УДК 621.391

В. А. ОМЕЛЬЧЕНКО, д-р физ.-мат. наук, *А. В. ОМЕЛЬЧЕНКО,*
Я. П. ДРАГАН, д-р физ.-мат. наук, *О. А. КОЛЕСНИКОВ*

РАСПОЗНАВАНИЕ ГАУССОВСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ. СООБЩЕНИЕ 2

В статистической радиофизике типичны ситуации, когда наблюдаемые сигналы имеют неизвестные начальные фазы. При некогерентном приеме оптимальные устройства обработки строят, считая фазы случайными и применяя соответствующие усреднения по всем значениям начальных фаз. Если сигналы формируются в условиях, когда стохастические явления обладают свойствами периодичности, а наблюдения выполняются со случайными временными сдвигами, известные модели стохастических явлений неадекватны принимаемым сигналам.

В работе на основании гауссовских периодически коррелированных случайных последовательностей, периодически нестационарных в узком смысле [1; 3], строятся модели сигналов, учитывающие, в отличие от [2], оговоренную обстановку наблюдения. Рассматривается задача распознавания сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности с учетом свойств разработанных моделей.

1. *Постановка задачи распознавания сигналов.* Пусть распознаванию подлежит M сигналов

$$\tilde{X}^i(l) = \{X^i(l+s),\ P_i(s),\ s = \overline{0,\ N_i - 1}\},$$
$$l = \overline{0,\ n-1};\ i = \overline{1,\ M}, \tag{1}$$

где $X_i(l)$, $l = 0, \ldots, n-1, \ldots,$ — периодически коррелированные случайные последовательности с периодом $N_i \ll n$ $(i = \overline{1,\ M})$, принадлежащие классу периодически нестационарных в узком смысле последовательностей с неизвестными корреляционными матрицами и нулевыми математическими ожиданиями. Распределение сдвига s для всех $i = \overline{1,\ M}$ равновероятное:

$$P_i(s) = 1/N_i\ (s = 0,\ \overline{N_i - 1}). \tag{2}$$

Положено, что сигналы предъявляются с вероятностями P_i, причем $\sum\limits_{i=1}^{M} P_i = 1$, и заданы обучающие выборки $\{X^{ir}(l),\ l = \overline{0,\ n-1};\ r = \overline{1,\ n_i}\}$, $i = \overline{1,\ M}$.

Необходимо построить решающее правило распознавания M сигналов, оптимальное по критерию минимума средней вероятности ошибки распознавания.

2. *Модель наблюдаемых сигналов.* Известно, что периодически нестационарные в узком смысле процессы в результате наблюдений со случайной равномерно распределенной на интервале периодичности задержкой приобретают свойства стационарных в узком смысле процессов. Поэтому для описания сигналов (1) могут быть использованы методы теории стационарных процессов.

Найдем вероятностные характеристики результата преобразования гауссовских периодически коррелированных последовательностей (ПКСП), соответствующего случайным временным сдвигам.

При фиксированном сдвиге s случайные векторы

$$\vec{X}_s^i = [X^i(s),\ \ldots,\ X^i(s+l),\ \ldots,\ X^i(s+n-1)]^{tr} \tag{3}$$

подчиняются гауссовскому закону распределения с плотностью вероятности

$$W(\vec{x}/s,\ i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\,|K_s^i|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{x}^{tr}[K_s^i]^{-1}\vec{x}\right\}, \tag{4}$$

где

$$K_s^i = \mathrm{M}[\vec{X}_s^i \vec{X}_s^{itr}]\ (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_i - 1;\ i = \overline{1,\ M}). \tag{5}$$

Учитывая случайный характер сдвига, запишем плотности вероятности распределения векторов

$$\vec{\tilde{X}} = [\tilde{X}^i(0), \ \ldots, \ \tilde{X}^i(l), \ \ldots, \ \tilde{X}^i(n-1)]^{tr}$$

в виде конечных смесей

$$W(\vec{x}/i) = \sum_{s=0}^{N_i-1} P_i(s)\, W(\vec{x}/s, \ i), \ i = \overline{1, \ M}, \tag{6}$$

причем условные плотности вероятности $W(\vec{x}/s, \ i)$ $(s = \overline{0, \ N_i - 1};$ $i = \overline{1, \ M})$ определяются выражением (4). Это полигауссовская модель принимаемого сигнала. Обсудим особенности ее представления в координатной области.

