

## СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ АНТЕННЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

### Введение

Важность исследования эффектов, возникающих в антеннах с нелинейными элементами (АНЭ), отмечалась неоднократно в целом ряде работ [1-4]. Наиболее общей математической моделью, удобной для теоретических исследований АНЭ, является модель на основе переменных состояния [1-3]. Согласно данной модели антенна описывается совокупностью двух систем уравнений – системой уравнений состояния (УС) и системой выходных уравнений. В ходе анализа АНЭ вначале необходимо решить систему уравнений состояния, а затем из выходных уравнений определить параметры и характеристики АНЭ.

Наиболее трудоемкий этап при этом – решение уравнений состояния, которое обычно проводится численными методами для каждого конкретного значения входного воздействия АНЭ. Усложнение схемы анализируемой антенны, увеличение числа нелинейных элементов (НЭ) в ней приводит к увеличению размерности системы УС и, как результат, к значительному возрастанию затрат времени, необходимого для ее решения. В определенной мере положение может быть улучшено, если учесть те или иные особенности схемы АНЭ – симметрию схемы, характер возбуждения и т.п. [2]. Однако и при этом остается основным недостаток численных методов – необходимость решения УС каждый раз заново при изменении входного воздействия. Поэтому вполне объясним интерес исследователей к аналитическим методам, которые позволяют для некоторого множества входных воздействий обойтись однократным решением системы УС. Найденное таким образом аналитическое решение уравнений состояния подставляется в систему выходных уравнений. Полученное вследствие этого соотношение, связывающее отклик АНЭ с ее входным воздействием и параметрами схемы, определяет структурную модель АНЭ.

До недавнего времени аналитическое решение УС удавалось реализовать лишь для нескольких простейших АНЭ при использовании ряда существенных ограничений, в значительной мере снизивших общность полученных структурных моделей.

Достаточно корректный метод аналитического решения уравнений состояния АНЭ предложен в работе [5] и получил свое дальнейшее развитие в [3]. Предложенные в [3,5] математические модели (ММ) описывают достаточно сложные АНЭ (в частности – антенные решетки с НЭ) при одночастотном и многочастотном возбуждении. Они базируются на использовании рядов Вольтерра в матричной формулировке, что определяет область эффективного использования их – анализ антенн, работающих в режиме слабой нелинейности. Это вполне приемлемо, например, для приемных АНЭ.

Основное предположение, принятое в [3,5] при построении ММ заключается в том, что характеристики НЭ описываются параметрами рассеяния. Однако зачастую НЭ более удобно описывать в терминах, отличных от параметров рассеяния (например, вольт-амперными, вольт-фарадными характеристиками и т.п.).

Целью настоящей работы является развитие метода аналитического решения уравнений состояния, предложенного в [5,3], и построение структурной модели АНЭ в предположении, что НЭ, входящие в состав антенны, могут описываться различными характеристиками. Это потребовало уточнения обобщенной схемы АНЭ, описания узлов, входящих в нее, что и рассмотрено в первой части работы. Затем получены системы уравнений состояния и выходных уравнений. Далее рассмотрено решение уравнений состояния и построение структурной модели АНЭ. В заключение работы приведены соотношения, позволяющие определить внешние характеристики АНЭ (ДН, КНД и т.д.).

### Обобщенная схема АНЭ и описание ее блоков

В качестве исходной при построении структурной модели АНЭ выбрана введенная в [1] обобщенная схема антенны, содержащей нелинейные элементы (рис. 1). Она состоит из трех линейных (ЛМ-1, ЛМ-2, ЛМ-3) и одного нелинейного (НМ) многополюсников.

