

ХАОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Введение

Параметрические явления в активной среде привлекают внимание в течение длительного времени в связи с преобразованием электромагнитных волн при изменении во времени параметров среды. Особый интерес вызывают преобразования в случае, когда их основные свойства могут быть выявлены точно, например в случае закона изменения параметров, допускающего точное построение решения соответствующей электродинамической задачи. В данной статье рассмотрено преобразование электромагнитной волны в среде, параметры которой подвергаются изменению в виде конечного пакета прямоугольных импульсов.

Такая модельная система позволяет провести точное исследование процесса. Если начальное поле есть плоская монохроматическая волна и модуляция производится в форме прямоугольных импульсов, то задача имеет точное аналитическое решение, которое описывает временной процесс преобразования волны в течение конечного пакета импульсов модуляции. Так как при модуляции диэлектрическая проницаемость изменяется скачком от первичного значения до нового и обратно, то процесс преобразования состоит из последовательного повторения известного эффекта [1] расщепления каждой волны на пару волн на каждом скачке диэлектрической проницаемости. Эти волны распространяются в противоположных направлениях, их частоты изменяются скачками периодически от первичного значения до нового и обратно, а амплитуды подвергаются сложному преобразованию при увеличении числа скачков диэлектрической проницаемости [2]. В данной работе показано, что хотя эти волны и являются решениями линейных электродинамических (волновых) уравнений, правда, с переменными коэффициентами, регулярность преобразования некоторых их характеристик, оцениваемая как индексом Херста [3], так и показателем Ляпунова [4], может нарушаться и даже приобретать черты динамического хаоса [5]. Общепринятым же считается, что хаотическая динамика и хаотические характеристики присущи только нелинейным системам. Очевидно, рассматриваемая в данной работе линейная задача имеет хаотические решения для некоторых характеристик потому, что сами эти характеристики являются нелинейными.

Точное решение задачи о преобразовании волны при модуляции среды

Рассмотрим неограниченную диэлектрическую среду, диэлектрическая проницаемость и проводимость которой модулируются, начиная с нулевого момента времени, согласно закону конечного пакета N прямоугольных периодических импульсов:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon + (\varepsilon_1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^N \{ \theta(t - (k-1)T) - \theta(t - T_1 - (k-1)T) \}, \\ \sigma(t) &= \sigma_1 \sum_{k=1}^N \{ \theta(t - (k-1)T) - \theta(t - T_1 - (k-1)T) \}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь, $\theta(t)$ – единичная функция Хевисайда, T – длительность интервала изменения параметров, T_1 – длительность интервала возмущения, на котором диэлектрическая проницаемость и проводимость принимают новые значения ε_1 и σ_1 . В дальнейшем мы нормируем все временные переменные на частоту ω первичной волны, $t \rightarrow \omega t$. Эта волна существует до нулевого момента времени, момента начала модуляции, и задается функцией $E_0(t, x) = \exp[i(t - kx)]$. Каждый скачок свойств среды изменяет электромагнитное поле, которое мы будем описывать функциями E_n на интервале возмущения и F_n на интервале покоя.

После начала модуляции интервалом возмущения первичная волна, в соответствии с известным эффектом [1], расщепляется на две волны, прямую и обратную,

$E_1 = \exp(-st - ikx) [C_1 \exp(iq t) + D_1 \exp(-iq t)]$ с новыми амплитудами и новой частотой $\omega_1 = (\varepsilon \omega^2 / \varepsilon_1 - (\sigma_1 / \varepsilon_0 \varepsilon)^2)^{\frac{1}{2}}$, нормированное значение которой $q = (a^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}$, где $a^2 = \varepsilon / \varepsilon_1$, $s = \sigma_1 / \omega \varepsilon_0 \varepsilon$, и ε_0 диэлектрическая постоянная вакуума. На оставшемся невозмущенном интервале первого периода модуляции расщепление поля на две волны остается $F_1 = \exp(-ik) [A_1 \exp(it) + B_1 \exp(-it)]$, однако частота возвращается к первичному значению (нормированное значение равно единице).

