

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДАМИ ДЕТРЕНДИРОВАННОГО ФЛУКТУАЦИОННОГО АНАЛИЗА И МАКСИМУМОВ МОДУЛЕЙ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Описываются результаты исследования выборочных мультифрактальных характеристик, полученных методами детрендированного флукуационного анализа и максимумов модулей вейвлет-преобразования для реализаций самоподобных и мультифрактальных процессов небольшой длины. Предлагается статистический критерий для принятия гипотезы о наличии монофрактальных свойств временного ряда. Проводится фрактальный анализ показаний крутильных весов, который выявил наличие мультифрактальных свойств.

Введение

В настоящее время стало общепризнанным, что многие информационные, биологические, физические, технологические процессы обладают сложной фрактальной структурой. Фрактальный анализ используется для моделирования, анализа и контроля сложных систем в различных областях науки и техники. В частности, в геологии – для прогнозирования сейсмической активности и цунами, определения возраста геологических пород; в биологии и медицине – для диагностики заболеваний и физиологического состояния по записям ЭКГ и ЭЭГ, при исследовании мутаций и изменений на генетическом уровне; в экономике – для прогнозирования кризисных ситуаций и оценивания риска по финансовым рядам; в физике – для исследования турбулентности и термодинамических процессов. Этот список далеко не полон [1-4].

Процессы, обладающие фрактальными свойствами, можно разделить на две группы: самоподобные (монофрактальные) и мультифрактальные. Монофрактальные процессы являются однородными в том смысле, что имеют один показатель скейлинга: их скейлинговые характеристики остаются неизменными на любом диапазоне масштабов. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными масштабными свойствами и характеризуются спектром скейлинговых показателей.

Двумя самыми востребованными инструментами исследования мультифрактальной структуры временных рядов являются метод мультифрактального детрендрованного флуктуационного анализа (МФДФА) [5,6], ориентированный на обработку рядов с трендовыми составляющими, и метод максимумов модулей непрерывного вейвлет-преобразования (ММВП) [6-8], базирующийся на вейвлет-анализе, который называют «математическим микроскопом» из-за способности сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Оба метода являются мощным инструментом статистической обработки нестационарных процессов.

В настоящее время проведен ряд исследований, направленных на изучение статистических свойств оценок фрактальных характеристик, полученных данными методами [5,8-10]. Однако в большинстве работ рассмотрены модельные реализации больших длин – более десятка тысяч значений. В этом случае выборочные характеристики достаточно близки к теоретическим. В то же время, временные ряды, полученные на практике, имеют значительно меньший диапазон значений.

Целью представленной работы является численное исследование применения методов МФДФА и ММВП на модельных реализациях самоподобных и мультифрактальных процессов небольшой длины и использование полученных результатов для анализа экспериментальных данных.

1. Характеристики самоподобных и мультифрактальных случайных процессов [4,6,11,12]

Самоподобие случайных процессов заключается в сохранении статистических характеристик при изменении масштаба времени. Стохастический процесс $X(t)$ является самоподобным с параметром H , если процесс $a^{-H}X(at)$ описывается теми же конечномерными законами распределений (Law), что и $X(t)$:

$$\text{Law}\{a^{-H}X(at)\} = \text{Law}\{X(t)\}, \quad \forall a > 0, t > 0. \quad (1)$$

Параметр H , $0 < H < 1$, называемый показателем Херста, представляет собой степень самоподобия. Наряду с этим свойством, показатель H характеризует меру долгосрочной зависимости стохастического процесса. Можно показать, положив в (1) $a = 1/t$, что для самоподобного процесса выполняется следующее равенство:

$$\text{Law}\{X(t)\} = \text{Law}\{(1/t)^{-H}X(1)\} = \text{Law}\{t^H X(1)\}. \quad (2)$$

Учитывая (2), моменты q -го порядка самоподобного случайного процесса можно выразить как

$$M\left[|X(t)|^q\right] = M\left[|t^H X(1)|^q\right] = t^{qH} M\left[|X(1)|^q\right] = C(q) \cdot t^{qH}, \quad (3)$$

где величина $C(q) = M\left[|X(1)|^q\right]$.

Для мультифрактальных процессов рассматривается более общее соотношение

$$\text{Law}\{X(at)\} = \text{Law}\{M(a) \cdot X(t)\},$$

где $M(a)$ – независимая от $X(t)$ случайная функция. При самоподобном процессе $M(a) = a^H$. Мультифрактальные процессы проявляют более гибкие скейлинговые закономерности для моментных характеристик:

$$M\left[|X(t)|^q\right] = c(q) \cdot t^{qh(q)}, \quad (4)$$

здесь $c(q)$ – некоторая детерминированная функция; $h(q)$ – обобщенный показатель Херста, являющийся в общем случае нелинейной функцией, для которой значение $h(q)$ при $q = 2$ совпадает со значением степени самоподобия H . Для монофрактальных процессов обобщенный показатель Херста не зависит от параметра q : $h(q) = H$.

В общем случае мультифрактальное множество характеризуется скейлинговой экспонентой $\tau(q)$, где параметр $q \in \mathbb{R}$. Функция $\tau(q)$ показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек. Обобщенный показатель Херста связан с функцией $\tau(q)$ соотношением: $\tau(q) = qh(q) - 1$. Для самоподобного процесса функция $\tau(q)$ линейна.

