Математичне Моделювання Поверхонь Операторами Інтерстріпації

Олег Литвин
каф. інформаційних комп'ютерних систем і математики
Українська інженерно-педагогічна академія
Харків, Україна
academ.mail@ukr.net

Олексій Славік
каф. інформаційних комп'ютерних систем і математики
Українська інженерно-педагогічна академія
Харків, Україна
aleksey.slavik92@gmail.com

Mathematical Modeling of Surfaces Using Interstripation Operators

Oleg Lytvyn
dept. of Information Computer Systems and Mathematics
Ukrainian Engineering Pedagogics Academy
Kharkiv, Ukraine
academ.mail@ukr.net

Oleksii Slavik
dept. of Information Computer Systems and Mathematics
Ukrainian Engineering Pedagogics Academy
Kharkiv, Ukraine
aleksey.slavik92@gmail.com

***Анотація*—В роботі наведено огляд робіт із використання операторів інтерстріпації для математичного моделювання поверхонь. Проведено обчислювальні експерименти з відновлення штучно пошкоджених поверхонь наведеними операторами інтерстріпації.**

***Abstract*—The paper presents an overview of works on the use of interstripation operators for mathematical modeling of surfaces. Computational experiments on restoration of artificially damaged surfaces by the given interstripation operators are carried out.**

Ключові слова—інтерстріпація; інтерлінація; нові інформаційні оператори; математичне моделювання

Keywords—interstripation; interlination; new information operators; mathematical modeling

I. Вступ

У роботах [1-4] проведено дослідження операторів інтерстріпації (від англ. *inter* – між, від англ. *stripe* – смуга) функцій двох змінних, тобто відновлення цієї функції між системою смуг, якщо інформація про цю функцію є відомою лише в точках зазначених смуг.

У результаті авторами отримано деякі результати, які можна використовувати також для відновлення пошкоджених файлів, що містять графічну інформацію. Наприклад, під час передачі мережею файли можуть бути пошкоджені внаслідок помилок у передачі даних або перевантаження мережі. Потреба в оцінці справжніх значень втрачених пікселів виникає у більшості випадків розв'язання задач цифрового оброблення зображень або, наприклад, під час розв'язання задач оброблення архівних документів у формі зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину тощо). Тому актуальним є розроблення методів відновлення зображення в тих його частинах, де інформація з тих чи інших причин є відсутня або є неповністю відомою..

II. Математичне моделювання поверхні операторами інтерстріпації для смуг, паралельних осям координат

Нехай зображення поверхні відомо лише на системі вертикальних смуг:

$$G_{1,k} = \left\{ \alpha_k \le x \le \beta_k, y \in \left[\gamma_1, \delta_{n+1}\right] \right\},\ k = \overline{1,m},\ \ m \ge 2$$

або (та) на системі горизонтальних смуг:

$$G_{2,l} = \left\{ \gamma_l \le y \le \delta_l, x \in \left[\alpha_1, \beta_{m+1}\right] \right\},\ l = \overline{1,n},\ \ n \ge 2\,.$$

Введемо позначення:

$$\overline{G}_{1,k,k+1} = \mathbb{R}^2 \setminus \left(G_{1,k} \cup G_{1,k+1}\right),\ \ k = \overline{1,m-1}\,,$$

$$\overline{G}_{2,l,l+1} = \mathbb{R}^2 \setminus \left(G_{2,l} \cup G_{2,l+1}\right),\ \ l = \overline{1,n-1}\,.$$

Вважаємо, що поверхня, яку ми хочемо відновити, є відомою лише на зазначених вище смугах, тобто

$$f(x,y)\big|_{\alpha_k \le x \le \beta_k} = f_{1,k}(x,y),\ \alpha_k \le x \le \beta_k,\ \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1}\,,$$

$$f(x,y)\big|_{\gamma_l \le y \le \delta_l} = f_{2,l}(x,y),\ \gamma_l \le y \le \delta_l,\ \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}\,,$$

$$\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1}, k = \overline{1,m},$$
$$\gamma_l < \delta_l < \gamma_{l+1} < \delta_{l+1}, l = \overline{1,n}.$$