Поле на других интервалах возмущения также состоит из двух волн, прямой и обратной, $E_n = \exp(-st - ikx) [C_n \exp(iq t) + D_n \exp(-iq t)]$ с измененной частотой. На интервалах покоя прямая и обратная волны имеют частоту первичной волны

$$F_n = \exp(-ikx) [A_n \exp(it) + B_n \exp(-it)].$$

Выражения для амплитуд прямой и обратной вторичных волн даны в [2, 6], где также показано, что соотношения между этими амплитудами определяется следующими отношениями («временными» коэффициентами отражения):

на интервале возмущения

$$w_N = \frac{D_N}{C_N} e^{-i2(N-1)qT} = \frac{\{p_2 + (p_1 - p_2)r_{N-1}\}\alpha_{21} + p_1 p_2 \alpha_{22}}{\{p_2 + (p_1 - p_2)r_{N-1}\}\varepsilon_{11} + p_1 p_2 \alpha_{12}}; \quad (2)$$

на интервале покоя

$$p_N = \frac{B_N}{A_N} e^{-i2NT} = \frac{p_1 p_2}{p_2 + (p_1 - p_2)r_N}, \quad N \geq 2. \quad (3)$$

Здесь, $p_1 = -h/m$, $p_2 = -h(m + m^*)/(hh^* + m^2)$, $A_1 = m \exp(-iT)$, $B_1 = -h \exp(iT)$, $\alpha_{11} = q + 1 + is$, $\alpha_{12} = q - 1 + is$, $\alpha_{21} = q - 1 - is$, $\alpha_{22} = q + 1 - is$, и

$$m = \frac{1}{2q} [2q \cos(qT_1) + i(a^2 + 1) \sin(qT_1)] \times \exp[-sT_1 + i(T - T_1)]. \quad (4)$$

$$h = i \frac{1}{2q} (a^2 - 1 - i2s) \sin(qT_1) \exp[-sT_1 - i(T - T_1)]. \quad (5)$$

Как следует из формул (2), (3) поведение отношений w_N и p_N между амплитудами прямой и обратной волн контролируется последовательностью

$$r_{N-1} = 4u^2 / (4u^2 - r_N). \quad (6)$$

Поведение последней определяется обобщенным параметром

$$u = \cos(qT_1) \cos(T - T_1) - \frac{a^2 + 1}{2q} \sin(qT_1) \sin(T - T_1). \quad (7)$$

На рис. 1 показана диаграмма Ламерея для контролирующей последовательности: u – для обобщенного параметра $|u| > 1$; b – для $|u| < 1$ (здесь $b = 4u^2$).

В случае, когда параметр $|u| > 1$, последовательность r_N , а следовательно, и «временные» коэффициенты отражения, имеют регулярный характер поведения при увеличении числа циклов модуляции, (рис. 1, а). В противоположном случае, когда $|u| < 1$, последовательность, как и временные коэффициенты отражения, имеет нерегулярное поведение. Оно выражается в том, что имеются длинные интервалы в последовательности циклов модуляции, в которых r_N изменяется почти регулярно, после которых появляются сравнительно короткие интервалы сильно нерегулярного поведения r_N , (рис. 1, б).

Чем меньше $|u|$ по сравнению с единицей, тем более нерегулярное поведение r_N . Это явление может быть названо «квази-перемежаемостью»

