-якого вибору невизначеної компоненти Φ задовольнятиме жмуток функцій [4, 8]

$$u(x, y) = \omega_0\Phi.$$

Для того, щоб задовольнити умовам спряження (2), скористаємося підходом з [9]. Функцію $u(x, y)$ шукатимемо у вигляді

$$u(x, y) = \begin{cases} u_f(x, y), & (x, y) \in \Omega_f, \\ u_v(x, y), & (x, y) \in \Omega_v, \end{cases} = \begin{cases} \omega_0\Phi - A\omega_{f_v}D_1^{f_v}(\omega_0\Phi), & (x, y) \in \Omega_f, \\ \omega_0\Phi, & (x, y) \in \Omega_v. \end{cases} \quad (5)$$

де $\omega_{f_v} = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega_{f_v}$,

причому $\omega_{f_v} > 0$ у Ω_f , а оператор $D_1^{f_v}$ визначається рівністю

$$D_1^{f_v} = \frac{\partial\omega_{f_v}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega_{f_v}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Оператор $D_1^{f_v}$ має властивість

$$D_1^{f_v} u|_{\partial\Omega_{f_v}} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega_{f_v}},$$

де \mathbf{n} – одинична нормаль до $\partial\Omega_{f_v}$, яка направлена в середину Ω_f . Тоді

$$D_1^{f_v} \omega_{f_v}|_{\partial\Omega_{f_v}} = \frac{\partial\omega_{f_v}}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega_{f_v}} = 1.$$

Неважко помітити, що функція вигляду (5) за будь-якого значення сталої A задовольняє на $\partial\Omega_{f_v}$ першому з умов спряження (2). Отже, число A обемо так, щоб задовольнити другому з умов спряження (2). Отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial u_f}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega_{f_v}} &= \frac{1}{\mu} D_1^{f_v} u_f|_{\partial\Omega_{f_v}} = \\ &= \frac{1}{\mu} D_1^{f_v} [\omega_0\Phi - A\omega_{f_v}D_1^{f_v}(\omega_0\Phi)]|_{\partial\Omega_{f_v}} = \\ &= \frac{1}{\mu} \{D_1^{f_v}(\omega_0\Phi) - AD_1^{f_v}\omega_{f_v} \cdot D_1^{f_v}(\omega_0\Phi) - \\ &- \omega_{f_v}D_1^{f_v}[AD_1^{f_v}(\omega_0\Phi)]\}|_{\partial\Omega_{f_v}} = \frac{1}{\mu} (1 - A)D_1^{f_v}(\omega_0\Phi)|_{\partial\Omega_{f_v}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_v}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega_{f_v}} = D_1^{f_v} u_v|_{\partial\Omega_{f_v}} = D_1^{f_v}(\omega_0\Phi)|_{\partial\Omega_{f_v}}.$$

Тоді друге з умов спряження (2) буде виконане, якщо

$$\frac{1}{\mu} (1 - A) = 1,$$

тобто

$$A = 1 - \mu.$$

Отже, структура розв'язку задачі (1), (2), (4) має вигляд

$$u(x, y) = \begin{cases} \omega_0\Phi - (1 - \mu)\omega_{f_v}D_1^{f_v}(\omega_0\Phi), & (x, y) \in \Omega_f, \\ \omega_0\Phi, & (x, y) \in \Omega_v. \end{cases} \quad (6)$$

3. Побудова наближеного розв'язку

Для побудови наближеного розв'язку задачі (1) – (3) невизначену компоненту Φ у структурі (6) апроксимуємо виразом вигляду

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^n c_i \tau_i, \quad (7)$$

де $\{\tau_i\}$ – повна у $L_2(\Omega_0)$ система функцій (тригонометричні або степеневі поліноми, сплайни тощо), c_1, \dots, c_n – невизначені коефіцієнти.

