РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 9, с. 1209–1213

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.23:535.4

ПАРНЫЕ СУММАТОРНЫЕ И СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕЗАМКНУТЫХ КОНИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

© 2003 г. **В. А. Дорошенко, В. Ф. Кравченко**

Введение. Одним из эффективных подходов к решению краевых электродинамических задач с незамкнутой конической геометрией является подход, основанный на применении интегрального преобразования Конторовича–Лебедева и метода полуобращения. Использование этого подхода позволило построить численно-аналитический алгоритм решения задачи рассеяния электромагнитных волн на конусе с периодическими продольными щелями (одна лента на периоде) и получить аналитическое решение [1, 2]. Учет многоэлементности структуры (несколько лент разной ширины на периоде) усложняет задачу, в связи с чем и возникают существенные трудности с привлечением данного подхода для ее исследования.

Целью настоящей работы является создание нового метода решения краевых задач как для одноэлементных, так и для многоэлементных незамкнутых конических структур, базирующегося на привлечении аппарата сингулярных интегральных уравнений [3, 4].

Постановка задачи. Парные сумматорные уравнения. Рассмотрим задачу о рассеянии поля электрического или магнитного радиального диполя (моменты диполей по величине равны $\vec{p}_1$ или $\vec{p}_2$ соответственно) на полубесконечном круговом идеально проводящем бесконечно тонком конусе Σ с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями (рисунок). Поле диполей меняется во времени гармонически. Во введенной сферической системе координат $r,\ \theta,\ \varphi$ с началом в вершине конуса поверхность Σ определяется уравнением $\theta = \gamma$. Угловая ширина щелей d и период структуры $l = 2\pi/N$ – величины соответствующих двугранных углов, которые образованы пересечением плоскостей, проведенных через ось конуса и ребра соседних секторов (лент), $r_0,\ \theta_0,\ \varphi_0$ – координаты источника, k – волновое число. Электрический (магнитный) радиальный диполь возбуждает в свободном пространстве поле $\vec{E}_0^{(1)},\ \vec{H}_0^{(1)}$ $(\vec{E}_0^{(2)},\ \vec{H}_0^{(2)})$, компоненты которого определяются электрическим $U_0^{(1)}$ (магнитным $U_0^{(2)}$) потенциалом Дебая, где $U_0^{(j)} = b_0 e^{-qR}/(4\pi R)$, $b_0^{(j)} = -w|\vec{p}_j|/r_0,\ j=1,2,\ R = |\vec{r}-\vec{r}_0|,\ w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ – волновое сопротивление среды с диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями; $q = -ik$ $(\operatorname{Im} k \geq 0)$ соответствует гармонической зависимости от времени t в виде $\exp(i\omega t)$, а $q = ik$ $(\operatorname{Im} k \leq 0)$ – гармонической зависимости от времени t в виде $\exp(-i\omega t)$. Присутствие в безграничном пространстве конической поверхности с продольными щелями приводит к появлению рассеянного поля $\vec{E}_1^{(j)},\ \vec{H}_1^{(j)}$, которое может быть определено, если известен соответствующий ему потенциал Дебая $U_1^{(j)}$, удовлетворяющий: 1) однородному уравнению Гельмгольца всюду вне конуса и источника $\Delta U_1^{(j)} - q^2 U_1^{(j)} = 0$; 2) первому краевому $(j = 1)$ или второму $(j = 2)$ краевому условию на конических секторах $(\partial^{j-1}U_1^{(j)}/\partial\theta^{j-1})|_\Sigma = -(\partial^{j-1}U_0^{(j)}/\partial\theta^{j-1})|_\Sigma$; 3) принципу предельного поглощения; 4) условию ограниченности энергии.

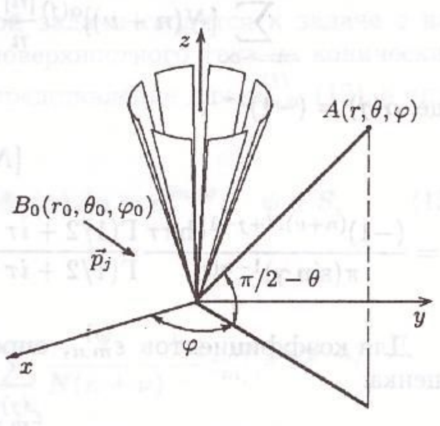

Рисунок. Коническая структура.