Беручи до уваги наведені вище позначення математичні моделі поверхонь, інформація про які відома лише на смугах, границі яких паралельні осям координат, матимуть вигляд [5, 6]:

$$L_1 f(x,y) = \begin{cases} f_{1,k}(x,y) & (x,y) \in G_{1,k}, \ k = \overline{1,m}; \\ \mathrm{E}_{1,k,k+1} f(x,y) & (x,y) \in \overline{G}_{1,k,k+1}, \ k = \overline{1,m-1}. \end{cases}$$

$$L_2 f(x,y) = \begin{cases} f_{2,l}(x,y) & (x,y) \in G_{1,l}, \ l = \overline{1,n}; \\ \mathrm{E}_{2,l,l+1} f(x,y) & (x,y) \in \overline{G}_{2,l,l+1}, \ l = \overline{1,n-1}. \end{cases}$$

$$L_{1,2} f(x,y) = \begin{cases} f_{1,k}(x,y) & (x,y) \in G_{1,k}, \ k = \overline{1,m}; \\ f_{2,l}(x,y) & (x,y) \in G_{2,l}, \ l = \overline{1,n}; \\ \mathrm{E}_{1,2,k,l} f(x,y) & (x,y) \in \overline{G}_{1,k,k+1} \bigcap \overline{G}_{2,l,l+1}, \\ & k = \overline{1,m-1}, \ l = \overline{1,n-1}. \end{cases}$$

Оператори інтерстріпації $\mathrm{E}_{1,k,k+1} f(x,y)$, $\mathrm{E}_{2,l,l+1} f(x,y)$ та $\mathrm{E}_{1,2,k,l} f(x,y)$ можуть бути представлені у вигляді:

$$\mathrm{E}_{1,k,k+1} f(x,y) = \frac{x - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} f(\alpha_{k+1}, y) + \frac{x - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} f(\beta_k, y),$$

$$\mathrm{E}_{2,l,l+1} f(x,y) = \frac{y - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} f(x, \gamma_{l+1}) + \frac{y - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} f(x, \delta_l),$$

$$\mathrm{E}_{1,2,k,l} f(x,y) = \left[\mathrm{E}_{1,k,k+1} + \mathrm{E}_{2,l,l+1} - \mathrm{E}_{1,k,k+1} \mathrm{E}_{2,l,l+1} \right] f(x,y).$$

III. Математичне моделювання поверхні операторами інтерстріпації для смуг із границями у вигляді прямих, розташованих під довільним кутом

Нехай зображення поверхні відомо лише смуг вигляду [7]:

$$G_k = \left\{ (x,y) : \omega_{1,k}(x,y) \le x, y \le \omega_{2,k}(x,y) \right\},$$
$$\omega_{1,k}(x,y) = \alpha_{1,k} x + \beta_{1,k} y - \gamma_{1,k},$$
$$\omega_{2,k}(x,y) = \alpha_{2,k} x + \beta_{2,k} y - \gamma_{2,k},$$
$$\alpha_{1,k}^2 + \beta_{1,k}^2 = \alpha_{2,k}^2 + \beta_{2,k}^2 = 1, \ k = \overline{1,m},$$

де $\omega_{1,k}(x,y)$ та $\omega_{2,k}(x,y)$ – деякі прямі, які є границями відомих ділянок зображення (смуг).

Вважаємо, що поверхня, яку ми хочемо відновити, є відомою лише на зазначених вище смугах, тобто $f(x,y)\big|_{G_k} = f_k(x,y), \ (x,y) \in G_k, \ k = \overline{1,m}$.

Позначимо точки перетину прямих, що є границями смуг через

$$\mathrm{A}_{k,l}, \ (k,l) \in \Re = \left\{ (k,l) : \Gamma_k \bigcap \Gamma_l = \mathrm{A}_{k,l}; \ k \ne l; \ k,l = \overline{1,m} \right\}.$$

Тоді математична модель поверхні тіла, інформація про яку відома лише на смугах, границі яких є прямі, що розташовані під довільним кутом, має вигляд:

$$\Theta_m f(x,y) = \begin{cases} f_k(x,y) & (x,y) \in G_k, \ k = \overline{1,m}; \\ \Lambda_m f(x,y) & (x,y) \notin G_k, \ k = \overline{1,m}, \end{cases}$$

$$\Lambda_m f(x,y) = \sum_{(k,l)\in\Re} \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne k,l}}^{m} \frac{\omega_i(x,y)}{\omega_i(\mathrm{A}_{k,l})} \Lambda_{k,l} f(x,y).$$