Після підстановки (7) у (6) отримаємо що наближений розв'язок (1) – (3) шукається у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i, \quad (8)$$

де

$$\varphi_i = \begin{cases} \omega_0 \tau_i - (1-\mu)\omega_{fv} D_1^{fv}(\omega_0 \tau_i), & (x,y) \in \Omega_f, \\ \omega_0 \tau_i, & (x,y) \in \Omega_v. \end{cases}$$

Для знаходження коефіцієнтів c_1, \dots, c_n далі можна скористатися будь-яким варіаційним або проєкційним методом. Так, наприклад, відповідно до методу Гальоркіна, коефіцієнти c_1, \dots, c_n знайдемо з умови ортогональності відхилю, що отримується підстановкою (8) у (1), функціям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ [7]. Це призводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} c_i = b_j, \quad j=1, \dots, n,$$

де

$$a_{ij} = \iint_{\Omega_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \right] \varphi_j dx dy, \quad i, j=1, \dots, n,$$

$$b_j = -\mu_0 \iint_{\Omega_c} J_z(x,y) \varphi_j dx dy, \quad j=1, \dots, n.$$

В модельному випадку, коли за Ω_0 обрано коло радіуса R_0 і феромагнетик також обмежений колами радіусів r і R ($r > R$), функції ω_0 і ω_{fv} можна взяти у виді

$$\omega_0(x,y) = R_0^2 - x^2 - y^2,$$

$$\omega_{fv}(x,y) = \left[\frac{1}{2r}(x^2 + y^2 - r^2) \right] \wedge_0 \left[\frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2) \right],$$

де \wedge_0 – знак R_0 -кон'юнкції [8]:

$$g_1 \wedge_0 g_2 \equiv g_1 + g_2 - \sqrt{g_1^2 + g_2^2}.$$

4. Результати обчислювального експерименту

Обчислювальний експеримент було проведено для значень

$$R_0 = 20 \text{ м}, \quad R = 10 \text{ м}, \quad r = 3 \text{ м},$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}, \quad \mu = 700 \text{ Гн/м},$$

Ω_c описується нерівністю $1 - (x-1)^2 - y^2 > 0$,

$$J_z(x,y) = 10^8 y(1 - (x-1)^2 - y^2) \text{ А/м}^2.$$

За систему функцій $\{\tau_i\}$ при реалізації метода Гальоркіна було обрано систему гармонічних поліномів.

На рис. 2, 3 наведено отримані поверхні компонент

$$B_x = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

вектора магнітної індукції.

Отримані результати якісно добре погоджуються з фізикою процесу [1 – 3].

Висновки

В роботі для чисельного аналізу магнітної системи, яка моделює роботу прискорювача, вперше застосовано структурний метод R -функцій. Це дозволило побудувати чисельний метод, який точно

враховує всю геометричну та аналітичну інформацію, що входять до постановки задачі, і дозволяє отримати наближений розв'язок у аналітичному вигляді, що спрощує його подальше використання для знаходження різних характеристик магнітної системи.

