Разработанная система автоматизации позволила не только упростить и ускорить работу экспериментатора, но и улучшить метрологические характеристики установки. Детальный анализ точности измерений приведен в работе [7].

Таким образом, разработана и реализована универсальная и легко модифицируемая система автоматизации эксперимента, которая может быть реализована без больших финансовых затрат.

Авторы благодарны профессору А.И.Беляевой за постановку задачи и полезные обсуждения в ходе выполнения работы.

Литература: **1.** *Беляева А.И., Гребенник Т.Г., Настенко В.А.* и др. // ПТЭ. 1997. №4. С.102-108. **2.** *Stehle J.-L.* SOPRA: New developments in SE. 3rd Int. Conf. on Spectroscopic Ellipsometry, Vienna, 2003. P.42. **3.** *Gruska B., Peters S., Richter U, Wielsch U.* SENTECH Instruments – Fast, accurate, and easy to operate spectroscopic ellipsometers. 3rd Int. Conf. on Spectroscopic Ellipsometry, Vienna, 2003. P.23. **4.** *Гутников В.С.* Интегральная электроника в измерительных устройствах. Л.: Энергоатомиздат, 1988. 264 с. **5.** *Брандина Е.П., Леонтьев В.В., Пусина Т.Ю.* Шаговые электродвигатели. Л.: СЗПИ, 1986. 96с. **6.** *Аззам Р., Башара Н.* Эллипсометрия и поляризованный свет. М.: Мир, 1981. 584с. **7.** *Галуза А.А., Кудленко А.Д., Слатин К.А.* и др. // ПТЭ. 2003. № 4. С.98-101.

Поступила в редколлегию 03.09.2003

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Мамалуй А.А.

Галуза Алексей Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ПО ЭВМ ХНУРЭ. Научные интересы: оптика, математическое и компьютерное моделирование физических процессов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-46. E-mail: Galuza@kpi.kharkov.ua

Галуза Анатолий Иванович, младший научный сотрудник ФТИНТ. Научные интересы: оптика, физика твердого тела. Адрес: Украина, 61003, Харьков, пр. Ленина, 47, тел. 30-85-03. E-mail: Galuza@ilt.kharkov.ua

Кудленко Анна Дмитриевна, студентка НТУ «ХПИ». Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 40-06-20. E-mail: Dima@muzzy.concom.kharkov.ua.

Слатин Кирилл Александрович, студент НТУ «ХПИ». Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 40-06-20. E-mail: kirill_slatin@ukr.net.

Смирнов Михаил Михайлович, канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник кафедры ДПМ НТУ «ХПИ». Научные интересы: механика твердого тела. Адрес: Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 40-06-20. E-mail: Smirnov@kpi.kharkov.ua

УДК 517.9

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕРЫ ПРИ ЕЕ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

ДИКАРЕВ В.А., ЯЛОВЕГА И.Г.

Рассматривается задача о стабилизации стохастической меры при ее локальных возмущениях, сильных или малых. Приводятся основные допущения, которые дают возможность стабилизировать систему.

1. Введение

В последние десятилетия теория марковских процессов все чаще используется при исследовании многих прикладных задач. С ее помощью изучаются математические модели экономики, биологии, генетики и техники. Прикладной интерес представляют процессы с изменяющимися во времени характеристиками, в частности задачи о стабилизации основных характеристик таких процессов с помощью соответствующим образом выбранных возмущений [1,2]. Особый интерес представляют задачи о стабилизации распределений процесса при возмущении отдельных его частей (фрагментов). Такой способ стабилизации, как правило, связан с минимальными энергозатратами, кроме того, стабилизация процесса за счет возмущений его фрагментов часто достигается в процессах, протекающих в естественных условиях.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о стабилизации процесса при его локальных возмущениях для случая, когда фазовое пространство является континуальным. В [2] было показано, что при многократных возмущениях фрагментов, определенным образом согласованных между собой, вероятности состояний процесса либо принимают предельные значения, либо локализируются вблизи них. Любой из этих случаев называется стабилизацией [2]. Основными условиями, которые приводят к фокусировке, являются быстро изменяющиеся во времени факторы, вызывающие сильные возмущения основных характеристик процесса. В этой работе рассматриваются не только сильные возмущения, но и малые. Фазовым пространством Ω исследуемого процесса считаем произвольную поверхность из $\Re^n$, например из $\Re^3$. На Ω задана σ - алгебра, элементами которой являются события. Процесс Π рассматривается на промежутке $[s_0, t_0)$, $t_0 \le \infty$. Предполагается, что если промежуток $[t', t''] \subset [s_0, t_0)$ не содержит возмущений, то процесс Π является на нем однородным.