Еще одной важной характеристикой мультифрактальных свойств является функция мультифрактального спектра $f(\alpha)$. Величина α_i представляет собой показатель сингулярности в точке x_i . Для самоподобного процесса все α_i одинаковы и равны параметру самоподобия H . Функция мультифрактального спектра $f(\alpha)$ характеризует распределение вероятностей различных значений α_i . Формально переход от переменных $\{q, \tau(q)\}$ к переменным $\{\alpha, f(\alpha)\}$ может быть осуществлен при помощи преобразования Лежандра:

$$\left\{ \alpha = \frac{d\tau}{dq}; \quad f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau \right\}.$$

2. Метод мультифрактального детрендированного флуктуационного анализа [5,6,13]

Метод детрендированного флуктуационного анализа используется при оценивании параметра H для самоподобных временных рядов. В этом случае для исходного временного ряда $x(t)$ строится кумулятивный ряд $y(t) = \sum_{i=1}^t x(t)$, который разбивается на N сегментов длиной s . Для каждого сегмента $y(t)$ вычисляется флуктуационная функция

$$F^2(s) = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s (y(t) - Y_m(t))^2, \quad (5)$$

где $Y_m(t)$ – локальный m -полиномиальный тренд в пределах данного сегмента (рис.1). Функция $F(s)$ усредняется по всему ряду $y(t)$. Такие вычисления повторяются для различных размеров сегментов, чтобы получить зависимость $F(s)$ в широком диапазоне значений параметра s . Для процессов с фрактальными свойствами с ростом s функция $F(s)$ также возрастает, и линейная зависимость $\log F(s)$ от $\log s$ свидетельствует о наличии свойства масштабной инвариантности: $F(s) \propto s^H$.

При исследовании свойств мультифрактальных процессов применяется мультифрактальный флуктуационный анализ. При проведении МФДФА исследуется зависимость флуктуационной функции $F_q(s)$ от параметра q :

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F^2(s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (6)$$

полученной возведением выражения (5) в степень q и последующим усреднением по всем сегментам.

Изменяя временную шкалу s при фиксированном показателе q , находим зависимость $F_q(s)$, представляя её в двойных логарифмических координатах. Если исследуемый ряд сводится к мультифрактальному множеству, проявляющему долгосрочные зависимости, то флуктуационная функция $F_q(s)$ представляется степенной зависимостью $F_q(s) \propto s^{h(q)}$ с функцией обобщенного показателя Херста $h(q)$. Из определений (5) и (6) следует, что при $q = 2$ этот показатель сводится к обычному значению H . Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному множеству, флуктуационная функция $F_q(s)$ одинакова для всех сегментов, и обобщенный показатель Херста $h(q) = H$ не зависит от параметра q .

3. Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования [6-8, 12,14]

Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования базируется на математическом аппарате вейвлет-анализа. Непрерывное вейвлет-преобразование функции $X(t)$ имеет вид

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \psi_{ab}(t) dt,$$

где $\psi_{ab}(t)$ – вейвлет-функция с параметрами масштаба a и сдвига b . Функция $W(a,b)$ называется вейвлет-спектром и может быть представлена как поверхность вейвлет-коэффициентов в трехмерном пространстве. Наиболее важная информация содержится в линиях локальных экстремумов поверхности $W(a,x)$, поиск которых проводится на каждом масштабе a (рис.2).

Метод ММВП позволяет численно получить статистическую сумму:

$$Z(q,a) = \sum_{l \in L(a)} \left(\sup_{a' \leq a} |W(a', x_l(a'))| \right)^q,$$

где $L(a)$ – множество всех линий l максимумов модулей вейвлет-коэффициентов на масштабе a ; $x_l(a)$ – расположение максимума на этом масштабе. Для вычисления $Z(q,a)$ выбирается максимальное значение модуля вейвлет-коэффициентов вдоль каждой линии на масштабах, меньших заданного значения масштаба a . В этом случае выполняется зависимость $Z(q,a) \propto a^{\tau(q)}$, где $\tau(q)$ – скейлинговая экспонента, которую определяют для каждого значения q путем вычисления тангенса угла наклона $\ln Z(q,a)$ от $\ln a$.

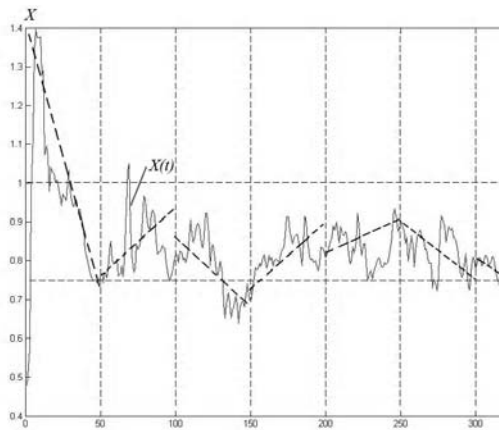


Рис. 1. Построение флуктационной функции

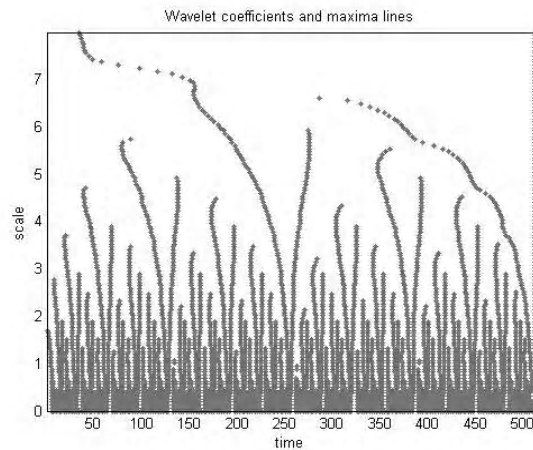


Рис. 2. Локальные максимумы вейвлет-преобразования

4. Исследование характеристик модельных фрактальных реализаций

В работе представлены результаты численного эксперимента, в ходе которого моделировались реализации разных типов фрактальных стохастических процессов: фрактального броуновского движения (монофрактальный процесс) и мультифрактальных детерминированных и стохастических каскадных процессов. Длина реализаций была выбрана равной 256, 512, 1024 и 2048 значений. Для каждого сгенерированного временного ряда методами МФДФА и ММВП рассчитывались мультифрактальные характеристики, которые потом усреднялись по множеству реализаций. Значения параметра q изменялись в диапазоне $-5 \leq q \leq 5$.