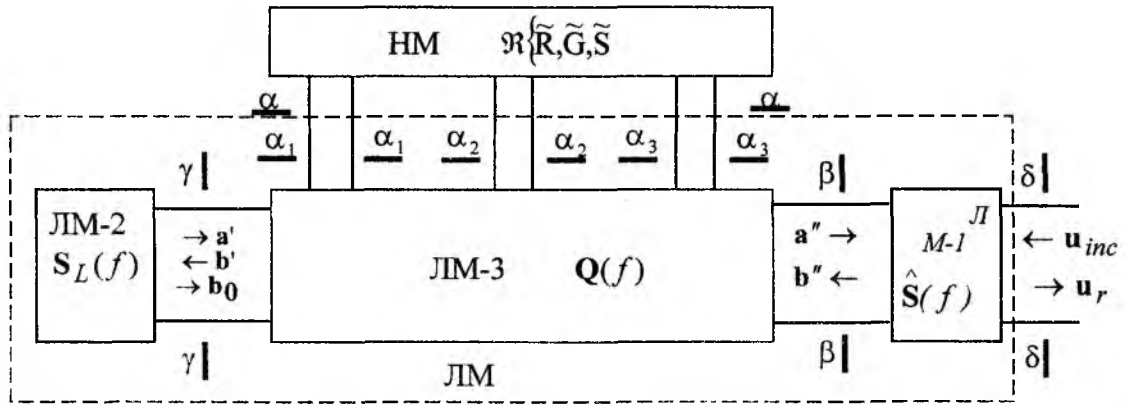


Рис. 1

Линейные многополосники ЛМ-1 и ЛМ-2 характеризует систему излучателей и нагрузки (и/или внутренние генераторы) АНЭ. ЛМ-1, также как и в [1], описывается на частоте  $f$  матрицей рассеяния  $\hat{S}(f)$ , связывающей векторы падающих  $\mathbf{a}''(f)$  и отраженных  $\mathbf{b}''(f)$  волн на входах системы излучателей (сечения  $\beta - \beta$ ) и векторы сходящихся  $\mathbf{u}_{inc}(f)$  и расходящихся  $\mathbf{u}_r(f)$  (сечения  $\delta - \delta$ ) “сферических волн свободного пространства”; системой ортонормированных ДН  $\mathbf{e}(\theta, \varphi, f)$ ; системой парциальных ДН  $\mathbf{f}(\theta, \varphi, f)$ ; ортогонализирующей матрицей токов  $\mathbf{J}(f)$  [6]. Многополосник ЛМ-2 описывается матрицей рассеяния  $\mathbf{S}_L(f)$ , связывающей векторы падающих  $\mathbf{a}'(f)$  и отраженных  $\mathbf{b}'(f)$  волн на его входах. Вектор  $\mathbf{b}_0$  описывает волны, создаваемые независимыми источниками, имеющимися в составе ЛМ-2.

Отличие схемы рис. 1 от рассмотренной в [1-3] заключается в описании многополосника ММ, содержащего нелинейные элементы, и многополосника ЛМ-3, объединяющего линейные элементы АНЭ, за исключением входящих в состав ЛМ-1 и ЛМ-2.

Многополосник ММ объединяет элементы, режимы входов которых характеризуются во временной области либо векторами токов  $\mathbf{i}_{NL}(t)$  и напряжений  $\mathbf{u}_{NL}(t)$ , либо векторами падающих  $\mathbf{a}_{NL}(t)$  и отраженных  $\mathbf{b}_{NL}(t)$  волн. Поэтому для описания его свойств использованы следующие соотношения [7]:

$$\mathbf{i}_{NL}(t) = \tilde{G}\{\mathbf{u}_{NL}(t)\}, \quad (1,а)$$

$$\mathbf{u}_{NL}(t) = \tilde{R}\{\mathbf{i}_{NL}(t)\}, \quad (1,б)$$

$$\mathbf{b}_{NL}(t) = \tilde{S}\{\mathbf{a}_{NL}(t)\}. \quad (1,в)$$

Здесь:  $\tilde{G}\{\cdot\}$ ,  $\tilde{R}\{\cdot\}$ ,  $\tilde{S}\{\cdot\}$  – нелинейные операторы, характеризующие НЭ при том или ином способе их описания. В дальнейшем предполагаем, что все выходы ММ (сечения  $\alpha - \alpha$ ) разделены на три группы (сечения  $\alpha_1 - \alpha_1$ ,  $\alpha_2 - \alpha_2$  и  $\alpha_3 - \alpha_3$ ). В первые две группы объединены входы, режимы которых описываются токами и напряжениями, связь между которыми определяется операторами  $\tilde{G}\{\cdot\}$  и  $\tilde{R}\{\cdot\}$ , соответственно. В третьей группе режимы входов описываются падающими и отраженными волнами, связанными посредством оператора  $\tilde{S}\{\cdot\}$ .

Прежде чем перейти к описанию многополосника ЛМ-3 определимся с векторами, характеризующими режимы различных групп его входов. При этом нужно иметь в виду, что режимы входов ЛМ-3, соединяемые с многополосниками ЛМ-1, ЛМ-2 (сечения  $\beta - \beta$ ,  $\gamma - \gamma$ ) и многополосником ММ (сечения  $\alpha_1 - \alpha_1$ ,  $\alpha_2 - \alpha_2$ ,  $\alpha_3 - \alpha_3$ ) целесообразно характеризовать векторами, аналогичными тем, которые характеризуют режимы соответствующих входов присоединяемых к ЛМ-3 многопо-