Исследуем подробнее случай $t_0 = \infty$. Считаем, что множество всех возмущений $(\delta\Pi)_i$ процесса Π на $[s_0, \infty)$ счетно. Обозначим через $[t_i, \tau_i]$ промежутки времени, на которых действуют $(\delta\Pi)_i$, а через Π_i – процессы, которые $(\delta\Pi)_i$ порождают. Пусть Ω_i – фазовые пространства Π_i. Предполагаем, что все Ω_i являются областями, τ_i – точками фокусировки процессов Π_i на Ω_i. Случайные величины $(\delta\Pi)_i$ $(i = 1,2,\ldots)$ предполагаются независимыми. Индикаторные функции множеств Ω_i обозначим через $I(\Omega_i)$. Положим $\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$. Считаем, что на Ω задана стохастическая мера [3] с ортогональными значениями $\eta(\Omega_i, t)$, $\Omega_i \subset \Omega$. В этом случае для любых t и любых непересекающихся Ω_i, Ω_j величины $\eta(\Omega_i, t)$, $\eta(\Omega_j, t)$ являются ортогональными: $(\eta(\Omega_i, t), \eta(\Omega_j, t))=0$.

Стохастическая мера $\eta(\Omega_i, t)$ обладает свойством $M|\eta(\Omega_i, t)|^2 = F(\Omega_i, t)$, где $F(\Omega_i, t)$ $(\Omega_i \subseteq \Omega)$ – мера на $\Re^3$. Вероятность $P(M \in B, t)$ вычисляется в момент t для любого события $B \subset \Omega(\Omega_i)$ и любого $t \in [s_0, \infty)$: $P(M \in B, t) = \int_B \eta(N, t)\, d\Omega_N$.

Предполагается, что стохастическая мера $\eta(M, s_0)$ на Ω в начальный момент времени задана. Рассмотрим, как изменяется стохастическая мера процесса Π при каждом возмущении $(\delta\Pi)_i$. Функции $\eta(M, \tau_i)I(\Omega_i)$ предполагаются непрерывными на Ω_i.

Зафиксируем произвольное Ω_i. Обозначим через $\{\Omega_j\}$ множество, содержащее все фазовые пространства, для которых выполняется условие $P(\Omega_{ij})>0$. Введем элемент ν_i, как наибольший элемент из $\{\tau_j\}$, при условии $\nu_i < \tau_i$. Через β_i обозначим $\beta_i = \max(\nu_i, \tau_i)$.

Пусть $\eta(M, \beta_i)I(\Omega_i)$, $\eta(M, \tau_i)I(\Omega_i)$ – стохастические меры на Ω_i в моменты β_i и τ_i. Тогда для того, чтобы получить стохастическую меру в момент τ_i, следует переопределить ее на Ω_i, заменив $\eta(M, \beta_i)I(\Omega_i)$ на $\eta(M, \tau_i)I(\Omega_i)$. Для $M \in \Omega \backslash \Omega_i$: $\eta(M, \beta_i) = \eta(M, \tau_i)$. Усреднения стохастических мер $\eta(M, \beta_i)$, $\eta(M, \tau_i)$ по Ω_i совпадают:

$$\int_{\Omega_i} \eta(M, \beta_i)\, d\Omega_M = \int_{\Omega_i} \eta(M, \tau_i)\, d\Omega_M. \qquad (1)$$

Равенство (1) имеет место, так как выполняются условие нормировки $\int_{\Omega} \eta(M, t)\, d\Omega_M = 1$ для любого $t \in [s_0, \infty)$ и равенство

$$\eta(M, \beta_i)I(\Omega \backslash \Omega_i) = \eta(M, \tau_i)I(\Omega \backslash \Omega_i)$$

(оно имеет место, поскольку на $(\beta_i, \tau_i]$ все возмущения, кроме $(\delta\Pi)_i$, сосредоточены лишь на $\Omega \backslash \Omega_i$, а $(\delta\Pi)_i$ действуют на Ω_i).