Фрактальное броуновское движение. Одной из наиболее известных и простых моделей самоподобного процесса является фрактальное броуновское движение (ФБД) [1,2]. Гауссовский процесс $X(t)$ называется фрактальным броуновским движением с параметром H , $0 < H < 1$, если приращения случайного процесса $\Delta X(\tau) = X(t+\tau) - X(t)$ имеют распределение вида

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0\tau^H}} \cdot \int_{-\infty}^x \text{Exp}\left[-\frac{z^2}{2\sigma_0^2\tau^{2H}}\right] dz,$$

где σ_0 – коэффициент диффузии. ФБД с параметром $H=0.5$ совпадает с классическим броуновским движением. На рис. 3 показаны реализации ФБД и соответствующие реализации приращений при значениях параметра $H=0.6$ (слева) и $H=0.8$ (справа) длиной 1024 значения.

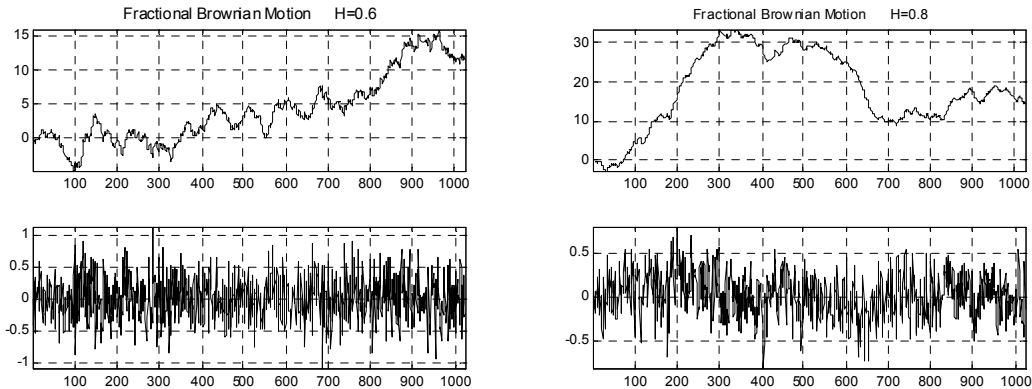


Рис. 3. Реализации ФБД (вверху) и соответствующих приращений (внизу)

ФБД является монофрактальным процессом, его скейлинговые характеристики полностью определяются значением показателя Херста H [4,5]:

$$h(q) = H; \quad \tau(q) = qH - 1; \quad \begin{cases} \alpha = H \\ f(\alpha) = 1 \end{cases}.$$

На рис. 4 представлены выборочные значения функции обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра, полученные по реализациям ФБД разной длины с параметром $H = 0.8$. В верхнем ряду рис.4 расположены характеристики, построенные методом МФДФА, в нижнем – методом ММВП. Пунктирной линией на графиках выборочных $h(q)$ и $\tau(q)$ показаны их теоретические значения. Для наглядности значения функции $\tau(q)$ приведены в увеличенном масштабе. Теоретическое значение мультифрактального спектра $f(\alpha)$ представляет собой точку $(0.8, 1)$.

Очевидно, что оценки мультифрактальных характеристик, полученные методом МФДФА, значительно ближе к своим теоретическим значениям, чем оценки, построенные с применением ММВП. К тому же, при использовании метода ММВП построение вейвлет-спектра, линий локальных максимумов, выбор подходящего диапазона изменения масштаба вейвлет-преобразования представляет собой значительно более сложную задачу, чем определение степени полинома и диапазона длин сегментов для флуктуационного анализа.

С увеличением длины реализации выборочные характеристики стремятся к своим аналитическим значениям. Однако при небольшом числе значений во временном ряде, полученные оценки характеристики демонстрируют ложные мультифрактальные свойства. В работах [8,9,15] отмечается, что одним из недостатков оценивания мультифрактального спектра, особенно методом ММВП, является то, что оценивается верхняя огибающая истинного спектра. Это может приводить к неправильной интерпретации численных результатов, поскольку при истинном дискретном спектре $f(\alpha)$ полученная огибающая будет включать множество ложных точек. Поэтому в случае рядов небольшой длины возникает необходимость проведения дополнительных исследований для подтверждения наличия монофрактальных свойств.

Детерминированный биномиальный каскад [1,4,6]. Простейшей моделью мультифрактального процесса с заданными свойствами является биномиальный каскад. При его построении первоначальный единичный отрезок делится на два равных интервала, которым приписываются весовые коэффициенты p_1 и $p_2 = 1 - p_1$ соответственно. Затем с

каждым из интервалов проделывается аналогичная процедура. В результате на втором шаге имеется четыре интервала с весами $p_1^2, p_1 p_2, p_2 p_1$ и p_2^2 . При числе шагов $n \rightarrow \infty$ и $p_1 \neq p_2$ мы приходим к неоднородному фрактальному множеству. Характеристики $h(q), \tau(q)$ и $f(\alpha)$ для биномиального мультифрактального процесса зависят только от коэффициентов p_1 и p_2 и определяются аналитически следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} h(q) = \left(\frac{1}{q} - \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{q \ln 2} \right); \\ \tau(q) = \frac{-\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2}; \\ \alpha = -\frac{p_1^q \ln(p_1) + p_2^q \ln(p_2)}{\ln 2 (p_1^q + p_2^q)}; \\ f(\alpha) = -\frac{q}{\ln 2} \frac{p_1^q \ln(p_1) + p_2^q \ln(p_2)}{(p_1^q + p_2^q)} + \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2}. \end{array} \right.$$

На рис.5 слева представлены теоретические скейлинговые экспоненты $\tau(q)$ для значений $p_1 = \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$, а справа показаны реализации биномиального каскада при значениях $p_1 = 0.6$ (вверху) и $p_1 = 0.8$ (внизу). Число итераций $n = 10$, т.е. длина реализации равна 2^{10} значений. Очевидно, что с увеличением первоначального весового коэффициента p_1 увеличивается неоднородность временного ряда.