люсников. Поэтому режимы входов в сечениях  $\beta - \beta$ ,  $\gamma - \gamma$  и  $\alpha_3 - \alpha_3$  будем характеризовать векторами комплексных амплитуд падающих и отраженных волн – векторы  $(\mathbf{a}''(f), \mathbf{b}''(f))$ ,  $(\mathbf{a}'(f), \mathbf{b}'(f))$  и  $(\mathbf{a}^{\alpha_3}(f), \mathbf{b}^{\alpha_3}(f))$ , соответственно, а режимы входов в сечениях  $\alpha_1 - \alpha_1$  и  $\alpha_2 - \alpha_2$  – векторами токов и напряжений (векторы  $\mathbf{i}^{\alpha_1}(f)$ ,  $\mathbf{u}^{\alpha_1}(f)$  и  $\mathbf{i}^{\alpha_2}(f)$ ,  $\mathbf{u}^{\alpha_2}(f)$ ). С учетом вышесказанного, для описания многополюсника ЛМ-3, т.е. для описания связи между векторами  $\mathbf{i}^{\alpha_1}(f)$ ,  $\mathbf{u}^{\alpha_2}(f)$ ,  $\mathbf{a}^{\alpha_3}(f)$ ,  $\mathbf{b}''(f)$ ,  $\mathbf{b}'(f)$ , с одной стороны, и векторами  $\mathbf{u}^{\alpha_1}(f)$ ,  $\mathbf{i}^{\alpha_2}(f)$ ,  $\mathbf{b}^{\alpha_3}(f)$ ,  $\mathbf{a}''(f)$ ,  $\mathbf{a}'(f)$ , с другой стороны, введем в рассмотрение векторы

$$\mathbf{x}^\alpha(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{\alpha_1}(f) \\ \mathbf{u}^{\alpha_2}(f) \\ \mathbf{a}^{\alpha_3}(f) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^\alpha(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{\alpha_1}(f) \\ \mathbf{i}^{\alpha_2}(f) \\ \mathbf{b}^{\alpha_3}(f) \end{pmatrix} \quad (2)$$

и смешанную матрицу  $\mathbf{Q}(f)$ , определяемую соотношением

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^\alpha(f) \\ \mathbf{a}''(f) \\ \mathbf{a}'(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\alpha\alpha}(f) & \mathbf{Q}_{\alpha\beta}(f) & \mathbf{Q}_{\alpha\gamma}(f) \\ \mathbf{Q}_{\beta\alpha}(f) & \mathbf{Q}_{\beta\beta}(f) & \mathbf{Q}_{\beta\gamma}(f) \\ \mathbf{Q}_{\gamma\alpha}(f) & \mathbf{Q}_{\gamma\beta}(f) & \mathbf{Q}_{\gamma\gamma}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^\alpha(f) \\ \mathbf{b}''(f) \\ \mathbf{b}'(f) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

#### Уравнения состояния, выходные уравнения

Для схемы АНЭ в сечении  $\alpha - \alpha$  должны выполняться условия соединения нелинейного многополюсника и ЛМ-3:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{NL}^{\alpha_1}(t) &= -\mathbf{i}^{\alpha_1}(t); & \mathbf{u}_{NL}^{\alpha_1}(t) &= \mathbf{u}^{\alpha_1}(t); & \mathbf{i}_{NL}^{\alpha_2}(t) &= -\mathbf{i}^{\alpha_2}(t); \\ \mathbf{u}_{NL}^{\alpha_2}(t) &= \mathbf{u}^{\alpha_2}(t); & \mathbf{a}_{NL}^{\alpha_3}(t) &= \mathbf{b}^{\alpha_3}(t); & \mathbf{b}_{NL}^{\alpha_3}(t) &= \mathbf{a}^{\alpha_3}(t). \end{aligned}$$

Учитывая их, запишем соотношение, связывающее во временной области векторы  $\mathbf{x}^\alpha(t)$  и  $\mathbf{y}^\alpha(t)$  через характеристики нелинейного многополюсника, в виде:

$$\mathbf{x}^\alpha(t) = \mathfrak{R}\{\mathbf{y}^\alpha(t)\}. \quad (4)$$

Оператор  $\mathfrak{R}\{\cdot\}$  в (4) определен следующим образом:

$$\mathfrak{R}\{\cdot\} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{G}}\{\mathbf{E}^{\alpha_1}\cdot\} \\ \tilde{\mathbf{R}}\{-\mathbf{E}^{\alpha_2}\cdot\} \\ \tilde{\mathbf{S}}\{\mathbf{E}^{\alpha_3}\cdot\} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}^{\alpha_1}, \mathbf{E}^{\alpha_2}, \mathbf{E}^{\alpha_3}$  – матрицы вида:  $\mathbf{E}^{\alpha_1} = (\mathbf{E}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ ;  $\mathbf{E}^{\alpha_2} = (\mathbf{0}, \mathbf{E}, \mathbf{0})$ ;  $\mathbf{E}^{\alpha_3} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{E})$ . (6)

$\mathbf{E}$  – единичная матрица, порядок которой в (6) определяется числом входов нелинейного многополюсника в сечениях  $\alpha_1 - \alpha_1$ ,  $\alpha_2 - \alpha_2$ ,  $\alpha_3 - \alpha_3$ , соответственно.

