УДК 519.6

О.М. Литвин, І.С. Томанова

Українська Інженерно-Педагогічна Академія,
м. Харків, Україна, academ_mail@ukr.net
Українська Інженерно-Педагогічна Академія,
м. Харків, Україна, tomanova.iryna@gmail.com

ПОБУДОВА ЛОКАЛЬНИХ МАТРИЦЬ СИСТЕМИ РІТЦА З ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙНІВ 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ТРИКУТНИКУ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ БІГАРМОНІЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ЗГИН ПЛАСТИНИ

Сплайни п'ятого степеня на трикутної сітці дають точну оцінку, але їх складно обчислювати, за рахунок того, що для кожного трикутного елемента потрібно знаходити 21 коефіцієнт. У попередніх роботах авторів за допомогою явних формул, були побудовані сплайни 5-го степеня, які роблять обчислення значно простіше. У даній роботі запропонована схема розв'язання бігармонічної задачі з використанням системи Рітца у випадку граничних умов, що відповідають умовам жорсткого защемлення пластини у вигляді сплайна 5-го степеня. Зокрема розглянуто побудову системи Рітца для довільного трикутника з використанням явних формул для сплайнів п'ятого степеня.

СПЛАЙНИ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ, СИСТЕМА РІТЦА, ЛОКАЛЬНА МАТРИЦЯ, БІГАРМОНІЧНА ЗАДАЧА

Литвин О.Н., Томанова И.С. Построение локальных матриц системы Ритца с использованием сплайнов 5-й степени на треугольнике при решении бигармонической задачи об изгибе пластины. Сплайны пятого степени на треугольной сетке дают точную оценку, но их сложно вычислять, за счет того, что для каждого треугольного элемента нужно находить 21 коэффициент. В предыдущих работах авторов с помощью явных формул, были построены сплайны 5-й степени, которые делают вычисления значительно проще. В данной работе предложена схема решения бигармонической задачи с использованием системы Ритца в случае граничных условий, которые соответствуют условиям жесткого защемления пластины в виде сплайна 5-й степени. В частности рассмотрено построение системы Ритца для произвольного треугольника с использованием явных формул для сплайнов пятой степени

СПЛАЙНЫ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ, СИСТЕМА РИТЦА, ЛОКАЛЬНАЯ МАТРИЦА, БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Lytvyn O.M., Tomanova I.S. Construction of local matrixes of the Ritz system using splines of the 5th degree on the triangle for solving the biharmonic problem of plate bending. Splines of the fifth degree on the triangular grid give an accurate estimate, but they are difficult to calculate, due to the fact that for every triangular element it is necessary to find 21 coefficient. In previous works of the authors using explicit formulas for splines of the 5th degree were constructed, which make calculations much simpler. In this paper we propose a scheme for solving a biharmonic problem using the Ritz system in the case of boundary conditions that correspond to the conditions of rigid clamped plate in the form of a spline of the 5th degree. In particular, we consider the construction of the Ritz system for an arbitrary triangle using explicit formulas for splines of the fifth degree.

SPLINES OF FIFTH DEGREE, RITZ SYSTEM, LOCAL MATRIXES, BIGARMONIC PROBLEM

Вступ

У роботах [1], [2] були отримані явні формули для сплайнів п'ятого степеня, які спрощують обчислення при розв'язанні багатьох задач прикладної математики. Сплайни мають численні застосування в різних галузях науки та техніки. Так, наприклад, авторами в роботі [3] за допомогою явних формул для сплайнів п'ятого степеня було наведеного алгоритм побудови розв'язку бігармонічної задачі для жорстко защемленої прямокутної пластини.