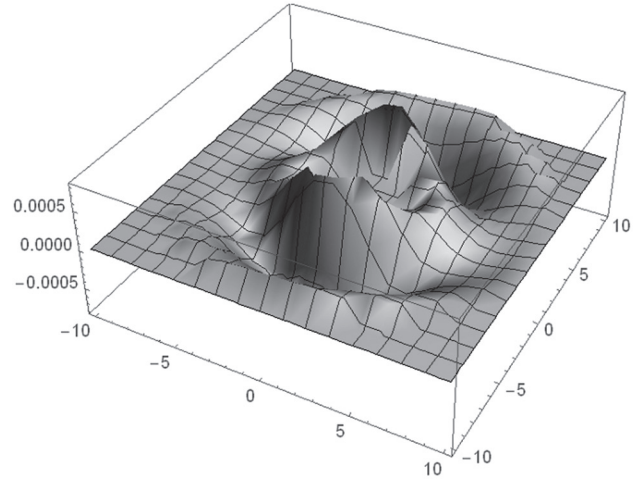


Рис. 2. Поверхня B_x

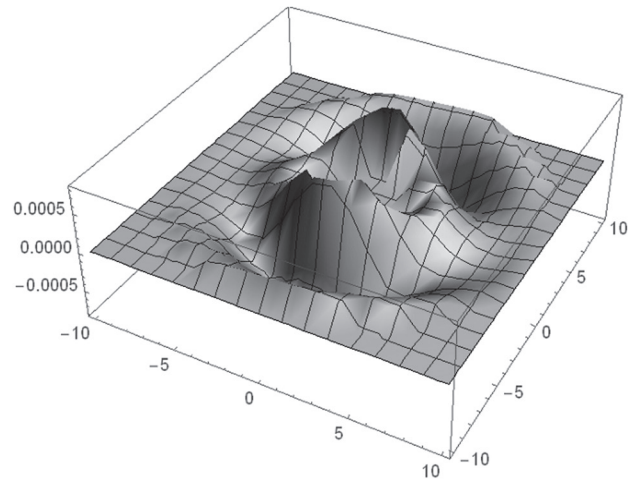


Рис. 3. Поверхня B_y

Список літератури: 1. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А., Юдин И.П., Юлдашев О.И. Численные алгоритмы расчета магнитных систем ускорителей заряженных частиц // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1990. – Т. 21. – Вып. 1. – С. 251–307. 2. Балдин А.А., Волошина И.Г., Перепелкин Е.Е., Полякова Р.В., Российская Н.С., Шаврина Т.В., Юдин И.П. Численное моделирование распределения поля магнита СП-40 установки «МАРУСЯ» и сравнение результатов с экспериментальными данными // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77. – № 11. – С. 7–16. 3. Жидков Е.П., Волошина И.Г., Полякова Р.В., Перепелкин Е.Е., Российская Н.С., Шаврина Т.В., Юдин И.П. Компьютерное моделирование магнитных систем некоторых физических установок // Компьютерные исследования и моделирование. – 2009. – Т. 1. – № 2. – С. 189–198. 4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – СПб.: БХВ-Петербург, Невский Диалект, 2004. – 816 с. 5. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л.

Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. — М.: Физматлит, 2006. — 416 с.
6. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. — Х.: ИПМАШ НАН Украины, 2009. — 306 с.
7. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.
8. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — К.: Наук. думка, 1982. — 552 с.
9. Темников А.В., Слесаренко А.П. Современные приближенные аналитические методы решения задач теплообмена. — Самара: Изд-во Самар. политехн. ин-та, 1991. — 92 с.
10. O.I. Zaverukha, M.V. Sidorov, “Use of Structural-Variational Method of R-functions in Mathematical Modeling of Magnetic Systems”, in Proc. 25th Russian Particle Accelerator Conf. (RuPAC’16), St. Petersburg, Russia, Nov. 2016, paper THPSC002, pp. 538-540, ISBN: 978-3-95450-181-6, doi:10.18429/JACoW-RuPAC2016-THPSC002.

Resume

**O.I. Zaverukha, M.V. Sidorov, I.G. Yalovega
 APPLICATION OF R-FUNCTIONS METHOD
 IN MATHEMATICAL MODELING OF
 MAGNETIC SYSTEMS**

Background: Magnetic systems are widespread in nature and technology. Because of the high cost of full-scale research of magnetic systems in recent decades, their mathematical modeling has come to the forefront. The construction of new

methods for the numerical analysis magnetic system models, as well as the improvement of existing ones, is an urgent scientific task.

Materials and methods: Structural method of R-functions was proposed by Rvachev V.L., academician of National Academy of Sciences of Ukraine and the projection Galerkin method, were used to obtain results.

Results: For the numerical solution of the boundary value problem, which serves as a mathematical model of the magnetic system was applied the structural-projection method. A structure is constructed for the solution of the boundary value problem, which accurately takes into account the conjugation conditions on the “ferromagnet-vacuum” boundary and describes an algorithm for approximating an undefined structure component by the projection Galerkin method. The proposed method is illustrated by a computational experiment.

Conclusion: The method of numerical analysis of magnetic systems which was proposed in the paper accurately takes into account all the geometric and analytical information included in the statement of the boundary value problem, which is a mathematical model of the system. In addition, the developed method makes it possible to find a numerical solution in an analytical form, which simplifies its further usage for finding various characteristics of the magnetic system.

Надійшла до редколегії 22.09.2017