Краевая задача в такой постановке имеет единственное решение. В соответствии со структурой полного поля $\vec{E}^{(j)} = \vec{E}_0^{(j)} + \vec{E}_1^{(j)}$, $\vec{H}^{(j)} = \vec{H}_0^{(j)} + \vec{H}_1^{(j)}$ определяющий его потенциал $U^{(j)}$ представим в виде $U^{(j)} = U_0^{(j)} + U_1^{(j)}$. Решение краевой задачи 1)–4) ищем с помощью интегрального преобразования Конторовича–Лебедева [1, 2]

$$U_1^{(j)} = \frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \tau \operatorname{sh}(\pi\tau)\tilde{U}_1^{(j)}\frac{K_{i\tau}(q r)}{\sqrt{r}}\,d\tau, \quad \tilde{U}_1^{(j)} = \int\limits_0^\infty U_1^{(j)}\frac{K_{i\tau}(q r)}{\sqrt{r}}\,d\tau,$$

$$\tilde{U}_1^{(j)} = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^{(j)} U_{m\tau}^{(j)}(\theta,\varphi) P_{-1/2+i\tau}^{m}(-\cos\theta_0)\frac{d}{d\gamma_2}P_{-1/2+i\tau}^{m}(\cos\gamma_2), \quad \gamma < \theta_0 < \pi,$$

где

$$U_{m\tau}^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n+m_0}^{(j)}(\tau) P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm\cos\theta) e^{i(m+nN)\varphi} \Big/ \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm\cos\gamma), \tag{1}$$

Знак "+" в представлении (1) соответствует области $0 < \theta < \gamma$, а "$-$" – области $-\gamma < \theta < \pi$; $K_{i\tau}(qr)$ – функция Макдональда; $\Gamma(z)$ – гамма-функция; $P_\zeta^m(\cos\theta)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода; $a_{m\tau}^{(j)}$ – известные, а $x_{m,n+m_0}^{(j)}(\tau)$ – искомые коэффициенты; $m/N = m_0 + \nu$, m_0 – ближайшее к m/N целое число, $-1/2 \le \nu < 1/2$. Применение граничного условия на конических секторах (S) и условия непрерывности поля в щелях (CS) приводит к следующей системе функциональных соотношений относительно $x_{m,n}^{(j)}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n}^{(j)} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad \varphi \in S: \frac{\pi d}{l} < |N\varphi| \le \pi, \tag{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [N(n+\nu)]^{\alpha(j)}\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_{m,n}^{(j)}) x_{m,n}^{(j)} e^{inN\varphi} = 0, \quad \varphi \in CS: |N\varphi| < \frac{\pi d}{l}, \tag{3}$$

где $\alpha(j) = (-1)^{j-1}$,

$$[N(n+\nu)]^{\alpha(j)}\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_{m,n}^{(j)}) =$$

$$= \frac{(-1)^{(n+\nu)N+j-1}\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi(\sin\gamma)^{1-\alpha(j)}}\frac{\Gamma(1/2+i\tau+(n+\nu)N)}{\Gamma(1/2+i\tau-(n+\nu)N)}\Big/\frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}}P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos\gamma)\frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}}P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos\gamma). \tag{4}$$

Для коэффициентов $\varepsilon_{m,n}^{(j)}$, определенных в (4), при $(n+\nu)N \gg 1$ имеет место следующая оценка:

$$\varepsilon_{m,n}^{(j)} = O((\sin^2\gamma)/(N^2(n+\nu)^2)). \tag{5}$$

Парные функциональные сумматорные уравнения (2), (3) в дальнейшем рассматриваются как уравнения для определения неизвестных коэффициентов $x_{m,n}^{(j)}$, которые находятся в гильбертовом пространстве последовательностей $\{\ell_p^{(j)}\}: \sum_{P=-\infty}^{+\infty}|\ell_p^{(j)}|^2(1-|p|)^{\alpha(j)} < +\infty$.