Рассмотрим необходимые вероятностные характеристики конечного преобразования Фурье наблюдаемых последовательностей $\tilde{X}^i(l)$, $l = \overline{0, \ n-1}$

$$\tilde{Z}^i(m) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} \tilde{X}^i(l) \exp\left\{-j\frac{2\pi}{n} ml\right\}, \ m = \overline{0, \ n-1}. \tag{7}$$

Для этого представим преобразование (7) в векторной форме

$$\vec{\tilde{Z}}^i = W\vec{\tilde{X}}^i, \ i = \overline{1, M}. \tag{8}$$

Здесь векторы

$$\vec{\tilde{Z}}^i = [\tilde{Z}^i(0), \ \ldots, \ \tilde{Z}^i(m), \ \ldots, \ \tilde{Z}^i(n-1)], \ i = \overline{1, M};$$

$$W = [w_{ml}] - \tag{9}$$

матрица дискретного преобразования Фурье размерности n с элементами

$$w_{ml} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left\{-j\frac{2\pi}{n}(m-1)(l-1)\right\}, \ m, \ l = \overline{1, \ n}.$$

Применяя к (8) правило трансформации плотностей вероятности с учетом (4), (6), получаем закон распределения наблюдаемого сигнала в координатной области

$$W(\vec{z}/i) = \frac{1}{N_i} \sum_{s=0}^{N_i-1} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |R_s^i|}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \vec{z}^* [R_s^i]^{-1} \vec{z}\right\}, \ i = \overline{1, \ M}, \tag{10}$$

в котором $R_s^i = WK_s^i W^*$.

Выражение (10) показывает, что в координатной области наблюдаемые сигналы также имеют полигауссовское распределение.

Найдем выражение для моментов второго и четвертого порядков координат наблюдаемых сигналов $Z^l(m)$, $m=\overline{0,\ n-1}$.

Представим моменты второго порядка координат наблюдаемых сигналов в следующем виде:

$$\tilde{r}^i(m_1,\ m_2)=\mathbf{M}\,[\tilde{Z}^i(m_1)\,\bar{Z}^i(m_2)]=$$
$$=\frac{1}{N_i}\sum_{s=0}^{N_i-1} r^i(m_1,\ m_2)\exp\left\{-j\,\frac{2\pi}{n}(m_1-m_2)\,s\right\};$$
$$m_1,\ m_2=\overline{0,\ n-1};\ i=\overline{1,\ M},$$

где $r^i(m_1,\ m_2)=\mathbf{M}\,[Z^i(m_1)\,Z^{i*}(m_2)]$ — корреляция отсчетов преобразования Фурье i-й ПКСП. Учитывая, что $r^i(m_1,\ m_2)\neq 0$ $(i=\overline{1,\ M})$ только для тех $m_1,\ m_2=\overline{0,\ n-1}$, которые удовлетворяют равенству [1; 2],

$$|m_1-m_2|\approx\frac{n}{N_i}\,k,\ k=0,\ 1,\ \ldots$$

имеем

$$\tilde{r}^i(m_1,\ m_2)=\begin{cases}0, \text{ если } m_1\neq m_2;\\ r^i(m_1,\ m_2), \text{ если } m_1=m_2,\end{cases} \qquad (11)$$

т. е. отсчеты преобразования Фурье наблюдаемых сигналов (1) можно считать некоррелированными. Поэтому на уровне моментов первых двух порядков вся информация о наблюдаемых сигналах заключена в диагоналях матриц $\tilde{R}^i=\mathbf{M}\,[\vec{\tilde{Z}}^i\,\vec{\tilde{Z}}^{i*}]$, $i=\overline{1,\ M}$.

Для моментов четвертого порядка справедливо выражение

$$\mathbf{M}\,[|\tilde{Z}^i(m_1)|^2\,|\tilde{Z}^i(m_2)|^2]=r^i(m_1,\ m_1)\,r^i(m_2,\ m_2)+$$
$$+|r^i(m_1,\ m_2)|^2+|r^i(m_1,\ n-m_2)|^2 \qquad (12)$$

при условии, что учтена гауссовость ПКСП. Выражение (12) свидетельствует о наличии статистической связи отсчетов $\tilde{Z}^i(m_1)$ и $\tilde{Z}^i(m_2)$, удовлетворяющих условию

$$|m_1-m_2|\approx\frac{n}{N_i}\,k,\ k=0,\ 1,\ \ldots \qquad (13)$$

или

$$|m_1+m_2|\approx\frac{n}{N_i}\,k,\ k=0,\ 1,\ \ldots, \qquad (14)$$

так как в этом случае второе и третье слагаемые в (12) ненулевые.