В даній роботі досліджується задача знаходження явних формул для коефіцієнтів локальної матриці в методі Рітца для довільного прямокутного трикутника з катетами a і b.В роботах [1], [2] для полінома 5-го степеня

$$P_5(x,y)=\sum_{0\le|\beta|\le 5}\alpha_\beta x^\beta y^\beta,$$

$$|\beta|=\beta_1+\beta_2\,,\ \beta=(\beta_1,\beta_2)$$

доведено, що вимоги

$$D^\alpha f(A_1)=D^\alpha P_5(A_1)\,,\ i=\overline{1,3}\,,\ 0\le|\alpha|\le 2\,,$$

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}\,,\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2\,,\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\,,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}}\right|_{M_{ij}}=\left.\frac{\partial P_5}{\partial \upsilon_{ij}}\right|_{M_{ij}}\,,\ (i,j)\in\{(1,2),(2,3),(3,1)\},$$

де υ_{ij} — нормаль до сторони, що з'єднує вершини A_i та A_j, точка $M_{ij}=\left(\frac{x_i+x_j}{2},\frac{y_i+y_j}{2}\right)=(x_{ij},y_{ij})$ — середина цієї сторони, є достатніми умовами для знаходження вказаних 21 коефіцієнта α_β, $0\le|\beta|\le 5$.

Похідна по внутрішній нормалі υ_{ij} визначається за формулою

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}} = \frac{sign(\Delta_{kij})}{\left|A_i, A_j\right|}\left[(y_i - y_j)\frac{\partial f}{\partial x} - (x_i - x_j)\frac{\partial f}{\partial y}\right],$$

$$\left|A_i, A_j\right| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \ \Delta_{kij} = \begin{vmatrix} x_k & y_k & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \end{vmatrix}.$$

Введемо до розгляду оператор

$$h_{k\beta}(x, y) = \frac{(x - x_k)^{\beta_1}(y - y_k)^{\beta_2}}{\beta_1!\beta_2!}\omega_{ij}^3(x, y) \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{\omega_{ij}^3(x, y)}\right\}_{(x_k, y_k)}^{(2-|\beta|)}$$

де

$$\omega_{ij}(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \end{vmatrix},$$

$$\{g(x, y)\}_{(x_k, y_k)}^{(m)} = \sum_{0 \le |\gamma| \le m} (D^\gamma g)(x_k, y_k) \times$$

$$\times \frac{(x - x_k)^{\gamma_1}(y - y_k)^{\gamma_2}}{\gamma_1!\gamma_2!},$$

$$i, j, k \in \{1, 2, 3\}, \ i \ne j \ne k,$$

мають такі властивості

$$D^\alpha h_{k\beta}\Big|_{A_l} = \delta_{k,l}\delta_{\alpha,\beta}; \ l, k \in \{1, 2, 3\},$$

$$\delta_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha_1,\beta_1}\delta_{\alpha_2,\beta_2},$$

де $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Наступний оператор

$$H_{ij}(x, y) = \frac{\omega_{ik}^2(x, y)\omega_{jk}^2(x, y)\omega_{ij}(x, y)sign(\Delta_{kij})}{\omega_{ik}^2(x_{ij}, y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij}, y_{ij})\left|A_i A_j\right|},$$

має властивості

$$D^\alpha H_{ij}\Big|_{A_k} = 0, \ 0 \le |\alpha| \le 2, \ k \in \{1, 2, 3\}, \ k \ne i, j,$$

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial \upsilon_{ij}} = 1, \ \frac{\partial H_{ij}}{\partial \upsilon_{ij}}\Bigg|_{M_{mn}} = 0, \ (i, j) \ne (m, n), \ (i, j), (m, n) \in Q,$$

$$\omega_{ik}(x_i, y_i) = 0, \ \omega_{ik}(x_k, y_k) = 0$$

$$\omega_{ik}(x, y) = \begin{vmatrix} x - x_k & y - y_k & 0 \\ x_i - x_k & y_i - y_k & 0 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

В роботі [1] для кожної функції $f(x, y) \in C^2(\overline{T_{ijk}})$ оператор

$$S_5 f(x, y) = w(x, y) + \sum_{(i,j) \in Q}\left[\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}} - \frac{\partial w}{\partial \upsilon_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}} H_{ij}(x, y)$$

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{0 \le |\beta| \le 2} D^\beta f(A_i) h_{i\beta}(x, y)$$

$$D^\alpha S_\partial f\Big|_{A_p} = D^\alpha f\Big|_{A_p}, \ p \in \{1, 2, 3\}, \ 0 \le |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \le 2$$

визначає поліном 5-го степеня з властивостями

$$\frac{\partial^\beta S_5 f}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}}(A_{ij}) = \frac{\partial^\beta f}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}}(A_{ij}).$$

1. Постановка задачі

Треба знайти розв'язок бігармонічної задачі на області G, яка складеться з об'єднання прямокутних трикутників з катетами a та b паралельними осі Ox та осі Oy відповідно.