Нами рассматривается периодический или почти периодический режимы АНЭ, т.е. предполагается, что антенна возбуждается на частотах  $f_k$  ( $k = \overline{0, q}$ ) со стороны внешнего пространства (вектор  $\mathbf{u}_{inc}(f_k)$ ) и (или) от внешних генераторов со стороны многополюсника ЛМ-1 (вектор  $\mathbf{b}_0(f_k)$ ). В этом случае дальнейшие выкладки целесообразно проводить в частотной области.

Применив к (4) преобразование Фурье, получим

$$\mathbf{x}^\alpha(f) = \tilde{\mathfrak{R}}\{\mathbf{y}^\alpha(f)\}, \quad (7)$$

где  $\tilde{\mathfrak{R}}$  – оператор, описывающий НМ в частотной области.

Соотношение (7) является исходным для получения системы уравнений состояния АНЭ. При этом необходимо учесть, что векторы  $\mathbf{x}^\alpha(f)$  и  $\mathbf{y}^\alpha(f)$  связаны через параметры линейного многополосника ЛМ (показан на рис. 1 пунктиром) соотношением

$$\mathbf{x}^\alpha(f) = (\mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma)^{-1} \mathbf{y}^\alpha(f) + \hat{\mathbf{y}}^\alpha(f), \quad (8)$$

в котором  $\hat{\mathbf{y}}^\alpha(f)$  – вектор, характеризующий внешние воздействия на АНЭ, пересчитанные к сечениям  $\alpha$ - $\alpha$ . Он определяется выражением:

$$\hat{\mathbf{y}}^\alpha(f) = (\mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma)^{-1} (\mathbf{Q}_{\alpha\delta}^\Sigma \mathbf{u}_{inc} + \mathbf{Q}_{\alpha\gamma}^\Sigma \mathbf{b}_0). \quad (9)$$

Соотношения для вычисления матриц  $\tilde{\mathbf{Q}}$ ,  $\mathbf{Q}^A$  и  $\mathbf{Q}^\Sigma$  по известным параметрам многополосников ЛМ-1, ЛМ-2 и ЛМ-3 приведены в Приложении.

Выберем в качестве вектора переменных состояния вектор  $\mathbf{y}^\alpha(f)$ . Тогда систему уравнений состояния и выходных уравнений получим в виде:

$$(\mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma)^{-1} \mathbf{y}^\alpha(f) + \hat{\mathbf{y}}^\alpha(f) - \tilde{\mathfrak{R}}\{\mathbf{y}^\alpha(f)\} = 0, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}'(f) \\ \mathbf{u}'_0(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\alpha}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\alpha} \end{pmatrix} \left( (\mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma)^{-1} \mathbf{y}^\alpha(f) + \hat{\mathbf{y}}^\alpha(f_k) \right) + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\gamma}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\gamma} \end{pmatrix} \mathbf{b}_0(f_k) + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\delta}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\delta} \end{pmatrix} \mathbf{u}_{inc}(f_k). \quad (11)$$

Здесь:  $\tilde{\mathfrak{R}}$  – оператор, описывающий нелинейный многополосник в частотной области.

Если известна зависимость вектора переменных состояния от входных воздействий в явном виде, т.е. известен оператор  $L$ , определяющий связь  $\mathbf{y}^\alpha(f) = L(\hat{\mathbf{y}}^\alpha(f))$ , то из (11) получим:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}'(f) \\ \mathbf{u}'_r(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\alpha}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\alpha} \end{pmatrix} \left( (\mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma)^{-1} L \left\{ \hat{\mathbf{y}}_0(f_k) \right\} + \hat{\mathbf{y}}^\alpha(f_k) \right) + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\gamma}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\gamma} \end{pmatrix} \mathbf{b}_0(f_k) + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\delta}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\delta} \end{pmatrix} \mathbf{u}_{inc}(f_k). \quad (12)$$

Видно, что (12) непосредственно связывает отклик АНЭ (векторы  $\mathbf{a}'(f_k)$ ,  $\mathbf{u}'_r(f_k)$ ) с входными воздействиями на нее, т.е. формально является структурной моделью АНЭ. Задача состоит в том, чтобы найти оператор  $L$  из решения (10).