Первая краевая задача. Сингулярные интегральные уравнения (СИУ). В случае рассеяния поля электрического диполя на конусе (первая краевая задача для электрического потенциала Дебая $U_1^{(1)}$) система (2), (3), определенная на периоде, принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = e^{im_0N\varphi}, \quad \varphi \in S, \tag{6}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} N(n+\nu)\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_{m,n}^{(1)})x_{m,n}^{(1)}e^{inN\varphi}=0, \quad \varphi\in CS. \tag{7}$$

Введем коэффициенты $\hat{y}_{m,n}^{(1)}$, связанные с искомыми коэффициентами $x_{m,n}^{(1)}$ соотношением

$$\hat{y}_{m,n}^{(1)}=N(n+\nu)\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon_{m,n}^{(1)})x_{m,n}^{(1)}. \tag{8}$$

Тогда систему уравнений (6), (7) запишем в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{N(n+\nu)}\frac{|n|}{n}(1-\hat{\varepsilon}_{m,n}^{(1)})\hat{y}_{m,n}^{(1)}e^{in\psi}=e^{im_0\psi}, \quad \psi\in S, \tag{9}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{y}_{m,n}^{(1)}e^{in\psi}=0, \quad \psi\in CS, \tag{10}$$

где $\psi=N\varphi$, $\hat{\varepsilon}_{m,n}^{(1)}=\varepsilon_{m,n}^{(1)}/(1-\varepsilon_{m,n}^{(1)})$. Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(\psi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{y}_{m,n}^{(1)}e^{in\psi}, \quad \psi\in[-\pi,\pi], \tag{11}$$

которая на секторе определяет радиальную составляющую плотности поверхностного тока, а в щели равна нулю в соответствии с (10). Неизвестные коэффициенты $\hat{y}_{m,n}^{(1)}$, через которые выражаются искомые коэффициенты $x_{m,n}^{(j)}$ в соответствии с (8), вычисляются по формуле

$$\hat{y}_{m,n}^{(1)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\Phi_1(\psi)e^{-in\psi}\,d\psi. \tag{12}$$

Таким образом, решение исходной электродинамической задачи сводится к задаче о нахождении функции $\Phi_1(\psi)$ (11), связанной с плотностью поверхностного тока на конических секторах. Воспользуемся уравнением (9), подставив в него представление для $\hat{y}_{m,n}^{(1)}$ (12), и придем к СИУ для $\Phi_1(\psi)$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\hat{F}(\psi-\alpha)\Phi_1(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S[\hat{A}_{m\tau}^{(1)}-\hat{K}_1(\psi-\alpha)]\Phi_1(\alpha)\,d\alpha=e^{im_0\psi}, \quad \psi\in S, \tag{13}$$

где

$$\hat{F}(\psi-\alpha)=\sum_{n\neq0}\frac{1}{N(n+\nu)}\frac{|n|}{n}e^{in(\psi-\alpha)}, \quad \hat{K}_1(\psi-\alpha)=\sum_{n\neq0}\frac{1}{N(n+\nu)}\frac{|n|}{n}\hat{\varepsilon}_{m,n}^{(1)}e^{in(\psi-\alpha)},$$

$$\hat{A}_{m\tau}^{(1)}=\frac{1}{N(n+\nu)}\frac{|n|}{n}(1-\hat{\varepsilon}_{m,n}^{(1)})|_{n=0}.$$

В сингулярном интегральном уравнении (13) $\hat{F}(\psi-\alpha)$ определяет сингулярную, а $\hat{K}_1(\psi-\alpha)$ – регулярную части в силу оценки (5). В частном случае, когда $\nu=0$, СИУ (13) принимают вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\ln\left|2\sin\frac{\psi-\alpha}{2}\right|\Phi_1(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S[\hat{K}_1(\psi-\alpha)-\hat{A}_{m\tau}^{(1)}]\Phi_1(\alpha)\,d\alpha=-e^{im_0\psi}, \quad \psi\in S. \tag{14}$$

