УДК 62.506.2

Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р. техн. наук, *В. Я. СЕРДЮЧЕНКО*, канд. техн. наук, *В. А. ГРАБИНА*, канд. техн. наук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНДУКТИВНОГО ЦВЕТОВОГО КОНТРАСТА

Явление индуктивного цветового контраста зрения человека заключается в изменении цвета некоторого участка изображения под воздействием окружающего фона. Это явление существенно влияет на восприятие всей зрительной картины. Закономерности функционирования зрительной системы при индуктивном цветовом контрасте можно использовать в цветном телевидении, кинотехнике, полиграфии, при разработке приборов, воспринимающих цветные точки в различных условиях освещения (например, в системах ориентации) и т. д.

Это свойство зрения описано многими исследователями [1—4]. Большое число экспериментальных данных позволило заключить, что цвет тестового поля «сдвигается» под влиянием фона в сторону цвета, дополнительного к цвету фона. Однако более точные опыты показали, что цвет, индуктированный фоном, отличается от дополнительного по цветовому тону на 10—40 *ммк* в сторону меньших длин волн для синих и в сторону больших — для голубых и желто-оранжевых излучений.

Эффект цветовой индукции зависит от многих факторов: насыщенности фона, его размеров, яркости, длины волны, излучения, адекватных раздражителей и т. д. Был разработан ряд математических моделей, описывающих влияние отдельных факторов на изменение цвета тестового поля [5—8]. Анализ этих моделей показывает, с одной стороны, сложность процессов, лежащих в основе явлений цветовой индукции, с другой — необходимость их дальнейшего изучения для выяснения законов функционирования отдельных механизмов органа зрения и установления некоторых более общих закономерностей, связанных с различными индуктивными взаимодействиями в организме человека.

В настоящей работе ставится задача построить математическую модель цветовой индукции зрения на основе анализа по нуль-методу психофизических реакций зрительной системы человека. Для этого применяется дедуктивный метод: вначале формулируются требования, которым должна удовлетворять функция, осуществляющая преобразование зрительных картин в зрительные ощущения. Эти требования представляют собой математические утверждения (аксиомы), справедливость которых установлена в эксперименте. Затем, основываясь исключительно на этих аксиомах, определяется искомый вид функции.

В работе [9, с. 40] изложена методика построения модели исследуемого свойства зрения, согласно которой испытуемый рассматривается как система, реализующая функцию

$$y=\Phi(B_1, B_2), \tag{1}$$

где B_1, B_2 — входные сигналы органа зрения, представляющие собой распределение спектра излучения в каждой точке поля зрения $B=B(\lambda, x, y)$; λ — длина волны световых колебаний; x, y — координаты поля зрения. Совокупность функций $B(\lambda, x, y)$ образует множество M; y — ответы испытуемого («0» или «1») после сравнения по некоторому признаку двух зрительных картин B_1 и B_2.

Функция Φ может быть представлена в виде

$$y=\Phi(B_1, B_2)=I\,[F(B_1),\ F(B_2)], \tag{2}$$

если она обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности:

$$\begin{gathered}\text{а) } \Phi(B, B)=1 \text{ (рефлексивность);}\\ \text{б) если } \Phi(B_1, B_2)=1, \text{ то } \Phi(B_2, B_1)=1\\ \text{(симметричность);}\\ \text{в) если } \Phi(B_1, B_2)=1 \text{ и } \Phi(B_2, B_3), \text{ то } \Phi(B_1, B_3)=1\\ \text{(транзитивность).}\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь F — функция, вид которой будет определен в дальнейшем; I — функция сравнения, определяемая условиями

$$I(S_1, S_2)=\begin{cases}1, & \text{если } S_1=S_2,\\ 0, & \text{если } S_2\neq S_1,\end{cases} \tag{4}$$

где $S_1=F(B_1)$; $S_2=F(B_2)$.

При исследовании индуктивных свойств зрения условия (3) интерпретируются следующим образом. Представим себе экспериментальную ситуацию, когда испытуемому предъявляются два поля сравнения, на одном из которых сформирована зрительная картина $B_1(\lambda, x, y)$, на другом — $B_2(\lambda, x, y)$. Выберем на каждой из них произвольную точку с координатами (x_0, y_0) и предложим испытуемому сравнить цвета этих точек (на полное колориметрическое равенство). При равенстве цветов следует ответ «да», при неравенстве — ответ «нет». Условимся факт равенства цветов обозначать выражением $\Phi(B_1, B_2)=1$.