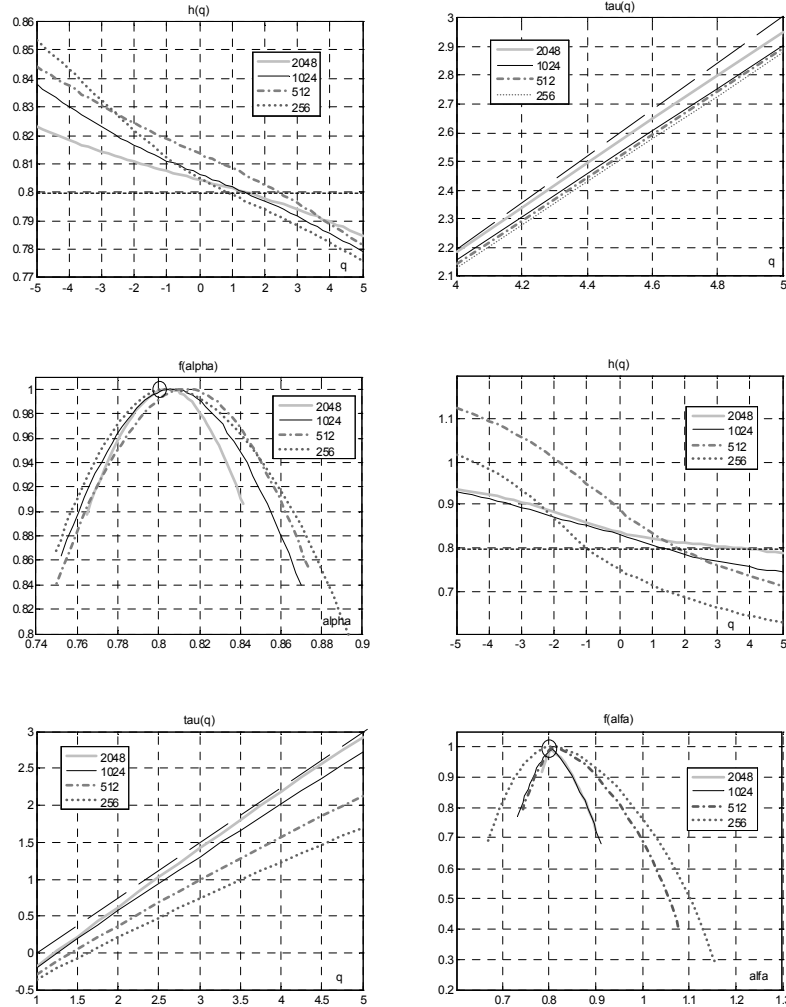


Рис. 4. Выборочные функции $h(q), \tau(q), f(\alpha)$ для реализаций ФБД, полученные методом МФДФА (вверху) и методом ММВП (внизу)

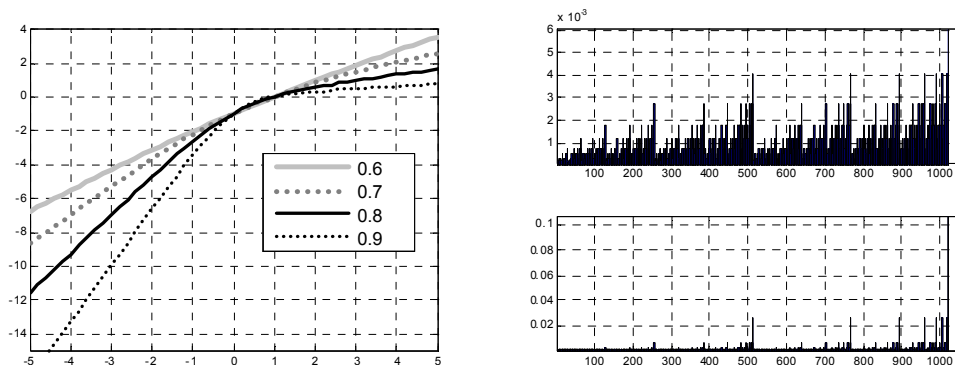


Рис. 5. Скейлинговые экспоненты $\tau(q)$ для разных p_1 и реализации каскада при $p_1 = 0.6$ и $p_1 = 0.8$

На рис. 6 приведены выборочные мультифрактальные характеристики $\tau(q)$ и $f(\alpha)$, полученные методами МФДФА и ММВП по реализациям биномиального каскада разной длины с коэффициентом $p_1 = 0.7$. Характеристики, построенные методом МФДФА, расположены в верхнем ряду, методом ММВП – в нижнем. Пунктирной линией на графиках показаны теоретические значения функций. Для наглядности значения функции $\tau(q)$ приведены только для $q > 0$.