Этот случай соответствует задаче рассеяния на конусе с произвольным числом щелей, когда электрический диполь находится на оси периодической структуры ($\theta_0=0,\pi$; $\varphi_0=0$), или на конусе с одной щелью без ограничений на расположение источника. Аналогично получаем СИУ для функции $\tilde{F}_1(\psi)$, определяющей азимутальную составляющую электрического поля в щели:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{CS}\frac{e^{-i\nu\alpha}F_1(\alpha)}{\alpha-\psi}\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int\limits_{CS}\tilde{K}_1(\alpha-\psi)e^{-i\nu\alpha}\tilde{F}_1(\alpha)\,d\alpha=(m_0+\nu)\frac{|m_0|}{m_0}(1-\varepsilon^{(1)}_{m,m_0})e^{im_0\psi},\quad \psi\in CS, \tag{15}$$

$$\tilde{K}_1(\xi)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\xi}{2}-\frac{1}{\xi}+\frac{1}{2iN}A^{(1)}_{m\tau}\left(\frac{\pi}{\sin\nu\pi}e^{i\nu\alpha}-\frac{1}{\nu}\right)+\frac{1}{2i}\sum_{n\neq0}\frac{|n|}{n}\varepsilon^{(1)}_{m,n}e^{in\xi},$$

$$A^{(1)}_{m\tau}=\frac{1}{N(n+\nu)}\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon^{(1)}_{m,n})|_{n=0}.$$

В случае $\nu=0$ СИУ (15) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{CS}\frac{\tilde{F}_1(\alpha)}{\alpha-\psi}\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int\limits_{CS}\tilde{K}_1(\alpha-\psi)\tilde{F}_1(\alpha)\,d\alpha=m_0(1-\varepsilon^{(1)}_{m,m_0})e^{im_0\psi},\quad \psi\in S, \tag{16}$$

где

$$\tilde{K}_1(\xi)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\xi}{2}-\frac{1}{\xi}+\frac{1}{2N}A^{(1)}_{m\tau}\alpha+\frac{1}{2i}\sum_{n\neq0}\frac{|n|}{n}\varepsilon^{(1)}_{m,n}e^{in\xi}.$$

Вторая краевая задача. Решение СИУ методом дискретных особенностей. Используя алгоритм, приведенный для решения первой краевой задачи, сведем парные сумматорные уравнения (1), (2) к СИУ с ядром Коши для функции $\Phi_2(\xi)$, связанной с радиальной составляющей плотности поверхностного тока на секторах:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{S}\frac{\Phi_2(\xi)}{\xi-\psi_1}\,d\xi+\frac{1}{\pi}\int\limits_{S}K(\xi-\psi_1)\Phi_2(\xi)\,d\xi=ie^{im_0\psi_1},\quad \psi_1\in S:|\psi_1|<\delta, \tag{17}$$

с дополнительным условием $\int_{CS}\Phi_2(\xi)\,d\xi=0$, где

$$\Phi_2(\psi_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|n|}{n}(1-\varepsilon^{(2)}_{m,n})\hat{y}^{(2)}_{m,n}e^{in\psi_1},\quad \hat{y}^{(2)}_{m,n}=x^{(2)}_{m,n}(-1)^{n-m_0},\quad \psi_1=-\frac{|\varphi|}{\varphi}\pi+N\varphi,\quad \delta=\frac{l-d}{l}\pi,$$

$$K(\xi-\psi_1)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\xi-\psi_1}{2}-\frac{1}{\xi-\psi_1}-\frac{i}{2N}\left(\frac{\pi e^{i\nu\xi}}{\sin\pi\nu}-\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{A^{(2)}_{m\tau}}-\frac{i}{2}\sum_{n\neq0}\frac{|n|}{n}\hat{\varepsilon}^{(2)}_{m,n}e^{in(\psi_1-\xi)},$$

$$\frac{1}{1-\varepsilon^{(2)}_{m,n}}=1-\hat{\varepsilon}^{(2)}_{m,n}.$$

Рассмотрим случай, когда источник расположен на оси конуса ($\theta_0=\pi$, $\varphi_0=0$, $m=0$; в дальнейшем индекс m опускаем) с одной щелью ($N=1$, $\nu=0$). Посредством замены $\psi_1/\delta=t_0$ и $\xi/\delta=t$ сведем интегрирование в СИУ (17) по промежутку $(-1,1)$ и преобразуем его к виду