Для початку оберемо довільний трикутник із вершинами (x_1, y_1), $(x_1 + a, y_1)$, $(x_1, y_1 + b)$ наведений на рис. 1.

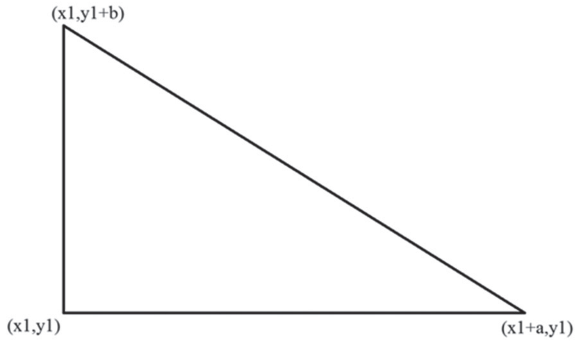

Рис. 1. Схематичний вигляд трикутника

Згідно із теорією [1],[2],[3] в вершинах цього трикутника вважаємо невідомими значення параметрів при функціях $h_{k\beta}(x, y)$, $k = \overline{1,3}$ у вершинах трикутника та значення параметрів при функціях $H_{12}(x, y)$, $H_{23}(x, y)$, $H_{13}(x, y)$ на серединах відповідних сторін. Кожній із функцій ставиться у відповідність константа c_i, $i = \overline{1,21}$.

Для спрощення викладання наступного матеріалу введемо до розгляду наступні позначення:

$$\Phi(x, y) = \left\{\frac{\partial S_5 f(x, y)}{\partial c_i}, \ i = \overline{1,21}\right\},$$

$$\Phi^{(2,0)}(x, y) = \left\{\frac{\partial^2 \Phi_i f(x, y)}{\partial x^2}, \ i = \overline{1,21}\right\},$$

$$\Phi^{(0,2)}(x, y) = \left\{\frac{\partial^2 \Phi_i f(x, y)}{\partial y^2}, \ i = \overline{1,21}\right\}.$$

Кожна з введених функцій є 21-мірним вектором.

Використовуючи введені позначення опишемо побудову локальної матриці [4] системи Рітца для розв'язання бігармонічної задачі на трикутнику

$$D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) = q, \ (x, y) \in G,$$

яка повинна задовольняти граничним умовам (умовам жорсткого защемлення)

$$u\big|_{\partial G} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_{\partial G} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y}\Bigg|_{\partial G} = 0.$$

Згідно із [4-9] даній задачі відповідає варіаційна задача про мінімум функціоналу:

$$J(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - 2 \cdot q \cdot u\right] dxdy$$

або

$$J(u)=\iint_G\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-2\cdot q\cdot u\right]dxdy$$

при тих же умовах.

Застосуємо для розв'язку даної задачі метод Рітца. Наближений розв'язок згідно методу шукається у вигляді:

$$u^*=\sum_{i=1}^{21}c_i\phi_i$$

де c_i – постійні, які вибираються так щоб величина $J(u^*)$ була мінімальною.

Для визначення цих сталих отримується лінійна алгебраїчна система

$$\frac{\partial J}{\partial c_k}=0, k=\overline{0,21}.$$

Ця система буде мати вигляд

$$\left.\begin{array}{l}[\phi_1,\phi_1]c_1+[\phi_2,\phi_1]c_2+...+[\phi_{21},\phi_1]c_{21}=(f,\phi_1)\\ [\phi_1,\phi_2]c_1+[\phi_2,\phi_2]c_2+...+[\phi_{21},\phi_2]c_{21}=(f,\phi_2)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [\phi_1,\phi_{21}]c_1+[\phi_2,\phi_{21}]c_2+...+[\phi_{21},\phi_{21}]c_{21}=(f,\phi_{21})\end{array}\right\}.$$

В якості набору функцій $\{\phi_k(x,y)\}$ для метода Рітца оберемо набір із 21-ї базисної функції, які ми використовували для побудови полінома 5-го степеня.