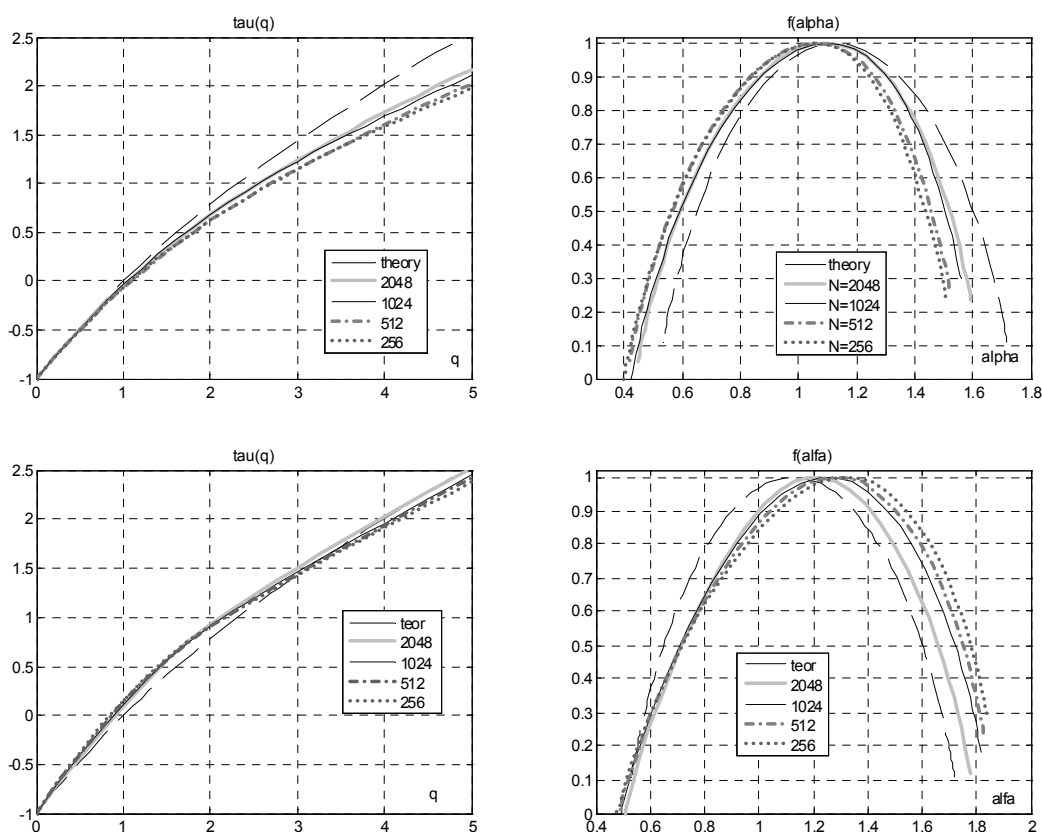


Рис. 6. Выборочные функции $\tau(q)$ и $f(\alpha)$ для реализаций биномиального каскада, полученные методом МФДФА (вверху) и методом ММВП (внизу)

При оценивании рядов с мультифрактальными свойствами метод ММВП позволяет получить оценки, сопоставимые по своим статистическим характеристикам с оценками метода МФДФА. Однако стоит отметить, что характеристики, полученные на основе метода ММВП, очень чувствительны к изменению масштаба диапазона вейвлет-преобразования, в то время как метод флуктуационного анализа позволяет получать устойчивые

оценки. При небольшом числе значений во временном ряде его выборочные фрактальные характеристики демонстрируют смещение диапазона значений. В обоих случаях с увеличением длины реализации выборочные характеристики стремятся к своим аналитическим значениям.

Стохастический биномиальный каскад. Реализации детерминированного каскада полностью определяются величиной p_1 , что неприемлемо для моделирования случайных процессов. При построении стохастических каскадов весовыми коэффициентами являются независимые значения некоторой заданной случайной величины W [2,4,5]. Она выбирается таким образом, чтобы математическое ожидание суммы весовых коэффициентов на каждой итерации равнялось единице. Если выбрать случайную величину, определенную на интервале $[0,1]$, то сумма коэффициентов на каждой итерации будет точно равной единице. В этом случае первым двум интервалам будут приписаны веса w_1 и $1-w_1$ соответственно. На втором шаге добавляются два новых независимых случайных значения w_2 и w_3 и образуются четыре интервала с весами w_1w_2 , $w_1(1-w_2)$, $(1-w_1)w_3$ и $(1-w_1)(1-w_3)$. При числе шагов $n \rightarrow \infty$ мы приходим к предельной мере, являющейся неоднородным фрактальным множеством.

В данной работе предложено в качестве случайной величины, порождающей весовые коэффициенты, использовать случайную величину, имеющую бета-распределение с плотностью вероятностей $p(x) = \frac{1}{B(a,b)}(1-x)^{b-1}$, где $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ – бета-функция, определенную на интервале $[0,1]$. Для бета-распределения с одинаковыми значениями параметров $a=b$ можно аналитически определить скейлинговую экспоненту $\tau(q)$ на интервале значений $q > -1$ [4]:

$$\tau(q) = -\log_2 \frac{Beta(\alpha+q, \alpha)}{Beta(\alpha, \alpha)} - 1.$$

На рис. 7 слева представлены графики теоретических скейлинговых экспонент $\tau(q)$ для значений параметра $a = \{0.5, 1, 1.5, 3\}$. Очевидно, что с увеличением значения параметра a происходит ослабление мультифрактальных свойств процесса. На рис. 7 справа показаны реализации биномиальных стохастических каскадов для значений $a=1$ (вверху) и $a=3$ (внизу).

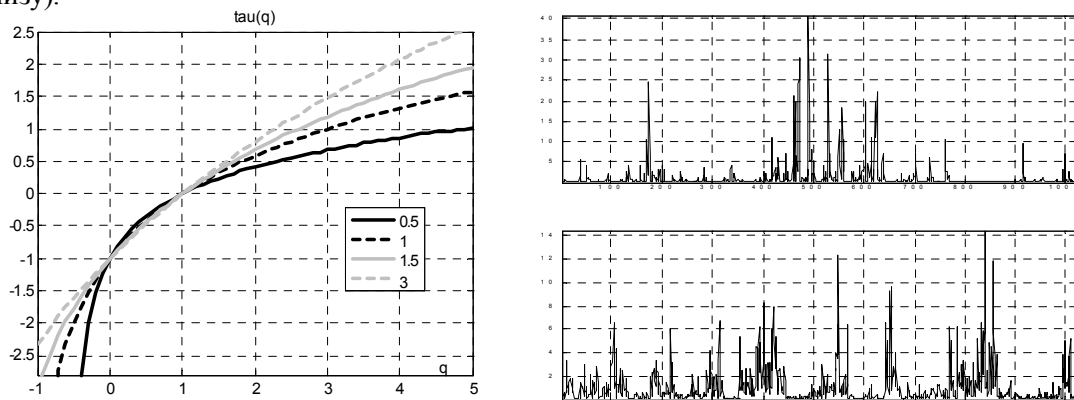


Рис. 7. Функция $\tau(q)$ для разных значений параметра a бета-распределения; реализации биномиального каскада для значений $a=1$ и $a=3$

В работе был выполнен мультифрактальный анализ реализаций мультипликативных стохастических бета-каскадов с различной степенью неоднородности, т.е. мультифрактальных свойств. Для сравнения с аналитическими характеристиками вычисления проводились в диапазоне положительных значений параметра q . На рис. 8 представлены мультифрактальные характеристики, полученные обоими методами по реализациям каскада, веса которого имеют равномерное распределение ($a=1$) разной длины.