### Решение уравнений состояния

Для этого, прежде всего, запишем соотношение (7), характеризующее многополосник нелинейных элементов, с использованием рядов Вольтерра. Необходимо отметить, что нелинейный многополосник является многовходовым устройством и использование для его характеристики рядов Вольтерра в их традиционном виде [8,9] неправомерно. Поэтому для характеристики НМ как многовходового устройства введем в рассмотрение матричный ряд Вольтерра соотношением

$$\mathbf{x}^\alpha(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{Q}}_n(f_1, \dots, f_n) \mathbf{D}_n(f_1, \dots, f_n) \delta(f - f_1 - \dots - f_n) \prod_{i=1}^n df_i. \quad (13)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{Q}}_n(f_1, \dots, f_n)$  – многомерная смешанная матрица (МСМ) нелинейного многополосника порядка  $n$  на частоте  $(f_1 + f_2 + \dots + f_n)$ ;  $\mathbf{D}_n(f_1, \dots, f_n)$  – вектор возбуждения.

Элементы вектора возбуждения  $\mathbf{D}_n(f_1, \dots, f_n)$ , по аналогии с обычным рядом Вольтерра, записываются в виде произведения  $n$  падающих волн на какие-либо  $n$  из  $M$  входов нелинейного многополосника:

$$D_{np}(f_1, \dots, f_n) = \prod_{i=1}^n y_{k_i}^\alpha(f_i), \quad (14)$$

где  $y_{k_i}^\alpha(f_i)$  – воздействие на  $k_i$ -м входе. Индекс  $p$  означает номер элемента вектора  $\mathbf{D}_n(f_1, \dots, f_n)$ .

Номера входов нелинейного многополосника  $k_i$ , воздействия на которые используются для формирования элемента вектора возбуждения, изменяются от элемента к элементу методом упорядоченного перебора. При этом (с целью исключения повторяющихся элементов в  $\mathbf{D}_n(f_1, \dots, f_n)$ ) на их значение накладывается ограничение [5]:

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \dots \leq k_n.$$

Например, если  $M=n=3$ , матрица-столбец возбуждения в функционале Вольтерра выглядит следующим образом:

$$\left[ \begin{array}{l} y_1^\alpha(f_1)y_1^\alpha(f_2)y_1^\alpha(f_3); y_1^\alpha(f_1)y_1^\alpha(f_2)y_2^\alpha(f_3); y_1^\alpha(f_1)y_1^\alpha(f_2)y_3^\alpha(f_3); \\ y_1^\alpha(f_1)y_2^\alpha(f_2)y_2^\alpha(f_3); y_1^\alpha(f_1)y_2^\alpha(f_2)y_3^\alpha(f_3); y_1^\alpha(f_1)y_3^\alpha(f_2)y_3^\alpha(f_3); \\ y_2^\alpha(f_1)y_2^\alpha(f_2)y_2^\alpha(f_3); y_2^\alpha(f_1)y_2^\alpha(f_2)y_3^\alpha(f_3); y_2^\alpha(f_1)y_3^\alpha(f_2)y_3^\alpha(f_3); \\ y_3^\alpha(f_1)y_3^\alpha(f_2)y_3^\alpha(f_3) \end{array} \right]_p.$$

Зависимость между номером  $p$  элемента вектора  $\mathbf{D}_n(f_1, \dots, f_n)$  и номерами входов нелинейного многополосника  $k_i$ , воздействия на которые используются для формирования этого элемента, задается соотношением [5]:

$$p = C_{M+n-1}^n - \sum_{l=1}^n C_{M+l-1-k_{n-l+1}}^l, \quad (15)$$

где  $C_M^n$  – биномиальные коэффициенты;  $n$  – порядок функционала Вольтерра.

Соотношение (15) определяет также число элементов вектора  $\mathbf{D}_n(f_1, \dots, f_n)$  (или, что то же самое, число столбцов матрицы  $\hat{\mathbf{Q}}_n(f_1, \dots, f_n)$ ):

$$P_{\max} = C_{M+n-1}^n = \frac{(M+n-1)!}{n!(M-1)!}. \quad (16)$$

Введенные в рассмотрение многомерные смешанные матрицы  $\hat{\mathbf{Q}}_n(f_1, \dots, f_n)$  представляют собой ядра функционалов Вольтерра. Их элементы определяются по известным характеристикам нелинейного многополосника и учитывают взаимодействие сигналов, воздействующих на различные входы устройства при образовании комбинационных компонент в отклике на том или ином входе. В общем случае матрица  $\hat{\mathbf{Q}}_n(f_1, \dots, f_n)$  – прямоугольная матрица размерности  $M \times p_{\max}$ . Элемент, находящийся на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца данной матрицы, характеризует способность нелинейного многополосника создавать на своем  $i$ -ом входе отклик с комбинационной частотой  $(f_i + f_2 + \dots + f_n)$  по отношению к сигналам с частотами  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , воздействующими на входы НМ с номерами, которые однозначно связаны с номером  $j$  [5].

В отличие от количества строк МСМ, которое всегда равно количеству входов нелинейного многополосника  $M$ , количество ее столбцов зависит как от количества входов НМ, так и от порядка МСМ. Для  $n=1$   $\hat{Q}_1(f)$  – квадратная матрица, она тождественна линейной смешанной матрице.