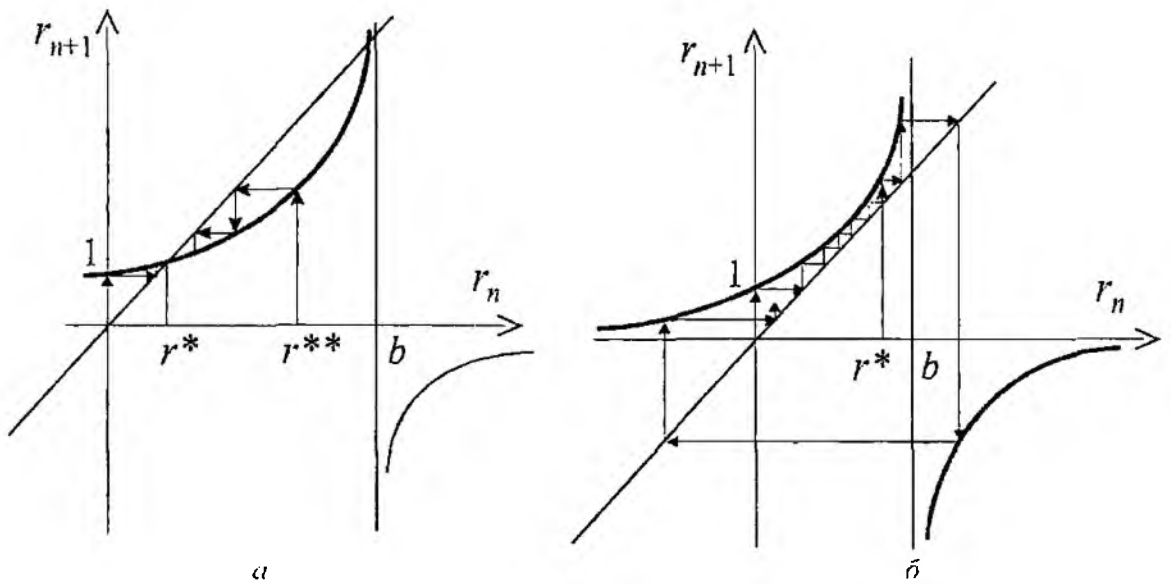


Рис. 1

Квази-перемежаемость и индекс Херста

Наличие квази-перемежаемости может быть подтверждено с помощью метода Херста [3], согласно которому поведение временного ряда r_n характеризуется индексом Херста H , определяемого как асимптотическое значение функции

$$H \sim \ln(R_n / S_n) / \ln n. \quad (8)$$

Здесь $R_n = \max_{1 \leq k \leq n} X(k, n) - \min_{1 \leq k \leq n} X(k, n)$.

$$X(k, n) = \sum_{i=1}^k (r_i - \langle r \rangle_n),$$

$$\langle r \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i, \quad S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \langle r \rangle_n)^2}. \quad (9)$$

Для белого шума (полностью некоррелированного сигнала) этот индекс $H = 0.5$. Значение $H > 0.5$ ($H < 0.5$) ассоциируется с долговременными корреляциями, когда временной ряд удерживает тенденцию (антитенденцию).

Рис. 2, показывающий зависимость индекса Херста от длительности интервала возмущения периода модуляции, иллюстрирует хорошую корреляцию этого индекса с обобщенным параметром u . Там, где $|u| < 1$, индекс Херста в среднем равен 0.5, что соответствует хаотическому поведению.