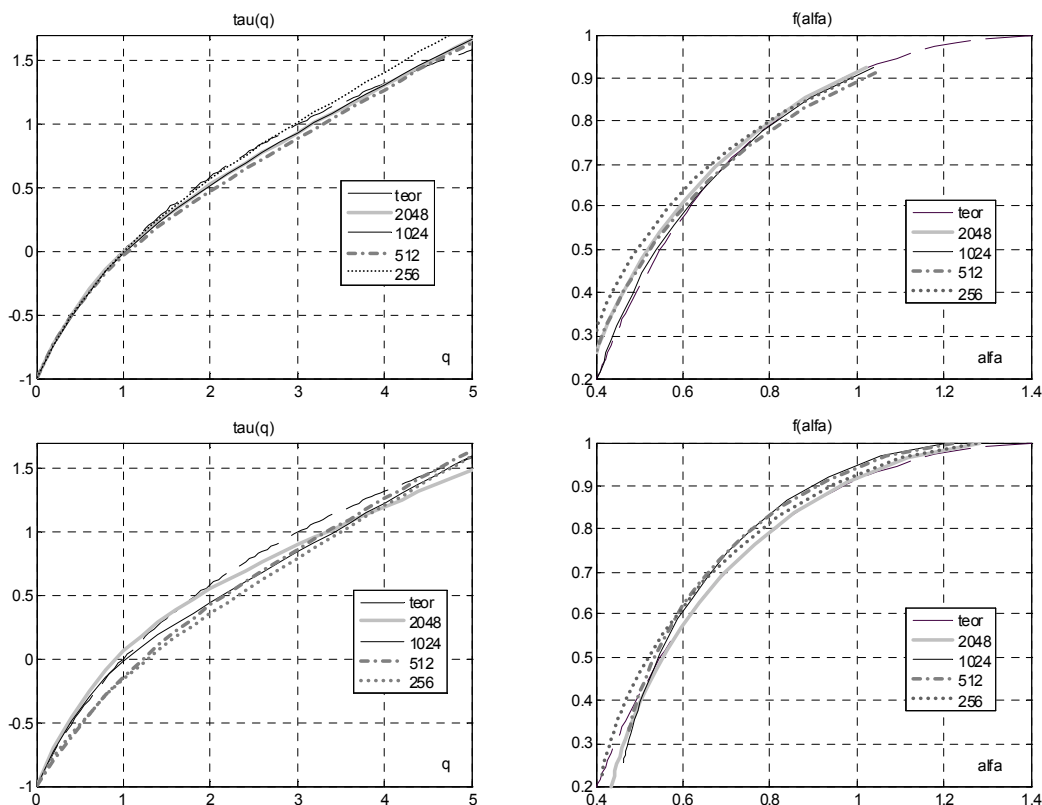


Рис. 8. Выборочные функции $\tau(q)$ и $f(\alpha)$ для реализаций стохастического каскада, полученные методом МФДФА (вверху) и методом ММВП (внизу)

Результаты численных исследований показывают, что характеристики, полученные методом ММВП, менее устойчивые и имеют больший разброс значений. Однако изучение вейвлет-спектра и линий локальных максимумов позволяет сделать дополнительные выводы о локальных особенностях структуры ряда и улучшить выборочные характеристики. Таким образом, при исследовании неизвестного временного ряда метод МФДФА должен быть использован в первую очередь, а затем мультифрактальная структура может быть исследована более детально методом ММВП.

5. Проверка гипотезы о монофрактальных свойствах временного ряда

Приведенные выше результаты мультифрактального анализа модельных временных рядов демонстрируют необходимость разработки инструмента, позволяющего различать моно- и мультифрактальные реализации. В данной работе предлагается метод, позволяющий принимать или отвергать гипотезу о наличии монофрактальных свойств ряда на основе исследования выборочных значений обобщенного показателя Херста, полученных методом МФДФА.

Для самоподобных процессов вопрос о законе распределения оценок H рассмотрен в ряде работ, где было показано, численно или аналитически, что оценки являются нормальными случайными величинами [1,12,16]. В представленной работе исследованы законы распределения оценок $h(q)$ при разных значениях параметра q . Проведенный анализ выборочных законов распределения $h(q)$ показал, что при $q > 0$ оценки $h(q)$ имеют нормальное распределение, параметры которого зависят от значения q . Для $q < 0$ выборочные значения обобщенного показателя Херста в общем случае не являются нормально распределенными. На рис.9 представлены значения функции $h(q)$ ($0 \leq q \leq 5$) и гистограммы значений оценок $h(q)$, полученные по реализациям длиной 1024 значения для $q=1$ и $q=5$. Вверху приведены результаты для реализаций ФБД с параметром Херста $H=0.8$, внизу – для реализаций биномиального стохастического бета-каскада при значении $a=1$.