Заметим, что введенные в данной работе для характеристики нелинейного многополосника многомерные смешанные матрицы являются обобщением трех видов многомерных матриц – матриц импедансов, матриц проводимостей и матриц рассеяния на случай описания режимов входов НМ смешанной системой параметров. В частном случае, когда режимы входов НМ описываются какой-либо одной системой параметров, МСМ приводятся к той или иной из вышеназванных матриц. Например, если режимы на входах нелинейного многополосника характеризуются падающими и отраженными волнами как в [3,5], то МСМ переходят в многомерные матрицы рассеяния, свойства которых подробно рассмотрены в [3].

Представим теперь искомое решение уравнений состояния тоже в виде разложения в ряд Вольтерра. Такое представление допустимо в силу того, что (7) является соотношением, описывающим всю антенну в целом как единый нелинейный многополосник, если  $x^\alpha(f)$  и  $y^\alpha(f)$  связаны посредством (8). Для данного многополосника  $y^\alpha(f)$  – вектор воздействий, а  $x^\alpha(f)$  – вектор отклика. Связь этих векторов с вектором внешних воздействий  $\hat{y}^\alpha(f)$  представим подобно (13):

$$y^\alpha(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} Y_n(f_1, \dots, f_n) U_n(f_1, \dots, f_n) \delta(f - f_1 - \dots - f_n) \prod_{i=1}^n df_i, \quad (17)$$

$$x^\alpha(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} X_n(f_1, \dots, f_n) U_n(f_1, \dots, f_n) \delta(f - f_1 - \dots - f_n) \prod_{i=1}^n df_i. \quad (18)$$

Здесь, соответственно,  $Y_n(f_1, \dots, f_n)$  и  $X_n(f_1, \dots, f_n)$  – ядра функционалов;  $U_n(f_1, \dots, f_n)$  – вектор, характеризующий возбуждение всей АНЭ, элементы которого, по аналогии с элементами вектора  $D_n(f_1, \dots, f_n)$ , выражаются следующим образом:

$$U_{np}(f_1, \dots, f_n) = \prod_{i=1}^n \hat{y}_{k_i}^\alpha(f_i). \quad (19)$$

Заметим, что в соотношениях (17) и (18) вектор  $U_n(f_1, \dots, f_n)$  известен, так как его элементы выражаются через исходные величины – параметры линейных многополосников АНЭ (матрицы  $\hat{S}(f)$ ,  $S_L(f)$  и  $Q(f)$ ) и векторы внешнего воздействия  $b_0(f)$ ,  $u_{inc}(f)$ . Неизвестными являются только многомерные матрицы  $Y_n(f_1, \dots, f_n)$  и  $X_n(f_1, \dots, f_n)$ , определив которые можно затем из (17) найти искомый вектор переменных состояния. В качестве первого шага решения уравнений состояния найдем соотношение между матрицами  $Y_n(f_1, \dots, f_n)$ ,  $X_n(f_1, \dots, f_n)$  и многомерными матрицами  $\hat{Q}_n(f_1, \dots, f_n)$ , характеризующими многополосник нелинейных элементов. Для этого воспользуемся методом гармонических испытательных сигналов [8], учитывая, что нами рассматриваются только периодический или почти-периодический режимы возбуждения АНЭ. Уравнением, связывающим  $Y_n(f_1, \dots, f_n)$  и  $X_n(f_1, \dots, f_n)$  с параметрами нелинейного многополосника, является уравнение (13), а связь с параметрами линейных многополосников и источниками возбуждения задается соотношением (8).

Воздействие на  $i$ -й вход НМ  $y_i^\alpha(f)$ , используя (17), запишем в виде

$$y_i^\alpha(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} Y_n^i(f_1, \dots, f_n) U_n(f_1, \dots, f_n) \delta(f - f_1 - \dots - f_n) \prod_{i=1}^n df_i. \quad (20)$$

Здесь  $\mathbf{Y}_n^i(f_1, \dots, f_n)$  –  $i$ -я строка матрицы  $\mathbf{Y}_n(f_1, \dots, f_n)$ .