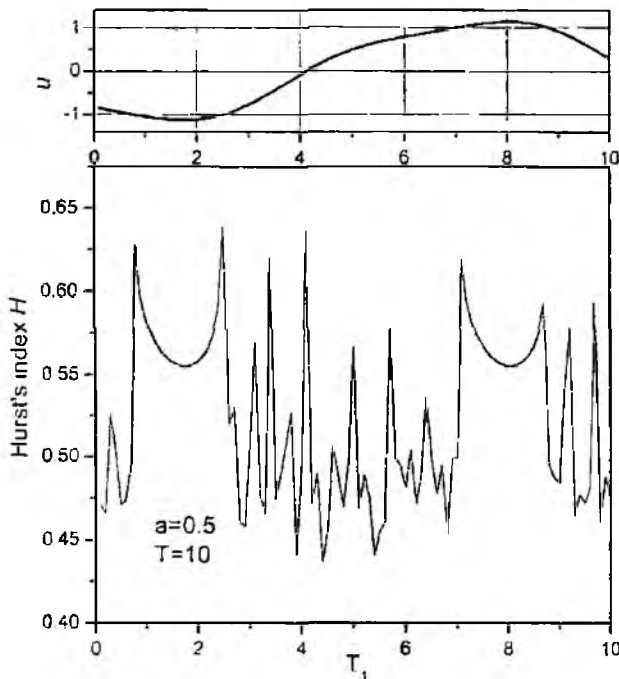


Рис. 2

Нерегулярность поведения и непрерывная дробь

Качественный анализ поведения последовательности (б) может быть также проведен с помощью теории непрерывных дробей [7]. Действительно, эта последовательность представляет собой непрерывную (цепную) дробь.

$$r_{n+1} = \frac{b}{b - r_n}, \quad (10)$$

где $b = 4u^2$ – положительный параметр.

Однако данное рекуррентное соотношение отличается от классической цепной дроби тем, что знаменатель данной дроби содержит разность, а не сумму чисел b и r_n . Из-за этого подходящие дроби $\frac{p_n}{q_n} \approx r_n$ для данной цепной дроби (10) могут быть как положительными,

так и отрицательными. При этом закон изменения значений, которые могут принимать последующие подходящие дроби при различных значениях параметра b , в общем случае установить очень трудно. Все это осложняется еще и тем, что для исследования поведения данной цепной дроби классические методы неприменимы.

Однако характер поведения такой дроби определяется величиной параметра b , что наглядно демонстрируется с помощью диаграммы Ламерея, рис. 1. В случае $b > 4$, цепная дробь (10) монотонно сходится к точке r^* пересечения гиперболы с биссектрисой первого координатного угла, рис. 1, а. При этом если $r_0 < r^*$ или $r_0 > r^{**}$, дроби возрастают, если $r^* < r_0 < r^{**}$, то дроби убывают.

В случае $0 < b < 4$ цепная дробь (10) имеет нерегулярное поведение, рис. 1, б. В этом случае большие интервалы, на которых цепная дробь (10) изменяется почти регулярно, перемежаются с относительно малыми интервалами сильно нерегулярного поведения дроби. При $n \rightarrow \infty$ цепная дробь не имеет предела.

Рассмотрим, как проявляется такой ход изменения цепной дроби на характере поведения подходящих дробей. Согласно закону образования подходящих дробей для цепной дроби, который легко доказывается с помощью метода математической индукции, числитель (10) p_n и знаменатель q_n подходящей дроби порядка n удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} p_n &= b(p_{n-1} - p_{n-2}), \\ q_n &= b(q_{n-1} - q_{n-2}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $p_1 = b$, $q_1 = b$, $n \geq 2$.

Используя эти соотношения легко найти разность между подходящими дробями, которая изменяется с увеличением номера как

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{b^n}{q_n q_{n-1}}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что для расходимости цепной дроби (2) при $b < 1$ необходимо, чтобы $q_n q_{n-1} \rightarrow 0$, причем $q_n q_{n-1}$ должна быть бесконечно малой величиной такого же или большего порядка, чем b^n . Если $1 < b < 4$ и $q_n q_{n-1}$ ограничена, то разность подходящих дробей стремится к бесконечности. Так как $|u| = \sqrt{b/4}$, то отсюда следует, что, по крайней мере для $\frac{1}{2} < u < 1$, поведение последовательности (6) становится нерегулярным. При $b > 4$ ($u > 1$) цепная дробь, а следовательно, и последовательность (6) имеют регулярное поведение.