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Phi_2(t)}{t-t_0}\,dt+\frac{\delta}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}K(t-t_0)\Phi_2(t)\,dt=1,\quad |t_0|<1;\quad \int\limits_{-1}^{1}\Phi_2(t)\,dt=0, \tag{18}$$

$$K(t-t_0)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-t_0}{2}\delta-\frac{1}{(t-t_0)\delta}+\frac{1}{2}t\delta\frac{1}{A^{(2)}_{\tau}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{\varepsilon}^{(2)}_{n}\sin\delta n(t-t_0),$$

причем

$$\hat{y}_0^{(2)} = \frac{i}{A_\tau^{(2)}} \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-1}^{1} \Phi_2(t)\, dt, \quad \hat{y}_n^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \frac{|n|}{n} (1 - \hat{\varepsilon}_n^{(2)}) \delta \int_{-1}^{1} \Phi_2(t) e^{-in\delta t}\, dt, \quad n \neq 0,$$

$$A_\tau^{(2)} = \frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi \sin^2 \gamma} \Big/ \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}(\cos\gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}(-\cos\gamma).$$

Для решения СИУ (18) используем метод дискретных особенностей [3, 4], согласно которому оно эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\sum_{p=1}^{q} \frac{V_k(t_i^k)}{t_p^q - t_{0j}^q} + \delta \sum_{p=1}^{q} K(t_p^q - t_{0j}^q) V_q(t_p^q) \frac{1}{q} = i, \quad j = \overline{1, q-1}, \quad \sum_{p=1}^{q} V_q(t_p^q) = 0, \quad j = q, \tag{19}$$

где

$$\Phi_2(t) = V(t)/\sqrt{1-t^2}, \tag{20}$$

$t_p^q = \cos((2p-1)\pi/(2q))$ – корни полинома Чебышева первого рода, $t_{0j}^q = \cos(j\pi/q)$ – корни полинома Чебышева второго рода. Принимая во внимание связь между $\Phi_2(t)$ и $V(t)$ (20) и применяя квадратурную формулу Гаусса, получаем формулы для вычисления коэффициентов $\hat{y}_n^{(2)}$:

$$\hat{y}_0^{(2)} = \frac{1}{A_\tau^{(2)}} \frac{i\delta^2}{2} \sum_{p=1}^{q} V(t_p^q) t_p^q \frac{1}{q}, \quad \hat{y}_n^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{|n|}{n} (1 - \hat{\varepsilon}_n^{(2)}) \delta \sum_{i=1}^{k} V(t_p^q) e^{-in\delta t_p^q} \frac{1}{q}, \quad n \neq 0. \tag{21}$$

В результате решения СЛАУ (19) находим $V(t_p^q)$, по которым и определяем коэффициенты $\hat{y}_0^{(2)}$ и $\hat{y}_n^{(2)}$ из формул (21), связанные с искомыми коэффициентами $x_n^{(2)}(d, \gamma, \tau)$.

Таким образом, предложен и обоснован метод решения краевых электродинамических задач для незамкнутых структур, основанный на использовании интегрального преобразования Конторовича–Лебедева и СИУ первого рода с логарифмическими ядрами (13), (14), а также ядрами Коши (16), (17). Из эквивалентности СИУ парным сумматорным уравнениям следует их однозначная разрешимость. Приведен численный алгоритм решения СИУ методом дискретных особенностей. Предложенный метод может быть использован для решения краевых задач с более сложной геометрией.

Авторы выражают благодарность Ю.В. Гуляеву, а также Ю.В. Ганделю, И.К. Лифанову и Я.С. Шифрину за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф.* // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 2. С. 1–5.
2. *Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф.* // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 5. С. 611–614.
3. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
4. *Гандель Ю.В.* // Электромагнитные явления. Харьков, 1998. Т. 1. № 12. С. 220–232.

Харьковский технический университет радиоэлектроники,
Институт радиотехники и электроники РАН, г. Москва

Поступила в редакцию
03.03.2003 г.