Оператор $\Lambda_{k,l} f(x,y)$ – оператор інтерстріпації між k-ю та l-ю смугами вигляду:

$$\Lambda_{k,l} f(x,y) = \frac{\rho_l(x,y)}{\mathrm{P}(x,y)} f\left(x_k^*(x,y), y_k^*(x,y) \right) + $$
$$+ \frac{\rho_k(x,y)}{\mathrm{P}(x,y)} f\left(x_l^*(x,y), y_l^*(x,y) \right),$$

$$\mathrm{P}(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \rho_k(x,y),$$

$$\rho_k(x,y) = \sqrt{\left(x_k^*(x,y) - x \right)^2 + \left(y_k^*(x,y) - y \right)^2},$$

$$x_k^*(x,y) = \begin{vmatrix} \gamma_k & \beta_k \\ \alpha_k y - \beta_k x & \alpha_k \end{vmatrix} \Big/ \Delta_k,$$

$$y_k^*(x,y) = \begin{vmatrix} \alpha_k & \gamma_k \\ -\beta_k & \alpha_k y - \beta_k x \end{vmatrix} \Big/ \Delta_k,$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{vmatrix}.$$

IV. Математичне моделювання поверхні операторами інтерстріпації для смуг із криволінійними границями

Нехай зображення поверхні відомо лише на системі смуг із криволінійними границями вигляду:

$$G_{1,k} = \left\{ \alpha_k(y) \le x \le \beta_k(y), y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}] \right\}, \ k = \overline{1,m}, \ m \ge 2$$

або:

$$G_{2,l} = \left\{ \gamma_l(x) \le y \le \delta_l(x), x \in [\alpha_1, \beta_{m+1}] \right\}, \ l = \overline{1,n}, \ n \ge 2.$$

Введемо позначення:

$$\overline{G}_{1,k,k+1} = \mathbb{R}^2 \setminus \left(G_{1,k} \bigcup G_{1,k+1} \right), \ k = \overline{1,m-1},$$
$$\overline{G}_{2,l,l+1} = \mathbb{R}^2 \setminus \left(G_{2,l} \bigcup G_{2,l+1} \right), \ l = \overline{1,n-1}.$$

Беручи до уваги наведені вище позначення математичні моделі поверхонь, інформація про які відома лише на смугах із криволінійними границями, матимуть вигляд [8]:

$$L_1 f(x,y) = \begin{cases} f_{1,k}(x,y) & (x,y) \in G_{1,k}, \ k = \overline{1,m}; \\ \mathrm{E}_{1,k,k+1} f(x,y) & (x,y) \in \overline{G}_{1,k,k+1}, \ k = \overline{1,m-1}. \end{cases}$$

$$L_2 f(x,y) = \begin{cases} f_{2,l}(x,y) & (x,y) \in G_{1,l}, \ l = \overline{1,n}; \\ \mathrm{E}_{2,l,l+1} f(x,y) & (x,y) \in \overline{G}_{2,l,l+1}, \ l = \overline{1,n-1}. \end{cases}$$

В даному випадку оператори інтерстріпації матимуть вигляд:

$$\mathrm{E}_{1,k,k+1} f(x,y) = \frac{x - \beta_k(y)}{\alpha_{k+1}(y) - \beta_k(y)} f(\alpha_{k+1}(y), y) +$$

$$+\frac{x-\alpha_{k+1}(y)}{\beta_k(y)-\alpha_{k+1}(y)}f(\beta_k(y),\ y)\ ,$$

$$\mathrm{E}_{2,l,l+1}f(x,y)=\frac{y-\delta_l(x)}{\gamma_{l+1}(x)-\delta_l(x)}f(x,\ \gamma_{l+1}(x))+$$

$$+\frac{y-\gamma_{l+1}(x)}{\delta_l(x)-\gamma_{l+1}(x)}f(x,\ \delta_l(x))\ .$$

V. Математичне моделювання поверхні операторами інтерстріпації для смуг із границями у вигляді замкнутих контурів

Для випадків смуг, границі яких представлені у вигляді замкнутого контуру ефективним буде застосування операторів інтерстріпації в полярних координатах:

$$\tilde{f}(r,\varphi)=f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ .$$