Подставив (20) в (14), получим:

$$\begin{aligned}
 D_{np}(f_1, \dots, f_n) &= \prod_{i=1}^n \left( \sum_{l_i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}_{l_i}^{k_i}(f'_1, \dots, f'_{l_i}) \mathbf{U}_{l_i}(f'_1, \dots, f'_{l_i}) \delta(f_i - f'_1 - \dots - f'_{l_i}) \prod_{p=1}^{l_i} df'_p \right) = \\
 &= \sum_{l_1=1}^{\infty} \dots \sum_{l_n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}_{l_1}^{k_1}(f'_1, \dots, f'_{l_1}) \mathbf{U}_{l_1}(f'_1, \dots, f'_{l_1}) \delta(f_1 - f'_1 - \dots - f'_{l_1}) \prod_{p=1}^{l_1} df'_p \times \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}_{l_2}^{k_2}(f'_1, \dots, f'_{l_2}) \mathbf{U}_{l_2}(f'_1, \dots, f'_{l_2}) \delta(f_1 - f'_1 - \dots - f'_{l_2}) \prod_{p=1}^{l_2} df'_p \dots \\
 &\quad \dots \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}_{l_n}^{k_n}(f'_1, \dots, f'_{l_n}) \mathbf{U}_{l_n}(f'_1, \dots, f'_{l_n}) \delta(f_1 - f'_1 - \dots - f'_{l_n}) \prod_{p=1}^{l_n} df'_p
 \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, нами получено выражение, связывающее  $p$ -й элемент вектора  $\mathbf{D}_n(f_1, \dots, f_n)$ , входящего в уравнение (13), с матрицами  $\mathbf{Y}_n(f_1, \dots, f_n)$ . Для того, чтобы получить искомую связь между

$\mathbf{Y}_n(f_1, \dots, f_n)$ ,  $\mathbf{X}_n(f_1, \dots, f_n)$  и матрицами  $\hat{\mathbf{Q}}_n(f_1, \dots, f_n)$ , необходимо (18) и (21) подставить в (13), для чего последнее удобно записать в виде:

$$\mathbf{x}^\alpha(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{p_{\max}} \hat{\mathbf{Q}}_n^p(f_1, \dots, f_n) D_{np}(f_1, \dots, f_n) \delta(f - f_1 - \dots - f_n) \prod_{i=1}^n df_i, \tag{13,a}$$

где  $\hat{\mathbf{Q}}_n^p(f_1, \dots, f_n)$  – столбец матрицы  $\hat{\mathbf{Q}}_n(f_1, \dots, f_n)$  с номером  $p$ . Выполнив указанную подстановку, необходимо проинтегрировать полученное выражение с учетом свойств  $\delta$ -функции и выделить после этого в явном виде первое слагаемое суммы в его правой части. В результате таких преобразований связь рассматриваемых многомерных матриц будет представлена следующим образом (для сокращения записи приведем выражение не для полного ряда Вольтерра, а только для функционала порядка  $n$ ):

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_n(f_1, \dots, f_n) \mathbf{U}_n(f_1, \dots, f_n) \delta(f - f_1 - \dots - f_n) \prod_{i=1}^n df_i = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{Q}}_1(f_1 + \dots + f_n) \mathbf{Y}_n(f_1, \dots, f_n) \mathbf{U}_n(f_1, \dots, f_n) \delta(f - f_1 - \dots - f_n) \prod_{i=1}^n df_i + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n) \mathbf{U}_n(f_1, \dots, f_n) \delta(f - f_1 - \dots - f_n) \prod_{i=1}^n df_i
 \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь  $\hat{\mathbf{Q}}_1(f_1 + \dots + f_n)$  – линейная (малосигнальная) смешанная матрица нелинейного многополосника на частоте  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ .

Выражение (22) характеризует свойства АНЭ на частоте  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ . Первое слагаемое в правой части выражения описывает ее линейные свойства, а второе – нелинейные, т.е. способность нелинейного многополосника создавать сигналы комбинационной частоты  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  в сечении  $\alpha$ - $\alpha$  линий передачи, соединяющих ЛМ и НМ.

Применив к (22) метод гармонических испытательных сигналов, получим соотношение, связывающее матрицы  $\mathbf{Y}_n(f_1, \dots, f_n)$ ,  $\mathbf{X}_n(f_1, \dots, f_n)$  и матрицу  $\hat{\mathbf{Q}}_n(f_1, \dots, f_n)$ , в окончательном виде

$$\mathbf{X}_n(f_1, \dots, f_n) = \hat{\mathbf{Q}}_1(f_1 + \dots + f_n) \mathbf{Y}_n(f_1, \dots, f_n) + \mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n). \tag{23}$$