3. Основные допущения

(A) Пусть $(\delta\Pi)_i$, $(\delta\Pi)_j$ – возмущения, действующие на Ω_i, Ω_j, $P(\Omega_{ij})>0$, $\eta(M, \tau_i)I(\Omega_i)$ и $\eta(M, \tau_j)I(\Omega_j)$ – стохастические меры на Ω_i, Ω_j, возникающие в результате этих возмущений. На (τ_i, β_j) в области Ω_{ij} действует только возмущение $(\delta\Pi)_j$, а в данном случае считаем, что выполняется условие согласования : функции $\eta(M, \tau_i)I(\Omega_i)$ и $\eta(M, \tau_j)I(\Omega_j)$ на Ω_{ij} совпадают с точностью до постоянного множителя. Пусть $\Omega_i \subset \Omega_j$. Тогда для любых $(\delta\Pi)_i$, $(\delta\Pi)_j$ функции $\eta(M, \tau_i)I(\Omega_i)$ и $\eta(M, \tau_j)I(\Omega_j)$ в области Ω_i тождественно совпадают. Предполагается, что в области Ω_i на промежутке (τ_i, τ_j) не действуют никакие возмущения.

Фокусирующие свойства каждого возмущения зависят только от положения его фазового пространства Ω_i, точнее, пусть $\Omega_i = \Omega_j$, стохастические меры процессов Π_i, Π_j в моменты β_i, β_j удовлетворяют условию $\int_{\Omega_i} \eta(M, \beta_i)\, d\Omega_M = \int_{\Omega_i} \eta(M, \beta_j)\, d\Omega_M$. Тогда стохастические меры $\eta(M, \tau_i)I(\Omega_i)$ и $\eta(M, \tau_j)I(\Omega_j)$ в моменты τ_i, τ_j тождественно совпадают на Ω_i.

Допущение (A) является необходимым для стабилизации процесса при $t \to \infty$.

(B) До любого момента $t (t < \infty)$ происходит только конечное число возмущений; любая точка $M \in \Omega$ с вероятностью 1 содержится в бесконечном множестве областей Ω_i. Для любой Ω_i найдется хотя бы одна Ω_j, i<j, не совпадающая с Ω_i, для которой $P(\Omega_{ij}) \geq p > 0$, где p не зависит от i и j.

4. Существование предельного распределения. Неподвижная точка

Проследим за эволюцией процесса Π на $[s_0, \infty)$. Покажем, что при $t \to \infty$ стохастическая мера $\eta(M, t)$ имеет предел, который не зависит от стохастической меры, заданной в начальный момент времени $\eta(M, s_0)$. Обозначим через N – множество всех стохастических мер процесса Π на Ω. Для всех возмущений $(\delta\Pi)_i$ и всех $\eta(M) \in N$ определим оператор $A(\Omega_i)$:

$$A(\Omega_i)\eta(M) = \eta(M, \tau_i)I(\Omega_i), M \in \Omega_i;$$

$$A(\Omega_i)\eta(M) = \eta(M),\ M \in \Omega \backslash \Omega_i.$$

Покажем, что оператор $A(\Omega_i)$ имеет неподвижную точку, т. е. такую меру $\eta_0(M)$, для которой выполняется условие

$$A(\Omega_i)\eta_0(M) = \eta_0(M),\ \eta_0(M) \in N. \qquad (2)$$

Построим $\eta_0(M)$. Пусть $\{\Omega_i\}$, $i = \overline{1,n}$ – конечное покрытие фазового пространства Ω, элементами Ω_i являются фазовые пространства, возникшие в результате возмущений $(\delta\Pi)_i$. Как и прежде, $\eta(M, \tau_i)I(\Omega_i)$ – стохастические меры, на которые $(\delta\Pi)_i$ фокусируют. Из покрытия $\{\Omega_i\}$, $i = \overline{1,n}$ выделим все области $\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_k}$, которые имеют с Ω_1 непустые пересечения. Функции

$$\eta(M, \tau_{i_1})I(\Omega_{i_1}), \ldots, \eta(M, \tau_{i_k})I(\Omega_{i_k})$$