Для знаходження невідомих констант c_i, $i=\overline{1,21}$ підставляючи u^* замість u у функціонал та прирівнюючи похідні по c_i, $i=\overline{1,21}$ нулю, отримуємо систему рівнянь:

$$\iint_G\left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_k}{\partial y^2}\right)-q\cdot\phi_k\right]dxdy=$$

$$=\iint_G\left[\sum_{k=1}^{21}c_k\left(\frac{\partial^2\phi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_k}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_s}{\partial y^2}\right)-\right.$$

$$\left.-q\cdot\phi_s\right]dxdy=0\quad s=\overline{1,21}.$$

Отримуємо лінійну систему рівнянь відносно змінних c_i, $i=\overline{1,21}$:

$$\iint_G\left[\sum_{k=1}^{21}c_k\left(\frac{\partial^2\phi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_k}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_s}{\partial y^2}\right)\right]dxdy=$$

$$=\iint_G[q\cdot\phi_s]dxdy,\ s=\overline{1,21}$$

Замінимо отриману систему рівнянь її матричним виглядом:

$$\mathrm{M}\cdot c=\mathrm{P}$$

Теорема 1. Елементи матриці М можна записати у наступній явній формі:

$$\mathrm{M}_{ij}=\iint_G\Big[\Big(\Phi_i^{(2,0)}(x,y)+\Phi_i^{(0,2)}(x,y)\Big)\times$$

$$\times\Big(\Phi_j^{(2,0)}(x,y)+\Phi_j^{(0,2)}(x,y)\Big)\Big]dxdy.$$

Теорема 2. Елементи матриці Р можна записати у наступній явній формі:

$$P_i=\iint_G[q(x,y)\cdot\Phi_i(x,y)]dxdy.$$

Знайдений в результаті розв'язку даної системи вектор невідомих c_i, $i=\overline{1,21}$ підставляється у сплайн $S_5f(x,y)$.

Наведена вище схема знаходження елементів матриці системи Рітца для трикутних елементів, що не мають спільних точок із границею області (рис. 2).

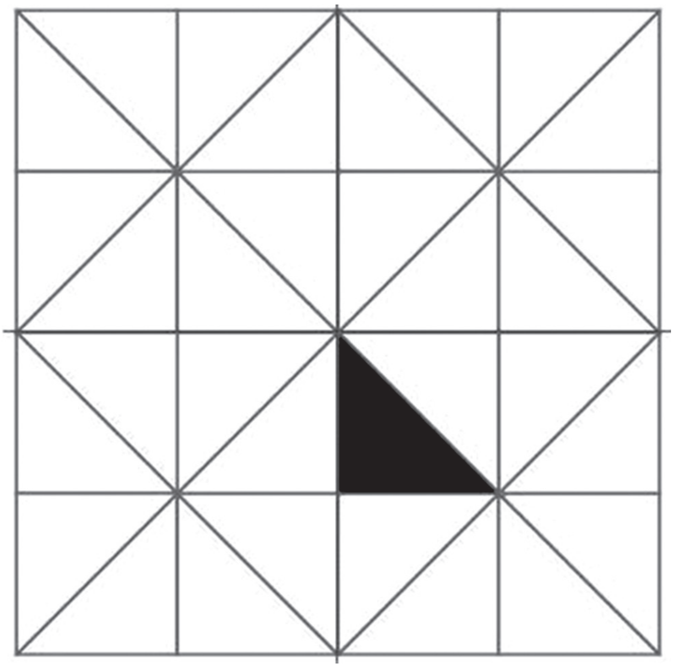

Рис. 2. Приклад розміщення трикутного елемента, що не має спільних точок із границею області розбиття

У випадку коли елемент розбиття належить границі області задля задоволення умовам жорсткого защемлення деякі з параметрів прирівнюються нулю.

