

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ ПО ЛІНІЙНІЙ ДІЛЯНЦІ ГАЗОГОНУ З АКТИВНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Євдокімов О.А., Гусарова І.Г.

e-mail: oleksii.ievdokimov@nure.ua, iryna.husarova@nure.ua

Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики

м. Харків, Україна

The problem of numerical modelling of nonstationary non-isothermal gas flow regimes in gas transmission systems with active elements is considered. The mathematical model is represented as a system of partial differential equations and algebraic relations. The system accounts for mass flow rate, pressure, and temperature dynamics along the pipeline. To solve the non-linear system of finite-difference equations, an implicit scheme combined with Newton's iterative method is applied, which ensures computational stability and convergence. The results can be used for forecasting flow dynamics, analysing emergency situations, and optimizing control parameters of compressor stations.

Робота компресорних станцій (КС), як активних елементів газотранспортної системи, супроводжується різкими градієнтами тиску та витрати газу, що створює значні нелінійності в математичних моделях (ММ). Традиційні лінеаризовані або модифіковані ітераційні схеми в умовах таких перехідних процесів часто втрачають стійкість та точність. Застосування модифікованих методів Ньютона з нерегулярним оновленням матриці Якобі скорочує обчислювальні витрати, але знижує якість опису процесів, які відбуваються на КС. Тому розробка чисельного підходу для розрахунку перехідних режимів по ділянці газогону з активними елементами, що забезпечує квадратичну швидкість збіжності та стабільність розрахунку, є актуальною задачею.

Дана робота спрямована на вирішення цієї проблеми шляхом впровадження класичного методу Ньютона, що враховує характеристики компресорних станцій безпосередньо в структурі матриці Якобі. Розглядається лінійна ділянка газогону, яка складається з КС та ділянки трубопроводу (ДТ).

Було обрано модель газоперекачувального агрегату з узагальненими характеристиками як математичну модель КС:

$$P_2^{KC}(t) = \varepsilon P_1^{KC}(t), \quad (1)$$

$$T_2^{KC}(t) = \varepsilon^{\frac{m-1}{m}} T_1^{KC}(t), \quad (2)$$

де $P_1^{KC}(t)$, $T_1^{KC}(t)$ – тиск та температура газу на початку КС, $P_2^{KC}(t)$, $T_2^{KC}(t)$ – тиск та температура газу наприкінці КС, t – часова координата, ε , m – ступінь стискування та показник політропи.

Математична модель нестационарних режимів течії газу по ДТ, що являє собою циліндричну трубу постійного діаметра довжини L , описується квазілінійною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних [1]. Однак враховуючи структуру лінійної ДТ оберемо інші визначальні параметри: масову витрату $G(x,t)$, тиск $P(x,t)$, температуру $T(x,t)$. Тоді ММ матиме вигляд [2]

$$\frac{\partial G}{\partial t} + 2\alpha T \frac{G}{P} \frac{\partial G}{\partial x} + \left(S - \alpha T \frac{G^2}{P^2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \alpha T G |G|}{2DP} + \frac{gP}{\alpha T} \frac{dh}{dx} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha T \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha(\gamma - 1) \frac{T^2}{P} \frac{\partial G}{\partial x} + \alpha \gamma T \frac{G}{P} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{4K}{D}(\gamma - 1) \frac{T}{P} (T - T_{cp}) + \\ + (\gamma - 1) g \frac{GP}{ST} \frac{dh}{dx} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

де x – просторова координата, λ – коефіцієнт гідравлічного супротиву, D , S – діаметр та площа поперечного перерізу труби, T_{cp} , h – температура ґрунту та глибина залягання труби, $\alpha = \frac{zgR}{S}$, $\gamma = \frac{C_p}{C_p - zgR}$, R , C_p – газова стала та питома теплоємність газу.

Системи (1) – (2) та (3) – (5) пов'язані умовами узгодження у проміжному вузлі між компресорною станцією і ділянкою трубопроводу [2]

$$P_2^{KC}(t) = P(0,t), \quad (6)$$

$$T_2^{KC}(t) = T(0,t), \quad (7)$$

$$G^{KC}(t) = G(0,t). \quad (8)$$

Система рівнянь (1) – (8) доповнюється крайовими умовами [2]

$$P_1^{KC}(t) = P^{zad}(t), T_1^{KC}(t) = T^{zad}(t), G(L,t) = G^{zad}(t), \quad (9)$$

де $P^{zad}(t)$, $T^{zad}(t)$, $G^{zad}(t)$ – задані функції, та початковим розподілом.