и функция $\eta(M, \tau_1)I(\Omega_1)$ на пересечениях Ω_1 с областями $\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_k}$, вообще говоря, не совпадают. Однако можно выбрать такие числа $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$, что при умножении их соответственно на $\eta(M, \tau_{i_1})I(\Omega_{i_1}), \ldots, \eta(M, \tau_{i_k})I(\Omega_{i_k})$ будут иметь место равенства:

$$\eta(M, \tau_1)I(\Omega_1) = l_{i_1}\, \eta(M, \tau_{i_1})I(\Omega_{i_1}) =$$
$$= \ldots = l_{i_k}\, \eta(M, \tau_{i_k})I(\Omega_{i_k}).$$

Обозначим через $\widetilde{\Omega}_1$ – объединение областей $\Omega_1, \Omega_{i_1}, ..., \Omega_{i_k}$ и определим функцию $\widetilde{\eta}_{01}(M)$ на $\widetilde{\Omega}_1$: $\widetilde{\eta}_{01}(M) = \eta(M, \tau_1)I(\Omega_1), M \in \Omega_i$,

$$\widetilde{\eta}_{01}(M) = l_{i_\nu}\ \eta(M, \tau_{i_\nu})I(\Omega_{i_\nu}), M \in \Omega \setminus \Omega_i, \nu = \overline{1, k}.$$

По построению, $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}_1$; условие (2) выполняется для любой области $D \subset \widetilde{\Omega}_1$. Далее расширим область, в которой выполняется (2), следующим образом. Из покрытия $\{\Omega_i\}$ выделим все элементы, имеющие с $\widetilde{\Omega}_1$ непустые пересечения, но не содержащиеся в нем, и повторим построения, которые ранее были проделаны для Ω_1 и $\Omega_{i_1}, ..., \Omega_{i_k}$. Таким образом, мы получим множество $\widetilde{\Omega}_2, \Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}_2$. Будем применять этот прием до тех пор, пока в состав областей $\widetilde{\Omega}_1, \widetilde{\Omega}_2, ...$ не войдут все элементы покрытия $\{\Omega_i\}$. Тогда полученная в результате такого построения функция $\widetilde{\eta}_0(M)$ будет действовать на всем пространстве Ω и удовлетворять (2) для любой $D \subset \Omega$. Функция $\widetilde{\eta}_0(M)$ может отличаться от искомой $\eta_0(M)$ на постоянный множитель c. Его нужно выбрать так, чтобы выполнялось

$$\int_\Omega c\widetilde{\eta}_0(M)d\Omega_M = 1.$$

Из построения $\eta_0(M)$ следует, что неподвижная точка единственна.

Предположим, что все допущения о процессе Π и его возмущениях выполняются. Докажем, что в этом случае, независимо от распределения стохастической меры в начальный момент s_0, с вероятностью 1 существует предел $\eta(M, t)$:

$$\lim_{t \to \infty} \eta(M, t) = \eta_0(M), \qquad (3)$$

где $\eta_0(M)$ – неподвижная точка оператора $A(\Omega_i)$.

Выделим из множества $\{\Omega_i\}$ фазовых пространств, отвечающих всем возмущениям $(\delta\Pi)_i$, бесконечную последовательность покрытий $\{\Omega_{i_k}\}$, $i_k = \overline{1, n_k}$, фазового пространства Ω (i_k – элементы k-го покрытия). Существование таких покрытий следует из допущения **(А)**. Интервалы, на которых действуют $(\delta\Pi)_{i_k}$ порождающие элементы из $\{\Omega_{i_k}\}$, обозначим через $(\hat{t}_k, \widetilde{t}_k)$, $(k = 1,2,...)$. Покрытия $\{\Omega_{i_k}\}$ можно выбрать так, чтобы интервалы $(\hat{t}_k, \widetilde{t}_k)$, $(k = 1,2,...)$ попарно не пересекались и все $(\widetilde{t}_k, \hat{t}_{k+1})$ содержали области Ω_j из **(А)**, имеющие непустое пересечение с каждым элементом покрытия, сформированного на $(\hat{t}_k, \widetilde{t}_k)$. Видно, что $\widetilde{t}_k \to \infty$. Через τ_{i_k} обозначим моменты фокусировки на Ω_{i_k}. Выделим в каждом $\{\Omega_{i_k}\}$ элементы $\Omega_{i_k,\min}$ и $\Omega_{i_k,\max}$, на которых разности $\eta(M, \tau_{i_k})I(\Omega_{i_k}) - \eta_0(M)I(\Omega_{i_k})$ принимают наименьшее и наибольшее значения. Видно, что