Согласно (12) отсчеты периодограммы $I^i(m_1)=|\tilde{Z}^i(m_1)|^2$ и $I^i(m_2)=|\tilde{Z}^i(m_2)|^2$ $(i=\overline{1,\ M})$ оказываются коррелированными, если аргументы $m_1,\ m_2=\overline{0,\ n-1}$ удовлетворяют условию (13) или (14), и некоррелированными — в противном случае. Степень корреляции отсчетов $I^i(m)$, $m=\overline{0,\ n-1}$ определяется степенью корреляции соответствующих отсчетов преобразования Фурье ПКСП $Z^i(m)$, $m=\overline{0,\ n-1}$; $i=\overline{1,\ M}$.

3· *Модель гауссовских стационарных сигналов.* При синтезе алгоритмов обработки сигналов общепринята математическая модель гауссовских стационарных последовательностей. Для наблюдаемых последовательностей, как отмечено в п. 2, выполняется свойство стационарности. Введем дополнительное предположение об их гауссовости и рассмотрим закон распределения наблюдаемых сигналов в координатной области.

Стационарные последовательности могут изучаться как частный случай периодически коррелированных последовательностей с периодом $N_i = 1$, $i = \overline{1, M}$. Поэтому плотности вероятности распределения наблюдаемых сигналов в координатной области (10) примут вид

$$W(\vec{z}/i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \, |R_0^i|}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{z}^*[R_0^i]^{-1}\vec{z}\right\}, \quad i = \overline{1, M}, \tag{15}$$

где $R_0^i = \mathrm{M}[\vec{Z}_0^i \vec{Z}_0^{i*}]$ — корреляционная матрица для сдвига $s = 0$. Отметим, что вместо матрицы R_0^i $(i = \overline{1, M})$ в (15) может использоваться любая матрица R_s^i $(s = \overline{-\infty, \infty})$, так как корреляционная функция стационарного процесса не зависит от сдвига s.

Для стационарных сигналов наибольшие элементы матрицы сосредоточены в окрестности диагонали $m_1 = m_2$ [1; 2]. На этом основании примем приближение

$$W(\vec{z}/i) \approx \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod\limits_{m=0}^{n-1} s^i(m)}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1} \frac{|z(m)|^2}{s^i(m)}\right\}, \quad i = \overline{1, M}, \tag{16}$$

где $s^i(m) = r_0^i(m, m) = \mathrm{M}[|Z^i(m)|^2]$ — отсчет ψ-спектра i-й последовательности в базисе комплексных экспоненциальных функций [4]. Согласно результатам п. 1 для последовательностей (1) гауссовская стационарная модель (16) позволяет учесть всю информацию о сигналах (1) на уровне первых двух моментов.

4. *Алгоритмы распознавания сигналов.* Построим решающее правило распознавания сигналов (1) в координатной области. Применяя критерий минимума средней вероятности ошибки распознавания с учетом (10), имеем

$$i = \arg \max_{l=\overline{1, M}} \left[\ln \sum_{s=0}^{N_l - 1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{z}^*[\hat{R}_s^l]^{-1}\vec{z}\right\} + d^l\right]. \tag{17}$$

Здесь

$$d_j = \ln \frac{P_j}{\sqrt{(2\pi)^n |\hat{R}_0^j|}}; \tag{18}$$

матрицы $\hat{R}_s^j$ ($s = \overline{0,\ N_j - 1}$; $j = \overline{1,\ M}$) оцениваются на этапе обучения.