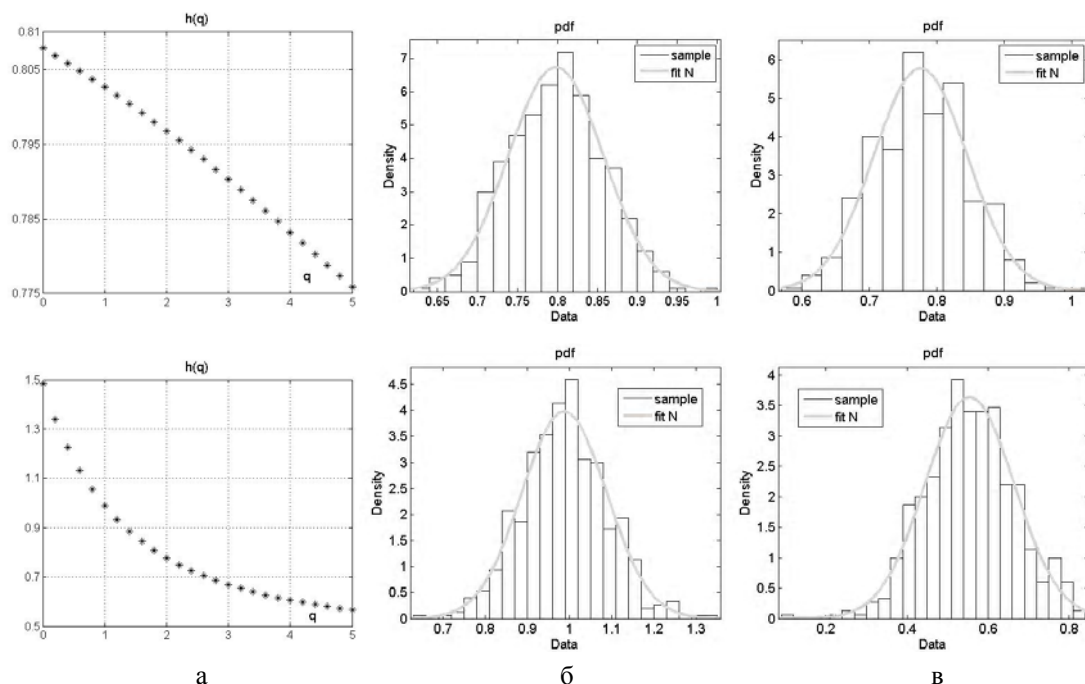


Рис. 9. Выборочные функции $h(q)$ (а); выборочные плотности распределений $h(q)$ при $q = 1$ (б) и $q = 5$ (в) для реализаций ФБД и реализаций стохастического каскада

Очевидно, что мультифрактальные процессы имеют гораздо больший перепад значений $\Delta h = h(q_1) - h(q_2)$. Случайная величина Δh при $q > 0$ имеет нормальное распределение $N(m_h, s_h)$, параметры которого зависят от длины реализации и выбранных значений q . Предложенный в работе критерий рассматривает $\Delta h = h(0.1) - h(5)$. Путем численного моделирования монофрактальных процессов с различной степенью самоподобия были получены выборочные значения m_h и s_h для рядов длины N , представленные в таблице. Там же приведены аналогичные характеристики, рассчитанные по реализациям каскадных процессов с разной степенью неоднородности, задаваемой параметром бета-распределения a .

Среднее значение и среднее квадратическое отклонение случайной величины Δh

	N=256		N=512		N=1024		N=2048	
	m_h	s_h	m_h	s_h	m_h	s_h	m_h	s_h
ФБД	0.075	0.052	0.05	0.038	0.035	0.026	0.03	0.022
Каскад								
a=1	0.87	0.23	0.86	0.18	0.85	0.16	0.82	0.12
a=5	0.32	0.13	0.29	0.095	0.28	0.08	0.27	0.07
a=10	0.23	0.1	0.2	0.07	0.18	0.06	0.17	0.05

Из таблицы видно, что даже при очень слабых мультифрактальных свойствах процесса, при $a=10$, можно различать моно- и мультифрактальные реализации. Таким образом, значение случайной величины Δh можно использовать в качестве статистического критерия для принятия или отбрасывания гипотезы о наличии монофрактальных свойств временных рядов. В данном случае нулевой гипотезой является предположение о монофрактальности ряда с некоторым заданным уровнем значимости α . После получения оценки функции $h(q)$ методом МДФА вычисляется наблюдаемая величина $\Delta h = h(0.1) - h(5)$. Гипотеза принимается с уровнем значимости α , если полученное значение попадает в область допустимых значений $m_h(N) \pm t_{\alpha} s_h(N)$, где N – длина реализации, m_h и s_h – соответствующие значения, рассчитанные для монофрактального процесса, t_{α} – значение функции Лапласа.

6. Исследование рядов показаний крутильных весов

Хорошо известно, что многие временные ряды, отвечающие природным явлениям, имеют самоподобную структуру. К таким явлениям относятся разливы рек, количество выпавших осадков, изменение температуры, увеличение диаметра колец деревьев [1-3]. В последние годы появился ряд работ, посвященных фрактальному анализу данных, связанных с солнечной активностью [17]. Одним из приборов, реагирующих на солнечную активность, являются сверхлегкие крутильные весы (КВ). С их помощью Ш. Кулон установил закон взаимодействия электрических зарядов, а Г. Кавендиш измерил величину мировой гравитационной постоянной. Крутильные весы относятся к числу исключительно чувствительных приборов и до настоящего времени применяются в ответственных экспериментах при изучении так называемых «сверхслабых взаимодействий» в биологии и связанных с нею дисциплинах, а также в физике для уточнения значения гравитационной постоянной.

В работах украинского радиоастронома А.Ф. Пугача [18] впервые были проведены длительные однородные наблюдения за поведением сверхлегких КВ, снабженных автоматической системой регистрации данных. Показания КВ регистрировались каждую минуту. Анализ наблюдаемых данных указывает на то, что суточная переменность показаний КВ не связана с изменениями температуры, давления, условиями освещенности, гравитационным воздействием Солнца. Однако КВ однозначно реагируют на солнечные и лунные затмения, на восход и заход Солнца, на покрытие планет Луной. На рис.10. представлены показания КВ за период с 13 по 23 ноября 2010 г.

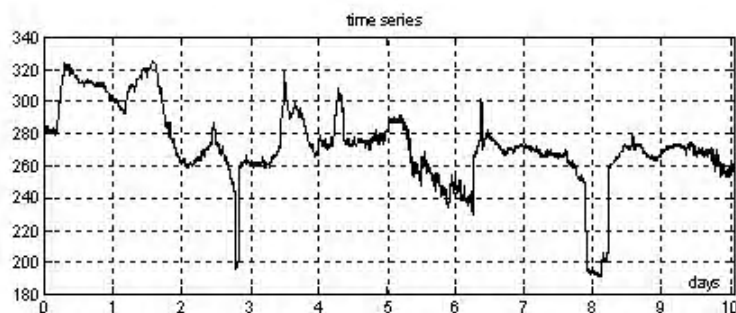


Рис. 10. Временной ряд показаний КВ

Исследование фрактальной структуры данных КВ имеет несомненный научный интерес. Особую важность представляет анализ наблюдений, полученных в течение одно-двух суток, что позволит отслеживать изменения фрактальной структуры в зависимости от изменения солнечной активности. В данной работе проведен анализ временных рядов, полученных в разные периоды года, который показал наличие явно выраженных мультифрактальных свойств. На рис.11 представлены мультифрактальные спектры, полученные методом МФДФА (слева) и ММВП (справа), построенные по рядам двухсуточных наблюдений (2880 значений), типичные для февраля, мая и октября.