Показатель Ляпунова

Более точно характер поведения последовательности (6) определяется показателем Ляпунова. Получим аналитическую оценку показателя Ляпунова следуя [4]. Для этого рассмотрим две близкие траектории r_n и $r'_n = r_n + \tilde{r}_n$ рекуррентного отображения $r_{n+1} = f(r_n)$, где функция $f(r_n)$ в данном случае задается формулой (10). Разложив $f(r_n)$ по формуле Тейлора

$$r_{n+1} = r_{n+1} + \tilde{r}_{n+1} = f(r_n) + A_1 \tilde{r}_n + A_2 \tilde{r}_n^2 + \dots, \quad (13)$$

где $A_1 = \partial f / \partial r|_{r=\bar{r}_n} = b / (b - x_n)^2$, найдем

$$\bar{r}_{n+1} = A_1 \bar{r}_n = a \bar{r}_n / (b - r_n)^2. \quad (14)$$

Последовательно вычисляя рекуррентные значения в (14), получим формулу

$$\bar{r}_{n+1} = \bar{r}_1 / (b^n + B_1 b^{n-1} + \dots + B_{n-1}), \quad (15)$$

где B_i некоторые коэффициенты, не зависящие от b .

Из (15) следует, что, по крайней мере, при $b > 1$.

$$\bar{r}_{n+1} = \frac{\bar{r}_1}{a^n (1 + B_1 b^{-1} + \dots + B_{n-1} b^{1-n})} \approx \frac{\bar{r}_1}{b^n}. \quad (16)$$

Показатель Ляпунова определяется по эволюции малого возмущения в линейном приближении (13) как

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\bar{r}_n\|. \quad (17)$$

Подставляя сюда \bar{r}_n из (16), получим

$$\Lambda \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\bar{r}_1 / b^{n-1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \|\bar{r}_1\| / n - \frac{n-1}{n} \ln \|b\| \right) = -\ln \|b\|. \quad (18)$$

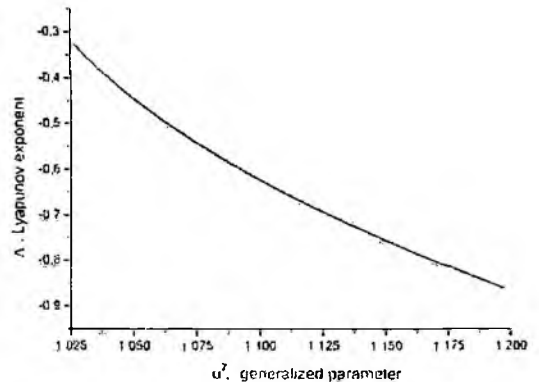
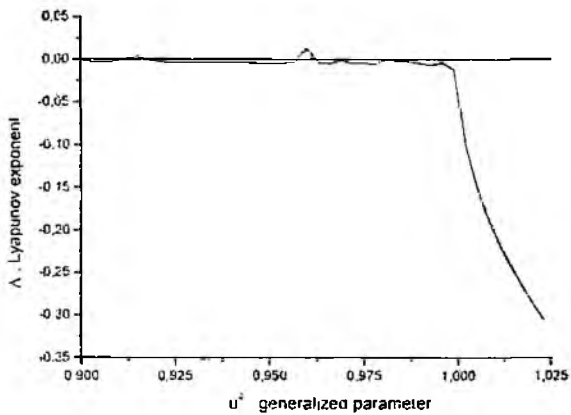
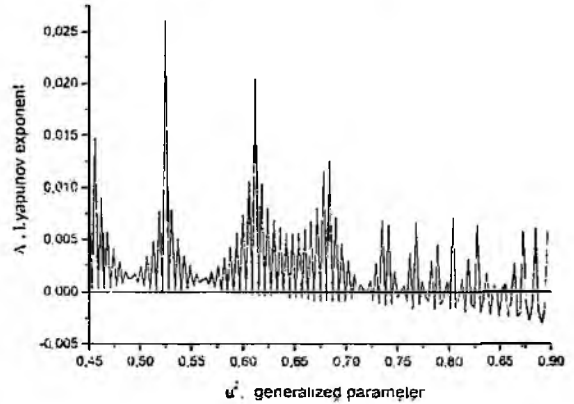
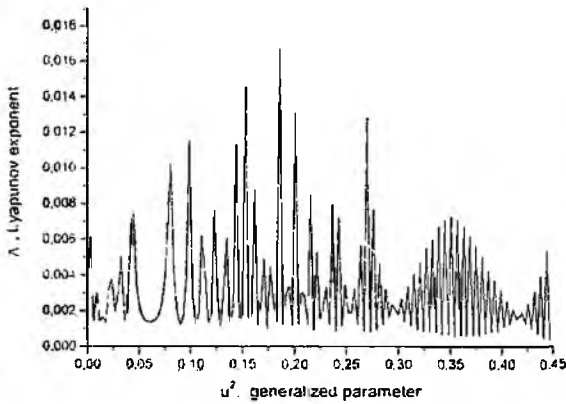