Найдем решающее правило распознавания, исходя из приближенного описания сигналов (1). Для этого представим сигналы вектором размерности $p = \mathrm{E}(n/2)$ ($\mathrm{E}(x)$ — целая часть x); $\vec{I} = [I(0),\ \ldots,\ I(m),\ \ldots, I(p-1)]^{tr}$ **(19)**, каждая компонента которого $I(m) = |Z(m)|^2$ **(20)**, m-й отсчет периодограммы, и апроксимируем закон распределения $\vec{I}$ многомерным логнормальным. Применяя критерий минимума средней вероятности ошибки распознавания, приходим к решающему правилу распознавания, асимптотически оптимальному для принятого описания сигналов:

$$i = \arg \min_{j=\overline{1,\ M}} \{ \sum_{\nu=1}^{p_j} (\ln \vec{I}_\nu^j - \hat{\vec{\mu}}_\nu^j)^{tr} \times$$
$$\times [\hat{r}_j^{j,\nu}]^{-1} (\ln \vec{I}_\nu^j - \hat{\vec{\mu}}_\nu^j) + \hat{d}_j \}. \tag{21}$$

В нем векторы $\vec{I}_\nu^j$ ($\nu = \overline{1,\ p_j}$; $j = \overline{1,\ M}$) формируются из отсчетов $\vec{I}$ в соответствии с правилом

$$\vec{I}_\nu^j = [I(\nu),\ \ldots,\ I(\nu + kL_j),\ \ldots,\ I(\nu + (N_j - 1) L_j]^{tr};$$
$$L_j = \mathrm{E}(n/N_j),\ p_j = \mathrm{E}(p/L_j),$$

оценки $\hat{r}_j^{j,\nu}$ и $\hat{\vec{\mu}}_\nu^j$ ($\nu = \overline{1,\ p_j}$; $j = \overline{1,\ M}$) находятся на этапе обучения

$$\hat{\vec{\mu}}_\nu^j = \frac{1}{n_j} \sum_{r=1}^{n_j} \ln \vec{I}_\nu^{jr};$$

$$\hat{r}_j^{j\nu} = \frac{1}{n_j} \sum_{r=1}^{n_j} (\ln \vec{I}_\nu^{jr} - \hat{\vec{\mu}}_\nu^j)(\ln \vec{I}_\nu^{jr} - \hat{\vec{\mu}}_\nu^j)^{tr};$$

$$\hat{d}_j = 2 \ln P_j - \sum_{\nu=1}^{n_j} |\hat{r}_j^{j\nu}|.$$

Здесь введено обозначение

$$\ln \vec{I}^j = [\ln I^j(0),\ \ldots,\ \ln I^j(p-1)]^{tr},\ j = \overline{1,\ M}.$$

Использование традиционной модели гауссовских сигналов (16) позволяет записать следующее решающее правило распознавания [5]:

$$i = \arg \min_{j=\overline{1,\ M}} \{ \vec{I}^{tr} \hat{\vec{s}}^j + \hat{d}_j \}, \tag{22}$$

где вектор $\vec{I}$ определяется согласно (19), (20); отсчеты векторов $\hat{\vec{s}}^j$ $(j=\overline{1, M})$ находятся на этапе обучения:

$$\hat{s}^j(m)=\frac{1}{n_j}\sum_{r=1}^{n_j}|z^{jr}(m)|^2,\ m=\overline{0,\ p-1};$$

$$\hat{d}_j=\sum_{m=0}^{n-1}\ln\hat{s}^j(m)+2\ln P_j.$$

В работе [5] отмечена асимптотическая оптимальность при $n\to\infty$ решающего правила (22) для гауссовских стационарных последовательностей.

Сопоставляя решающие правила (21) и (22), видим, что оба они используют одинаковое представление сигналов вектором $\vec{I}$, составленным из отсчетов соответствующих периодограмм. Однако в отличие от (22) в правиле (21) учтена статистическая взаимосвязь отсчетов периодограмм. Это позволяет эффективно различать гауссовские ПКСП, имеющие близкие ψ-спектры в гармоническом базисе, и тогда, когда они наблюдаются со случайными временными сдвигами.

5. *Статистическое моделирование алгоритмов распознавания сигналов*. Покажем, что учет статистической связи коэффициентов Фурье в гармоническом базисе позволяет распознавать ПКСП, наблюдаемые со случайными временными сдвигами, и в том случае, когда они не различаются в рамках энергетической теории [4]. Для этого смоделируем гауссовские ПКСП с одинаковыми ψ-спектрами в гармоническом базисе, но различными корреляционными матрицами, и оценим методом статистического моделирования на ЭВМ средние вероятности ошибки их распознавания с использованием решающих правил (21) и (22).