Причому для вершин трикутників, які знаходяться у вершинах області *G*. параметри, що відповідають базисним функціям $h_{0,0}$, $h_{1,0}$, $h_{0,1}$, $h_{2,0}$ та $h_{0,2}$ прирівнюються нулю.

Для вершин трикутників, що знаходяться на границі області *G*, паралельних осі *Ox*, прирівнюються нулю параметри, що відповідають базисним функціям $h_{0,0}$, $h_{1,0}$, $h_{0,1}$ та $h_{2,0}$.

Для вершин трикутників, що знаходяться на границі області *G*, паралельних осі *Oy*, прирівнюються нулю параметри, що відповідають базисним функціям $h_{0,0}$, $h_{1,0}$, $h_{0,1}$ та $h_{0,2}$.

Аналогічно, якщо катет трикутника належить границі області, то відповідний параметр для нормалі, що розташована на цьому катеті теж покладається рівним нулю.

На рис.3-6 наведені можливі варіанти розміщення трикутників розбиття з різною кількістю параметрів в кожному з них.

В загальному випадку (рис. 2), якщо трикутник не належить границі області, то кількість параметрів в ньому сягатиме 21.

Якщо трикутник розбиття має одну, і тільки одну, спільну точку із границею, то кількість параметрів буде дорівнювати 16, оскільки параметри $h_{0,0}$, $h_{1,0}$, $h_{0,1}$, $h_{2,0}$ та $h_{0,2}$ для вершини, яка належить границі, прирівнюються нулю.

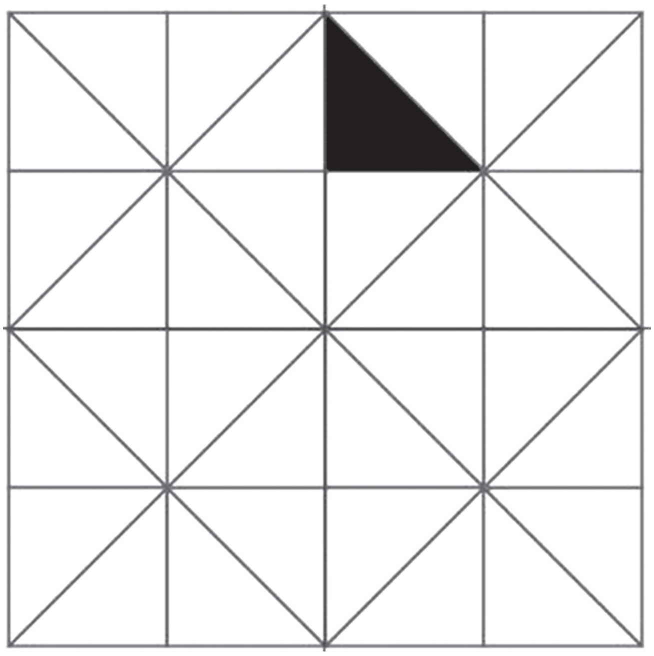

Рис. 3. Приклад розміщення трикутного елемента, що має одну спільну точку із границею області розбиття

У випадку коли дві з вершин (але не весь катет) трикутника належать границі області (рис. 4), кількість невідомих становитиме 11. Оскільки параметри, що відповідають базисним функціям $h_{0,0}$, $h_{1,0}$, $h_{0,1}$, $h_{2,0}$ та $h_{0,2}$ при цих двох вершинах прирівнюються нулю.