При цьому математична модель поверхні буде представлена у вигляді:

$$\Theta\tilde{f}(r,\varphi)=\begin{cases}\tilde{f}_k(r,\varphi) & (r,\varphi)\in G_k\ ,\ \ k=\overline{1,m};\\ O_{k,k+1}\tilde{f}(r,\varphi) & (r,\varphi)\in\overline{G}_{k.k+1}\ ,\ \ k=\overline{1,m-1}.\end{cases}$$

$$G_k=\left\{(r,\varphi): r_{k,1}(\varphi)\le r\le r_{k,2}(\varphi),\ \ 0\le\varphi\le 2\pi\right\},$$

$$\overline{G}_{k,k+1}=\left\{(r,\varphi): r_{k,2}(\varphi)\le r\le r_{k+1,1}(\varphi),\ \ 0\le\varphi\le 2\pi\right\}.$$

Оператор інтерстріпації може бути представлений у вигляді:

$$O_{k,k+1}\tilde{f}(r,\varphi)=\tilde{H}_{1,k,k+1}(r,\varphi)\tilde{f}(r_{k,2}(\varphi),\varphi)+$$

$$+\tilde{H}_{2,k,k+1}(r,\varphi)\tilde{f}(r_{k+1,1}(\varphi),\varphi)\ ,$$

$$\tilde{H}_{1,k,k+1}(r,\varphi)=\frac{r-r_{k+1,1}(\varphi)}{r_{k,2}(\varphi)-r_{k+1,1}(\varphi)}\ ,$$

$$\tilde{H}_{2,k,k+1}(r,\varphi)=\frac{r-r_{k,2}(\varphi)}{r_{k+1,1}(\varphi)-r_{k,2}(\varphi)}\ .$$

VI. Приклади моделювання поверхонь операторами інтерстріпації

Наведемо приклади моделювання поверхонь наведеними в даній роботі методами.

Зображення поверхні має вигляд:

$$f(x,y)=0.2\sin\frac{\pi}{2}x+0.2\cos\frac{\pi}{2}y.$$

Припустимо, що інформація про поверхню відома лише на смугах вигляду:

$$\alpha_1=-3,\ \ \beta_1=-2,$$

$$\alpha_1=-1,\ \ \beta_1=1,$$

$$\alpha_1=2,\ \ \beta_1=3.$$

На рис.1 наведено зображення поверхні на системі смуг, результат відновлення поверхні операторами інтерстріпації для смуг, паралельних осям координат, та похибка наближення.

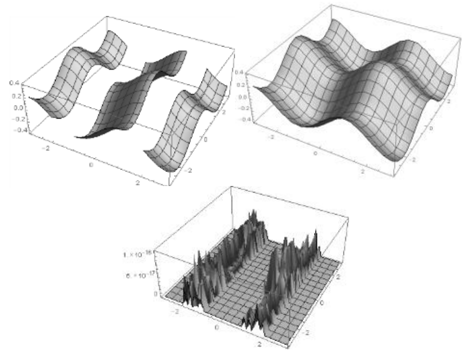

Рис. 1. Результати обчислювального експерименту на систему смуг, границі яких паралельні осям координат

Аналогічний обчислювальний експеримент був проведені для системи криволінійних смуг вигляду:

$$\delta_1(x)=-3\ ,\ \gamma_1(x)=1+0.5\sin x\ ,$$

$$\delta_2(x)=-1+0.5\cos x\ ,\ \gamma_2(x)=3\ .$$

Для поверхні, що описується функцією вигляду:

$$f(x,y)=e^{-\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}}\ .$$

На рис.2 наведено зображення поверхні на отриманій системі смуг, результат відновлення поверхні операторами інтерстріпації для смуг із криволінійними границями та похибка наближення.