Рис. 3

Таким образом, если $b > 1$, то показатель Ляпунова отрицательный, что частично согласуется с выводами анализа формулы (12), полученной для подходящих цепных дробей. Однако эти выводы не категоричны, т.е. для того, чтобы они были справедливы, необходимо, чтобы величина $q_n q_{n-1}$ в (12) была ограничена, что может и не выполняться. К тому же, оценка (16) тоже не строгая. Если же допустить эту оценку справедливой и при $b \leq 1$, то это дает положительные значения показателя Ляпунова, то есть нерегулярное поведение.

Проведенный анализ подтверждается прямым численным расчетом показателя Ляпунова по формуле (17), согласно которому значения этого показателя являются положительными вплоть до значений $u < 0.6$. Как видно из рис. 3, множество интервалов положительных и отрицательных значений показателя Ляпунова, т.е. множество интервалов хаотического и нехаотического поведения, чередуются в области значений параметра $\sim 0,6 < u < 1,0$. При $u > 1,0$ показатель Ляпунова становится определенно отрицательным и поведение волн строго регулярным.

Выводы

1. Точный анализ преобразования некоторых характеристик электромагнитного поля при модуляции среды показывает, что их временной ход может иметь монотонный, немонотонный, но регулярный, и существенно нерегулярный характер в зависимости от величины обобщенного параметра задачи, для которого получено точное выражение. В последнем случае нерегулярность имеет форму динамического хаоса, что наглядно подтверждается диаграммой Ламерея. Хаотический характер подтверждается также расчетом таких характеристик, как индекс Херста и показатель Ляпунова, а также поведением непрерывных дробей. Показано, что уменьшение выделенного обобщенного параметра ведет к ситуации, когда индекс Херста принимает величины, соответствующие белому шуму, а показатель Ляпунова становится положительным, что соответствует динамическому хаосу.

2. Хаотическая динамика в такой линейной системе может отражать тот факт, что имеются характеристики процесса, которые сами подчиняются нелинейным уравнениям. Исследование таких характеристик позволяет выявить неизвестные черты в таких системах, что может быть полезным для их лучшего и более полного понимания.

Список литературы: 1. *Morgenthaler F R. Velocity modulation of electromagnetic waves // IRE Trans on Microwave Theory and Techniques, 1958, April, pp.167-172.* 2. *Nerukh A G Intermittency of electromagnetic waves in a regular time-varying medium // J.Phys. D: Applied Physics, Vol. 32, 1999. pp. 2006-2013.* 3. *Hurst H E, Black R P and Simaika Y M, 1965 Long-Term Storage: An Experimental Study (London: Constable)* 4. *Кузнецов С.П. Динамический хаос. М., 2000. 295с.* 5. *Hilborn R C Chaos and nonlinear Dynamics. Oxford University, Press, 2000.* 6. *Ruzhytska N.N., Nerukh A G, Nerukh D A. Accurate modelling of pulse transformation by adjustable-in-time medium parameters // Optical and Quantum Electronics, Vol. 35, No. 4, pp. 347-364, Apr 2003.* 7. *Хинчин А.Я. Цепные дроби. М., 1978.*

Харьковский национальный
университет радиозлектроники

Поступила в редколлегию 10.12.2007