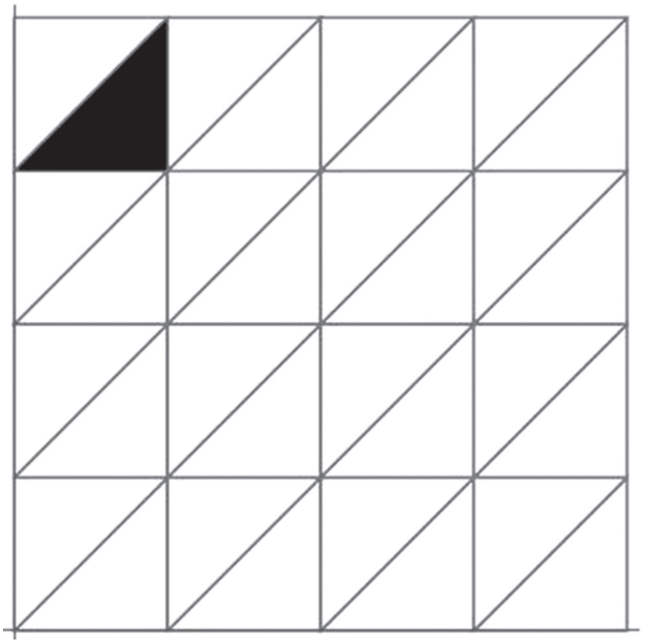

Рис. 4. Приклад розміщення трикутного елемента, що має дві спільні точки із границею області розбиття

Якщо трикутник розбиття має один, і тільки один, спільний катет із границею (рис. 5), то кількість параметрів буде дорівнювати 10, бо порівняно з попереднім випадком (рис. 4) до нуля прирівнюється ще параметр, що відповідає нормалі, розташованій на цьому катеті.

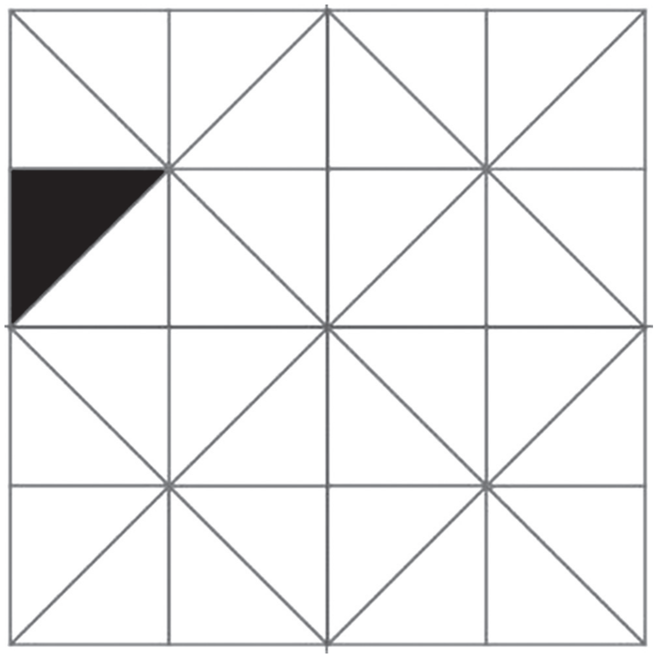

Рис. 5. Приклад розміщення трикутного елемента, один катет якого належить границі області розбиття

Аналогічно, у випадку коли елемент розбиття має два спільних катети із границею області (рис. 6), то невідомих параметрів залишиться лише 4.

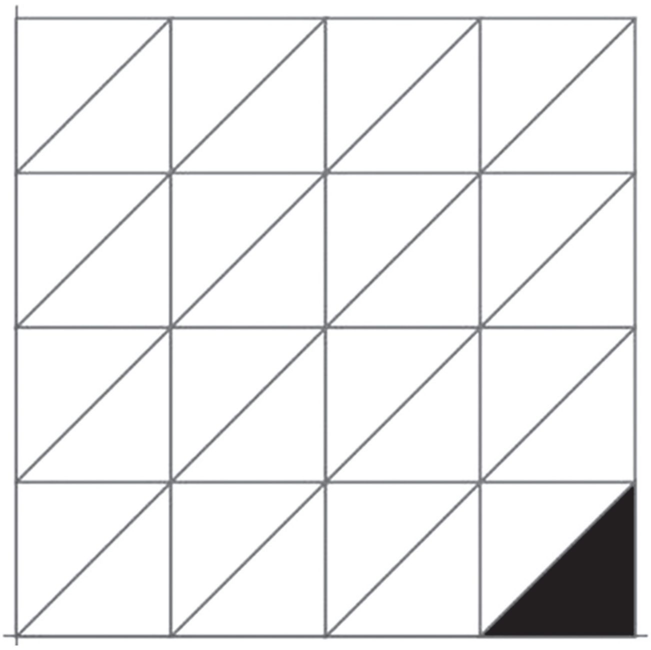

Рис. 6. Приклад розміщення трикутного елемента, два катети якого належать границі області розбиття

Висновки

Дана робота присвячена знаходженню локальних матриць для системи Рітца з використанням явних формул для сплайнів 5-го степеня на трикутній сітці вузлів, наведених в попередніх роботах авторів, для розв'язання бігармонічної задачі для жорсткого защемленної пластини.