Для моделирования ПКСП используем следующее их представление [2]:

$$X^i(l)=\sum_{q=1}^{p_i}\zeta_q^i(l)\,v_q^i(l),\ p_i=\overline{1,\ \infty},\tag{23}$$

где $v_q^i(l)$ — периодические периода N_i последовательности; $\{\zeta_q^i(l),\ q=\overline{1,\ p_i}\}$ — совокупность стационарных и стационарно связанных последовательностей.

При моделировании принято: количество распознаваемых сигналов $M=2$; количество компонент, используемых для генерирования ПКСП $p_1=p_2=3$; периоды последовательностей $N_1=N_2=16$; длина интервала наблюдения $n=1024$ отсчета. Периодические последовательности $v_q^i(l)$ $(i=1,\ 2;\ q=1,\ 2,\ 3)$ сформированы как отсчеты гармонического сигнала, модулированного по фазе

$$v_q^i(l)=A_q^i\cos\left\{\lambda l+\eta_q^i\cos\left(\frac{2\pi}{N_i}l+\varphi_q^i\right)\right\},$$
$$l=\overline{1,\ 1024};\ q=\overline{1,\ 3};\ i=1,\ 2.$$

Здесь положено: $\lambda = \pi/2$; $h_1^1 = h_1^2 = 0$; $h_2^1 = h_3^1 = h_2^2 = h_3^2 = 5$; $A_1^1 = A_1^2 = 10$; $A_2^1 = A_3^1 = A_2^2 = A_3^2 = 1$. Сигналы различаются фазовыми соотношениями: $\varphi_1^1 = \varphi_2^1 = \varphi_3^1 = 0$ для первого сигнала и $\varphi_1^2 = \varphi_2^2 = 0$; $\varphi_3^2 = \pi/2$ — для второго.

Случайные последовательности $\zeta_q^i(l)$ ($i = 1, 2$; $q = 1, 2, 3$) в (23) сгенерированы как независимые авторегрессионные процессы: $\zeta_q^i(l) = r\zeta_q^i(l-1) + n(l)$, где $r = 0{,}998$; $n(l)$ — гауссовская последовательность с независимыми отсчетами. Последовательности, сформированные согласно (23), подвергались случайным сдвигам:

$$\tilde{X}^i(l) = X^i(l+s);\; l = \overline{1,1024};\; P(s) = 1/16.$$

Сформированные сигналы использованы при статистическом моделировании на ЭВМ ЕС 1050 решающих правил (21) и (22). Объем обучающей и контрольной выборки каждого сигнала задан по 100 реализаций. В результате моделирования оценены средние вероятности ошибки распознавания сигналов: $\hat{P}^1_{\text{ош.ср}} = 0{,}46$ для решающего правила (22) и $\hat{P}^2_{\text{ош.ср}} = 0{,}07$ для правила (21). Такой результат объясняется следующим: для распознавания ПКСП с одинаковыми ф-спектрами (близкими энергетическими спектрами) решающее правило (22), учитывающее распределение энергии сигналов по гармоникам, оказывается практически непригодным; в то же время решающее правило (21), где учитываются статистические связи отсчетов периодограмм, обеспечивает достаточно высокое качество распознавания.

Таким образом, на основе развитой модели гауссовских ПКСП с равновероятным временным сдвигом построены решающие правила распознавания сигналов в базисе гармонических функций. Изложен метод учета при распознавании статистической взаимосвязи коэффициентов Фурье в гармоническом базисе.

Список литературы: 1. *Драган Я. П.* Структура и представления моделей стохастических сигналов. К., 1980. 384 с. 2. *Омельченко В. А., Омельченко А. В., Драган Я. П., Колесников О. А.* Распознавание гауссовских периодически коррелированных случайных сигналов. Сообщ. 1.// Радиотехника. 1988. Вып. 85. С. 75—79. 3. *Марченко Б. Г., Щербак Л. Н.* Линейные случайные процессы и их приложения. К., 1975. 143 с. 4. *Омельченко В. А.* Основы спектральной теории распознавания сигналов. Х., 1983. 156 с. 5. *Мисюкас Р.* Несколько конструктивных выражений асимптотически байесовских классификаторов в явном виде для гауссовских стационарных временных рядов // Статист. пробл. управления. 1985. Вып. 69. С. 57—62.

Поступила в редколлегию 03.02.88