Системи взаємопов'язаних рівнянь (1) – (8) з заданим початковим розподілом та крайовими умовами (9) розв'язано чисельне за допомогою методу скінчених різниць з використанням неявної скінченно-різницевої схеми, яка має перший порядок по часовій змінній та другий – по просторовій. Отримано в результаті нелінійну систему скінченно-різницевих алгебраїчних рівнянь.

Для розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь використано метод Ньютона. На кожному часовому кроці k ітераційний процес для визначення вектору невідомих параметрів $\phi^{k,s+1}$ будується на основі використання методу Ньютона:

$$A^{k,s} \delta \xi^{k,s+1} = \psi^{k,s}, \quad (10)$$

$$A^{k,s} = \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial \xi^k} \right]_{\xi^{k,s}},$$

де $\delta \xi^{k,s+1}$ – вектор поправок до невідомих на $(s+1)$ -й ітерації k -го часового шару, $\Psi^{k,s}$ – вектор нев’язок, визначений на розв’язку, що отримали на попередній s -й ітерації k -го часового шару, $A^{k,s}$ – матриця Якобі, яка визначена на розв’язку, отриманому на попередній s -й ітерації.

Так для k -го часового шару s -ої ітерації вектори нев’язок в граничних точках 0 та n матимуть вид:

$$\begin{aligned} \Psi_0^{k,s} &= \frac{1}{\Delta} \hat{B}_0^{k,s} \xi_1^{k,s} + \left(\frac{1}{\tau} \xi_0^{k,s} - \frac{1}{\Delta} \hat{B}_0^{k,s} \xi_0^{k,s} \right) - \frac{1}{\tau} \xi_0^{k-1} - \hat{\Phi}_0^{k,s}, \\ \Psi_n^{k,s} &= -\frac{1}{\Delta} \hat{B}_n^{k,s} \xi_{n-1}^{k,s} + \left(\frac{1}{\tau} \xi_n^{k,s} + \frac{1}{\Delta} \hat{B}_n^{k,s} \xi_n^{k,s} \right) - \frac{1}{\tau} \xi_n^{k-1} - \hat{\Phi}_n^{k,s}. \end{aligned}$$

Вектори нев’язок на s -й ітерації k -го часового шару для внутрішніх точок ділянки $(i = \overline{1, n-1})$ мають вид:

$$\Psi_i^{k,s} = \frac{1}{2\Delta} \hat{B}_i^{k,s} \xi_{i+1}^{k,s} - \frac{1}{2\Delta} \hat{B}_i^{k,s} \xi_{i-1}^{k,s} + \frac{1}{\tau} \xi_i^{k,s} - \hat{\Phi}_i^{k,s} - \frac{1}{\tau} \xi_i^{k-1}.$$

Рівняння (1) – (2) лінеаризуються й враховуються в другому та третьому рівняннях системи (10) з залученням умов (6) – (9).

Оновлення стану системи виконується згідно з виразом:

$$\xi^{k,s+1} = \xi^{k,s} - \delta \xi^{k,s+1}.$$

Ітераційний процес триває до виконання умови заданої точності.

Таким чином, запропоновано послідовну інтеграцію рівнянь ММ активних елементів безпосередньо в структуру матриці Якобі. Це дозволяє врахувати вплив активних елементів при чисельному моделюванні нестационарних неізотермічних процесів течії газу.

Представлені математична модель та чисельний метод є основою для створення високонадійних програмних інструментів прогнозування перехідних процесів у реальному часі та проведення аналізу поведінки системи в аварійних або нештатних режимах.

Список використаних джерел:

1. Husarova I. H., Tevyashev A. D., Tevyasheva O. A. Mathematical modeling of non-stationary gas flow modes along a linear section of a gas transmission system. *Mathematical Modeling and Computing*. 2022. Vol. 9, no. 2. P. 416–430. DOI: 10.23939/mmc2022.02.416.
2. Гусарова І. Г., Євдокімов О. А. Математична модель нестационарних режимів по лінійній ділянці трубопроводу з активними елементами. *29-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»* : зб. матеріалів форуму. Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2025. С. 233–234.