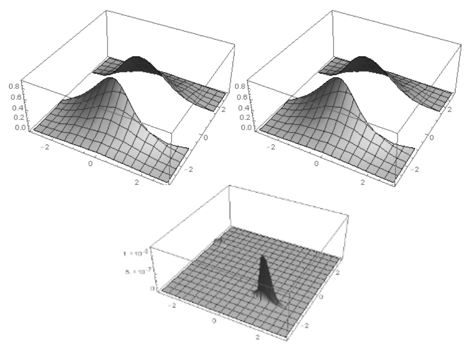

Рис. 2. Результати обчислювального експерименту на систему смуг із криволінійними границями

Останній обчислювальний експеримент було проведено для такої ж поверхні на системі смуг, що описуються наступним чином:

$$x^2+y^2<1+0.1\cos(10\arctan(x,y))\ ,$$

$$x^2+y^2>4+\sin(10\arctan(x,y))\ .$$

На рис.3 наведено зображення поверхні на отриманій системі смуг, результат відновлення поверхні операторами інтерстріпації в полярних координатах та похибка наближення.

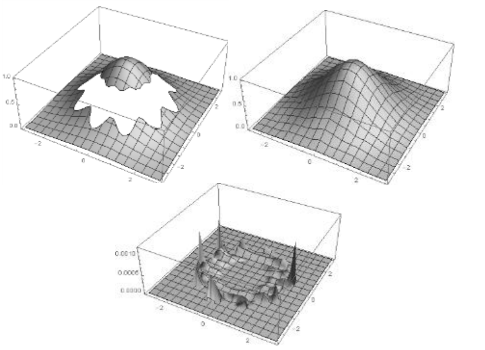

Рис. 3. Результати обчислювального експерименту на систему смуг із замнутим контуром

Висновки

В даній роботі наведено деякі математичні моделі поверхонь із використанням різних операторів інтерстріпації неперервних функцій двох змінних, а саме операторів інтерстріпації для смуг границі яких описуються: прямими, паралельними осям координат; прямими, розташованими під довільним кутом; криволінійними функціями; замкнутими контурами. Проведено низку обчислювальних експериментів для поверхонь, з яких видалялися смуги різної форми та відновлювалися наведеними в роботі методами.

Побудовані в роботі математичні моделі, методи та алгоритми можуть бути використані для обробки архівних даних у вигляді знімків, даних сейсмічної томографії, комп'ютерної томографії, рентгенографії, аерокосмічної зйомки, радіолокаторів бокового огляду тощо. При цьому функції, що описують поверхню можуть являти собою інтенсивність освітлення поверхні в кожній точці поверхні, рівнем радіоактивності тощо.

Література References

[1] Литвин О.М., Матвєєва С.Ю., Межуєв В.І. Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації. Управляющие системы и машины. 2010. № 3. С. 33–47.

[2] Литвин О.М., Матвєєва С.Ю. Метод відновлення поверхні між смугами за допомогою інформації про поверхню на взаємоперпендикулярних смугах. Управляющие системы и машины. 2011. № 1. С. 33–41.

[3] Литвин О.М., Матвєєва С.Ю. Інтерстріпація функцій двох змінних на системі перетенних смуг. Управляющие системы и машины. 2013. № 2. С. 33–41.

[4] Литвин О.Н., Матвеева С.Ю. Обработка аэрокосмических снимков с помощью интерстрипация функций двух переменных. Проблемы управления и информатики. 2013. № 2. С. 111–124.

[5] Литвин О.М., Литвин О.О., Лісний Г.Д., Славік О.В. Новий метод відновлення зображень в зонах відсутності попіксельної інформації. Управляющие системы и машины. 2017. № 1. С. 46–58.

[6] Литвин О.М., Литвин О.О., Лісний Г.Д., Славік О.В. Відновлення зображень в зонах відсутності попіксельної інформації з використанням інтерстріпації функцій. Біоніка інтелекту. 2016. № 2. С. 88–93.

[7] Литвин О.М., Славік О.В. Наближення функцій двох змінних за допомогою їх слідів на системі перетинних смуг, розташованих під довільним кутом. Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. 2016. № 2. С. 175–182.

[8] Lytvyn O.M., Lytvyn O.O., Slavik O.V. Generalized Interstripation of Functions of Two Variables. Cybernetics and System Analysis. 2018. Vol.54 № 3. P. 465–475.