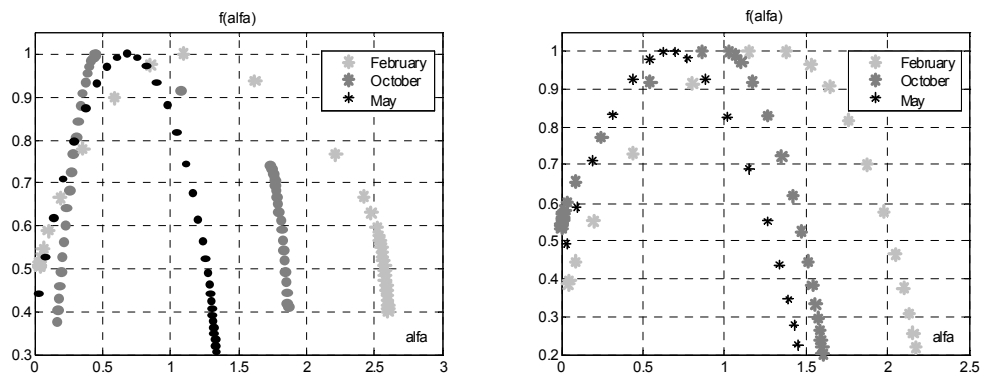


Рис. 11. Выборочные функции $f(\alpha)$ для показаний КВ, полученные методом МФДФА (слева) и ММВП (справа)

Результаты исследований показали, что мультифрактальная структура рядов показаний КВ изменяется в зависимости от времени года. Зависимость этой структуры от солнечной активности требует дальнейших исследований. Необходимо отметить, что в данном случае метод ММВП показывал более устойчивые результаты, чем метод флуктуационного анализа, что, очевидно, связано с наличием больших выбросов в наблюдениях.

Выводы

В работе представлены результаты исследований выборочных мультифрактальных характеристик, полученных методами мультифрактального флуктуационного анализа и максимумов модулей вейвлет-преобразования для реализаций самоподобных и мультифрактальных процессов небольшой длины. Результаты показывают, что оценки характеристик, полученные методом максимумов модулей вейвлет-преобразования, менее устойчивые и имеют больший разброс значений. Показано, что для реализаций с теоретическим монофрактальным спектром в выборочном спектре появляются дополнительные ложные значения, что может приводить к ошибочной интерпретации результатов. Впервые предложен статистический критерий для принятия гипотезы о наличии монофрактальных свойств временного ряда. Впервые проведен фрактальный анализ показаний сверхлегких крутильных весов, который выявил мультифрактальную структуру рядов, изменяющуюся в зависимости от времени года. Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что рассмотренные методы могут быть использованы для анализа фрактальной структуры реализаций небольшой длины в технических, информационных, биологических и других системах.

Автор выражает большую благодарность А.Ф.Пугачу за предоставленный цифровой материал показаний крутильных весов и обсуждение результатов работы.

Список литературы: 1. *Федер Е.* Фракталы / Е. Федер. М.: Мир, 1991. 254 с. 2. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с. 3. *Шредер М.* Фракталы, хаос и степенные ряды. Миниатюры из бесконечного рая / М.Шредер. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 528 с. 4. *Riedi R.H.* Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), Long Range Dependence: Theory and Applications, p. 625–715, Birkhuser. 2002. 5. *Kantelhardt J.W.* Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series / J.W. Kantelhardt, S.A. Zschiegner, A. Bunde, S. Havlin, E. Koscielny-Bunde, H.E. Stanley // Physica A. 2002. № 316. P. 87-114. 6. *Kantelhardt J.W.* Fractal and Multifractal Time Series. 2008 [Электронный ресурс]: <http://arxiv.org/abs/0804.0747> 7. *Muzy J.F.* Multifractal formalism for fractal signals: the structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method / Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. // Phys. Rev. E. 1993. V.47. P.875-884. 8. *Павлов А.Н.* Мультифрактальный анализ сигналов / А.Н. Павлов, В.С. Анищенко // Известия Саратовского университета. Серия «Физика». 2007. Т. 7. Вып. 1. С.3-25. 9. *Oswiecimka P.* Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures / P. Oswiecimka, J. Kwapien, S.Drozd // Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. - Vol. 74. 2006. P. 161-203. 10. *Олемской А.И.* Мультифрактальный анализ временных рядов / А.И. Олемской, В.Н. Борисюк, И.А. Шуда // Вісник СумДУ. Серія «Фізика, математика, механіка». 2008. №2. С.70-81. 11. *Божокин С.В.* Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д. А. Паршин. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 128 с. 12. *Abry P., Flandrin P., Taqqu M.S., Veitch D.* Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens. in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), Long Range Dependence: Theory and Applications. Birkhduser: 2002. P. 125–160. 13. *Kantelhardt J.W.* Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis / J.W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H.N.A. Rego, S. Havlin, A. Bunde // Physica A. 2001. № 295. P. 441-454. 14. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов / С. Малла. М.: Мир, 2005. 671 с. 15. *Veneziano D.* Multifractal analysis: pitfalls of standard procedures and alternatives / D. Veneziano, G.E. Moglen, R.L. Bras // Phys. Rev. E. 1995. V.52. P.1387-1398. 16. *Петерс Э.* Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории хаоса в инвестициях и экономике / Э.Петерс. М: Интернет-трейдинг, 2004. 304 с. 17. *Abramenko V. I.* Multifractal Nature of Solar Phenomena / Solar Physics Research Trends, Edited by P. Wang. -Nova Publisher: 2008. P. 95-136. 18. *Пугач А. Ф.* Наблюдения астрономических феноменов с помощью крутильных весов / А.Ф. Пугач // Physics of consciousness and life, cosmology and astrophysics. 2009. №2. С.30-51.

Поступила в редколлегию 13.10.2011

Кириченко Людмила Олеговна, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: самоподобные и мультифрактальные случайные процессы, фрактальный и мультифрактальный анализ временных рядов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, просп. Ленина, 14, тел. 70-21-640. E-mail: ludmila@kture.kharkov.ua.