Тогда первое из условий (3) означает, что при сравнении двух одинаковых зрительных картин наблюдатель должен ответить «да». Второе из условий (3) означает, что если имеется равенство цветов в точке (x_0, y_0) зрительных картин, сформированных на полях сравнения, то это равенство не нарушится при смене полей сравнения местами. Третье из условий (3) можно рассматривать как равенство цветов в выбранной точке зрительных картин, характеризуемых функциями B_1 и B_3, если при сравнении каждой из них с картиной B_2 в той же точке такое равенство имеет место.

Проведенные опыты показали, что испытуемый демонстрирует в эксперименте поведение, подчиняющееся условиям (3), а это означает, что оно может быть математически описано в виде формул (2), (4). Из свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности следует, что преобразование Ф разбивает множество входных сигналов на попарно непересекающиеся классы [10, с. 16]. Отсюда следует существование функции F, преобразующей функцию B в некоторую функцию S [9, с. 40].

Задача исследования цветовой индукции состоит в определении общего вида функции F, описывающей преобразование зрительной картины в зрительное ощущение, осуществляемое в органе зрения человека, т. е. $S=F(B)$.

Покажем, что в качестве F при определенных условиях работы органа зрения может быть принят линейный оператор. В работе [11, с. 16] приведены две системы свойств преобразования F, выполнение каждой из которых является необходимым и достаточным условием для возможности описания F в виде линейного оператора. Одна из этих систем может быть применена для решения задачи цветовой индукции.

С этой целью воспользуемся тремя аксиомами, характеризующими свойство индуктивного цветового контраста.

Аксиома аддитивности. Если $\Phi(B_1', B_1'')=1$ и $\Phi(B_2', B_2'')=1$,

$$\text{то } \Phi(B_1'+B_2', B_1''+B_2'')=1. \tag{5}$$

Эта аксиома может быть продемонстрирована в эксперименте следующим образом. Возьмем одну пару зрительных картин $B_1'(\lambda, x, y)$ и $B_1''(\lambda, x, y)$. Сравним цвета (на полное колориметрическое равенство) в произвольно выбранных точках с координатами x_0, y_0. При неравенстве цветов изменяем зрительные картины (одну или обе сразу) до тех пор, пока цвета в точках (x_0, y_0) не сравняются. Затем возьмем еще одну пару зрительных картин $B_2'(\lambda, x, y)$ и $B_2''(\lambda, x, y)$ и для них добьемся равенства цветов в тех же точках (хотя цвет точек в этом опыте может отличаться от цвета точек в предыдущем опыте). Теперь, сложив попарно зрительные картины $B_1'+B_2'$ и $B_1''+B_2''$, получим две новые картины и будем сравнивать цвета в выбранных точках (x_0, y_0).

Проведенные эксперименты показывают, что цвета в этих точках одинаковы (без дополнительного изменения зрительных картин после суммирования), что подтверждает достоверность аксиомы аддитивности.

Обозначим через K совокупность всех элементов $B(\lambda, x, y)\in L_2$, допускающих представление $B'(\lambda, x, y)=\mu B(\lambda, x, y)$, где $\mu\geqslant 0$ и $B(\lambda, x, y)\in M$. Опыты также показывают, что реакции испытуемого подчинятся еще одной закономерности.

Аксиома размерности. Существует набор функций $\{e_k\}$, $e_k= =B_k'-B_k''$, B_k', $B_k''\in K$, $k=1, 2, 3$, такой, что для всякой функции найдется единственная совокупность чисел α_k, $k=1, 2, 3$, удовлетворяющая условиям

$$\Phi(B, \sum_k \alpha_k e_k)=1. \tag{6}$$

Эта аксиома в эксперименте может быть продемонстрирована следующим образом. Сформируем на одном поле сравнения произвольную зрительную картину. Кроме того, на полях сравнения предъявим зрительные картины, описываемые функцией $\Sigma\alpha_k e_k = \alpha_1(B_1' - B_1'') + \alpha_2(B_2' - B_2'') + \alpha_3(B_3' - B_3'')$. Для этого на левом поле сформируем изображение вида $\alpha_1 B_1' + \alpha_2 B_2' + \alpha_3 B_3'$, а на правом поле — изображение $\alpha_1 B_1'' + \alpha_2 B_2'' + \alpha_3 B_3''$. Зафиксируем точку (x_0, y_0) и будем добиваться равенства цветов полей сравнения в этой точке. Для этого разрешается на поля сравнения прибавлять или вычитать одинаковые зрительные картины с умножением на числа α_1, α_2, α_3, Аксиома утверждает, что для любой зрительной картины B существует три функции e_1, e_2, e_3, такие, что всегда можно добиться равенства цветов в произвольной точке (x_0, y_0) при единственной совокупности коэффициентов α_1, α_2, α_3.