В даній роботі наведено вирази для побудови сплайнів п'ятого степеня, які використовувались авторами для побудови розв'язку бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини у випадку розбиття області на прямокутні трикутники, катети яких паралельні осям координат.

Результати даної роботи авторами планується використати для побудови глобальних матриць згідно методу Рітца при розв'язанні бігармонічної задачі у випадку жорстко защемленої границі.

Список літератури: 1. *Сергиенко, И.В.* Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике / И.В Сергиенко, О.Н.Литвин, О.О. Литвин, О.И. Денисова. – Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Том 50, № 5. – С. 17–33. **2.** *Zlamal, M.* Matematical aspect of the finite element method / M. Zlamal, A. Zenesek, V. Kolar, J. Kratochvil // Technical physical and mathematical principles of the finite element method. – 1971. – P.15–39. **3.** *Литвин, О.М.* Розв'язання задачі про згин пластини методом скінченних елементів з використанням сплайнів п'ятого степеня на трикутній сітці / О.М. Литвин, І.С. Томанова – 2017. – Т. 20, №1, С. 52-61. **4.** *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике – М.: Мир, 1975. – 541 с. **5.** Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки / С.П.Тимошенко, С. Войновский-Кригер – М.:Наука, 1966. – 635 с. **6.** *Рвачев В.Л.,* Курпа Л.В, Склепус Н.Г, Учишвили Л.А. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы – Киев: Наук. думка, 1973. – 121 с. **7.** *Кантарович Л.В,* Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализаю – М.: Физматгиз. – 1962. – 708 с. **8.** *Михлин С.Г,* Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука. – 1965. – 384 с.

Resume

Lytvyn O.M., Tomanova I.S.

CONSTRUCTION OF LOCAL MATRIXES OF THE RITZ SYSTEM USING SPLINES OF THE FIFTH DEGREE ON THE TRIANGLE FOR SOLVING THE BIHARMONIC PROBLEM OF PLATE BENDING.

Background: Splines are involved in a large number of physical processes. The use of splines for the study of the biharmonic problem is widely used in practice, in particular when studying the deflection of plates. A number of exact solutions were developed for isotropic linear elastic thin plates; most of them can be found in Tymoshenko's monographs (Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1959). In this paper we propose a scheme for solving the biharmonic problem for a rectangular plate in the case of rigidly clamped boundary conditions by the Ritz method. The Ritz method is used to solve problems in the calculus of variations. The Ritz method is based on the construction of a minimizing sequence of functions. Splines of the fifth degree on the triangular grid give an accurate estimate, but they are difficult to calculate, due to the fact that for each triangular element it is necessary to find twenty-one coefficients. In the previous works of the authors using explicit formulas, splines of the fifth degree were constructed, which make calculations much simpler.

Materials and methods: In this paper we consider the construction of local matrices of the Ritz system for solving a biharmonic problem with a rigidly constrained boundary for an arbitrary right triangle which cathetus are parallel to the coordinate axes using explicit formulas for splines of the fifth degree.

Results: A scheme is given for constructing local matrixes of the Ritz system for solving a biharmonic problem with rigidly clamped boundaries. Depending on the location of the triangular element of the partition with respect to the boundary of the region, the principle of satisfying the boundary conditions of the problem is shown.

Conclusion: In given article present the method of constructing local matrixes of the Ritz system for solving the biharmonic problem of the bending of a rigidly clamped plate. The considered method can be used to construct a global Ritz matrix for finding the solution of the biharmonic problem in the case of partitioning a domain into rectangular triangles which cathetus are parallel to the coordinate axes.

Надійшла до редколегії 26.09.2017.