$$\eta(M, \tau_{i_k,\min})I(\Omega_{i_k,\min}) - \eta_0(M)I(\Omega_{i_k,\min}) < 0,$$

$$\eta(M, \tau_{i_k,\max})I(\Omega_{i_k,\max}) - \eta_0(M)I(\Omega_{i_k,\max}) > 0. \quad (4)$$

Из допущений (А), (В) и (1) следует, что при $k \to \infty$ разности

$$\eta(M, \tau_{i_k,\max})I(\Omega_{i_k,\max}) - \eta(M, \tau_{i_k,\min})I(\Omega_{i_k,\min})$$

монотонно убывают и стремятся к нулю, откуда следует, что разности (4) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Значит, $\lim_{t \to \infty} \eta(M, t) = \eta_0(M)$ имеет место.

В случае $t_0 < \infty$ предполагается, что все возмущения из $(\delta\Pi)_i$ сосредоточены на $[s_0, t_0)$, и на любом $[s_0, t'] \subset [s_0, t_0)$ число возмущений конечно. Остальные предположения о возмущениях остаются прежними. Для этого случая доказательство того, что процесс фокусирует на неподвижную точку, проводится так же, как и для случая $t_0 = \infty$.

Если точками σ-фокусировки являются все τ_i или их часть, то процесс Π σ-фокусируют на $\eta_0(M)$. Если допущение **(А)** выполняется приближенно, то такая фокусировка также имеет место. Точнее, предположим, что возмущения $(\delta\Pi)_\alpha$, $(\alpha = 1,2,...)$ не приводят к фокусировке на Ω_α. Пусть каждое Ω_α подвергается возмущениям $(\delta\Pi)_{\alpha,i}$ $(\alpha = 1,2,...)$, которые лишь незначительно изменяют распределение вероятностей на Ω_α. Тогда считаем, что полученные в результате таких возмущений стохастические меры $\eta_{\alpha,i}(M)I(\Omega_\alpha)$, $(i = 1,2,...)$ образуют равномерно сходящуюся последовательность на Ω_α. Если выполняется **(В)**, перечисленные требования имеют место для всех Ω_α, и стохастические меры на Ω_α, к которым сходятся $\eta_{\alpha,i}(M)I(\Omega_\alpha)$, $(\alpha = 1,2,...)$, удовлетворяют **(А)**, то (3) имеет место.

5. Заключение

Предложенный в статье подход управления распределением вероятностей системы, основанный на сообщении ей сильных или слабых возмущений, может быть использован на практике при работе с объектами, наделенными марковским свойством. В частности, он может найти применение в ряде задач экономики, экологии и теории эпидемий. Подчеркнем, что задачи о стабилизации стохастической меры, заданной на каком-либо носителе, ранее не рассматривались. Вместе с тем, понятие стохастической меры часто используется при решении многих прикладных задач случайного анализа. Рассмотренная в работе задача с точки зрения постановки примыкает к задачам об эргодичности и стабилизации некоторых классов случайных процессов, в частности, марковских процессов.

Литература: 1. *Дикарев В. А., Герасин С. Н., Слипченко Н.И.* Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов // Доп. НАН України. 2000. №8. С.90-93. **2.** *Дикарев В.А.* Фокусировка распределений марковских процессов // Доп. НАН України. 1999. №11. С.100-103. **3.** *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика // М.: Наука, 1989. С.250-256.

Поступила в редколлегию 20.07.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руденко О.Г.

Дикарев Вадим Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры ПМ ХНУРЭ. Адрес: Украина. 61166, Харьков, пр. Ленина, 66, кв. 21, тел. 33-57-03 (дом.), 702-14-36 (раб.)

Яловега Ирина Георгиевна, аспирантка кафедры ПМ ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Новгородская 20, кв. 14, тел. 30-31-62.