Под произведением αe подразумевается результат умножения на одном поле сравнения $\alpha B'$ и $\alpha B''$ — на другом. Умножению функции e на коэффициент $-\alpha$ соответствует перемена полей сравнения местами. В частном случае функции B_1', B_2' и B_3' могут быть тождественно равны нулю. Это соответствует колориметрической процедуре выравнивания цвета в точке (x_0, y_0) зрительной картины B с помощью линейной комбинации $\Sigma\alpha_k B_k''$. Известно, что предъявляя изображения B и $\Sigma\alpha_k B_k''$ на разных полях сравнения, не всегда удается достичь такого равенства. В этом случае приходится некоторые из изображений B_k' переносить на другое поле сравнения.

Производя такие опыты, убеждаемся, что всегда можно добиться равенства цветов в точках фиксации при единственной совокупности чисел α_1, α_2, α_3. Предъявление в таких опытах лишь однородных зрительных картин $B(\lambda)$ соответствует хорошо известным колориметрическим экспериментам [12, с. 206], доказывающим трехмерность цветовых ощущений.

Сформулируем аксиому непрерывности. Непрерывному изменению функции $B(\lambda, x, y)$ соответствует непрерывное изменение чисел α_k, существование и единственность которых следует из свойства размерности.

Покажем теперь, что числа α_k являются линейными непрерывными функционалами на K. Для этого достаточно показать, что они аддитивны и непрерывны [13, с. 175]. Возьмем $B_1, B_2 \in K$. В соответствии с аксиомой размерности для этих зрительных картин всегда можно подобрать числа α_1, α_2, α_3 такие, что будут иметь место равенства цветов в некоторой точке на полях сравнения, т. е. $\Phi[B_1, \sum_k \alpha_k(B_1)e_k] = 1$, $\Phi[B_2, \sum_k \alpha_k(B_2)e_k] = 1$. На основании аксиомы аддитивности

$$\Phi(B_1 + B_2, \sum_k [\alpha_k(B_1) + \alpha_k(B_2)]e_k) = 1. \tag{7}$$

Кроме того, для зрительной картины $B = B_1 + B_2$, согласно аксиоме размерности, справедливо равенство

$$\Phi[B, \sum_k \alpha_k(B) e_k] = 1. \tag{8}$$

В силу единственности наборов $\{\alpha_k\}$ имеем

$$\alpha_k(B) = \alpha_k(B_1) + \alpha_k(B_2),\ k = 1,\ 2,\ 3. \tag{9}$$

Таким образом, функционалы α_k аддитивны. Непрерывность этих функционалов непосредственно вытекает из аксиомы непрерывности, следовательно, α_k — линейные функционалы на K. Но конус K — воспроизводящий, т. е. всякий элемент $B \in L_2$ может быть представлен в виде разности $B = B' - B''$, где $B',\ B'' \in K$. Поэтому $\alpha_k(B)$ единственным образом продолжаются как линейные функционалы на все пространство.

Согласно теореме Фреше — Рисса [14] об общем виде линейного функционала в L_2 имеем

$$\alpha_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \iint_{-\infty}^{\infty} B(\lambda, x, y) K_1(\lambda, x, y)\, d\lambda\, dx dy;$$

$$\alpha_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \iint_{-\infty}^{\infty} B(\lambda, x, y) K_2(\lambda, x, y)\, d\lambda\, dx\, dy; \tag{10}$$

$$\alpha_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \iint_{-\infty}^{\infty} B(\lambda, x, y) K_3(\lambda, x, y)\, d\lambda\, dx\, dy.$$

Здесь K_1 K_2, K_3 — некоторые фиксированные функции, принадлежащие L_2.

Можно показать, что функции K_1, K_2, K_3 линейно независимы. Воспользуемся доказательством от противного. Предположим, что они линейно зависимы, т. е. одну из них можно выразить в виде линейной комбинации остальных. Например, пусть

$$K_3(\lambda, x, y) = a_1 K_1(\lambda, x, y) + a_2 K_2(\lambda, x, y), \tag{11}$$

где a_1, a_2 — некоторые фиксированные вещественные числа.

Подставим уравнение (11) в последнее из равенств (10):

$$\alpha_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \iint_{-\infty}^{\infty} B(\lambda, x, y)\, (a_1 K_1(\lambda, x, y) + a_2 K_2(\lambda, x, y)\, d\lambda\, dx\, dy =$$

$$= a_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \iint_{-\infty}^{\infty} B(\lambda, x, y) K_1(\lambda, x, y)\, d\lambda\, dx\, dy + a_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \iint_{-\infty}^{\infty} B(\lambda, x, y) K_2 \times$$

$$\times (\lambda, x, y)\, d\lambda\, dx\, dy. \tag{12}$$

Используя первое и второе равенства системы (10), переписываем уравнение (12) в виде

$$\alpha_3 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2. \quad (13)$$

Таким образом, для любой функции B число α_3 однозначно определяется числами α_1 и α_2 по формуле (13). Если, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то должно быть также $\alpha_3 = 0$. Однако это не так, поскольку для функции $B = \alpha_3 e_3$ числа $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, но $\alpha_3 \neq 0$. Итак, пришли к противоречию. Следовательно, функции $K_1(\lambda, x, y)$, $K_2(\lambda, x, y)$ и $K_3(\lambda, x, y)$ линейно независимы.

Покажем теперь, что преобразование $F(B)$, входящее в математическую модель (2) с точностью до взаимно-однозначного соответствия, определяется функционалами $\alpha_k(B)$, $k=1, 2, 3$.

Возьмем пару зрительных картин B_1 и B_2, для которых $\alpha_k(B_1) \neq \alpha_k(B_2)$, $k=1, 2, 3$. Из аксиомы размерности следует

$$\Phi[B_1, \Sigma\alpha_k(B_1)e_k] = 1, \ \Phi[B_2, \Sigma\alpha_k(B_2)e_k] = 1.$$

Используя свойство транзитивности, получаем $\Phi(B_1, B_2) = 1$.

Возьмем теперь другую пару изображений B_1 и B_2, для которых $\alpha_k(B_1) \neq \alpha_k(B_2)$. Если бы и в этом случае оказалось $\Phi(B_1, B_2) = 1$, то отсюда бы вытекало, что $\alpha_k(B_1) = \alpha_k(B_2)$, что противоречит условию. Значит, $\Phi(B_1, B_2) = 0$. Таким образом, математическая модель цветовой индукции зрения человека имеет вид

$$\Phi(B_1, B_2) = I[\alpha_k(B_1), \alpha_k(B_2)], \ k=1, 2, 3, \quad (14)$$

где $\alpha_k(B)$ характеризуют, согласно теореме (2—1) [9, с. 43], отображение $F(B)$ с точностью до взаимно-однозначного соответствия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Helmholtz H. Handbuch der physiologshen Optik. Hamburg u. Leipzig 1909—1911. 372 p.
2. Нюберг Н. Д. Курс цветоведения. Гизлегпром, 1932. 146 с.
3. Федоров Н. Т. Об одной из основных закономерностей в области одно временного цветового контраста. — «Докл. АН СССР», 1949, т. XVII, № 3, с. 142—145.
4. Кравков С. В. Глаз и его работа. М., «Наука», 1950. 347 с.
5. Kinney J. Factora affecting induced color. — «Vision research», 1962, vol. 2, N 12, p. 38—51.
6. Meessen A. A. simple nonlinear theory of color perception ant contrast effects. — «Kybernetik», 1967, 4, N 2, p. 63—70.
7. Naytani Y. Estimation of color induction by simultancous color contrast. — «Proc. Int. Color Meeting» «Color 69», Stockholm, 1969, v. 1, p. 43—49.
8. WassleH., Heinrich F. Non linear chromatic colour induction. — «Farbe», 1970, 19, N 1—6, p. 33—38.
9. Шульгин И. В., Лопатченко Б. К., Пильщиков Б. В. Математическое моделирование монокулярного зрительного восприятия. — В кн.: Проблемы бионики. Вып. 9, Харьков, 1972, с. 40—45.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972. 490 с.
11. К вопросу математического описания линейных психофизических систем. — В кн.: Проблемы бионики. Вып. 8, Харьков, 1972, с. 56—58. Авт.: Л. М. Майстровская, В. П. Пчелинов, Е. Г. Качко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко.
12. Мешков В. В. Основы светотехники. Ч. 2. М., Госэнергоиздат, 1961. 415 с.
13. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., Физматгиз, 1951. 518 с.
14. Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа. М., Физматгиз, 1967. 376 с.