Многомерные матрицы  $\mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n)$ , входящие в (23), определяются из выражений:

$$\mathbf{H}_1(f_1) \equiv 0, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n) \mathbf{U}_n(f_1, \dots, f_n) \delta(f - f_1 - \dots - f_n) \prod_{i=1}^n df_i = \\
& = \sum_{m=2}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{l_1=1}^{n-m+1} \dots \sum_{l_m=1}^{n-m+1 \wedge p} \mathbf{Q}_m(f_1 + \dots + f_{l_1}, f_{l_1+1} + \dots + f_{l_1+l_2}, \dots \\
& \dots, f_{l_1+l_2+\dots+l_{m-1}+1} + \dots + f_{l_1+l_2+\dots+l_{m-1}}) \left\{ \mathbf{Y}_{l_1}^{k_1}(f'_1, \dots, f'_{l_1}) \mathbf{U}_{l_1}(f'_1, \dots, f'_{l_1}) \right\} \times \\
& \quad \times \left\{ \mathbf{Y}_{l_2}^{k_2}(f'_{l_1+1}, \dots, f'_{l_1+l_2}) \mathbf{U}_{l_2}(f'_{l_1+1}, \dots, f'_{l_1+l_2}) \right\} \times \\
& \quad \times \left\{ \mathbf{Y}_{l_m}^{k_m}(f'_{l_1+l_2+\dots+l_{m-1}+1}, \dots, f'_{l_1+l_2+\dots+l_m}) \mathbf{U}_{l_m}(f'_{l_1+l_2+\dots+l_{m-1}+1}, \dots, f'_{l_1+l_2+\dots+l_m}) \right\} \times \\
& \quad \times \delta(f - f_1 - f_2 - \dots - f_{l_1+\dots+l_m}) \prod_{i=1}^{l_1+\dots+l_m} df_i
\end{aligned} \tag{25}$$

причем индексы суммирования в (25) должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_{i=1}^n l_i = n, m \leq n, l_i \leq n - m + 1. \tag{26}$$

Несмотря на громоздкость, выражение (25) путем ряда преобразований [5] приводится к виду, удобному для программирования. Это позволило разработать для вычисления матрицы  $\mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n)$  эффективный алгоритм и программу расчета. Из (25) с учетом (26) следует важное свойство матрицы  $\mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n)$ , а именно – она вычисляется с использованием матриц  $\mathbf{Y}_n(f_1, \dots, f_n)$  меньшего порядка, чем порядок матрицы  $\mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n)$ . Это свидетельствует о том, что (23) определяет рекуррентную процедуру нахождения многомерных смешанных матриц, суть которой заключается в следующем. На первом шаге, при  $n=1$ , из (23) с учетом (24):

$$\mathbf{X}_1(f_1) = \hat{\mathbf{Q}}_1(f_1) \mathbf{Y}_1(f_1) \tag{27}$$

или, приняв во внимание (17) и (18),

$$\mathbf{x}^\alpha(f_1) = \hat{\mathbf{Q}}_1(f_1) \mathbf{y}^\alpha(f_1). \tag{28}$$

Подставив в данное выражение  $\mathbf{x}^\alpha(f_1)$  из (8), получим:

$$\mathbf{Y}_1(f_1) = \mathbf{y}^\alpha(f_1) = \left[ \hat{\mathbf{Q}}_1(f_1) - [\mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma(f_1)] \right]^{-1} \hat{\mathbf{y}}^\alpha(f_1). \tag{29}$$

Видно, что  $\mathbf{Y}_1(f_1)$  вычисляется по известным, исходным для анализа АНЭ величинам. Далее по найденному  $\mathbf{Y}_1(f_1)$  из (25) рассчитываются матрицы  $\mathbf{H}_2(f_1, f_2)$ , необходимые для вычисления  $\mathbf{Y}_2(f_1, f_2)$  на втором шаге рекуррентной процедуры, который, как и первый шаг, выполняется по (23) с использованием (8). Все последующие шаги выполняются аналогично.

Данный процесс имеет наглядную физическую интерпретацию. Как видно из (29), матрица  $\mathbf{Y}_1(f_1)$ , определенная на первом шаге, представляет собой матрицу-столбец (вектор), который описывает реакцию АНЭ в сечении  $\hat{\alpha} - \alpha$  на внешние воздействия  $\hat{\mathbf{y}}^\alpha(f_1)$  без образования новых частот в отклике устройства, т.е. в режиме слабого сигнала, когда нелинейными эффектами можно пренебречь. В ходе дальнейших шагов ( $n \geq 2$ ) вычисления проводятся с использованием (23) при  $\mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ .

Для того, чтобы выяснить смысл матриц  $\mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n)$ , запишем (23) в несколько ином виде, а именно:

$$\mathbf{X}_n^l(f_1, \dots, f_n) = \hat{\mathbf{Q}}_1(f_1, \dots, f_n) \mathbf{Y}_n^l(f_1, \dots, f_n) + \mathbf{H}_n^l(f_1, \dots, f_n), \quad l = \overline{1, q_{\max}}, \quad (30)$$

где:  $\mathbf{X}_n^l(f_1, \dots, f_n)$ ,  $\mathbf{Y}_n^l(f_1, \dots, f_n)$  и  $\mathbf{H}_n^l(f_1, \dots, f_n)$  – столбцы с номером  $l$  соответствующих многомерных матриц.

Из сравнения (30) с (8) видно, что они сходны по своей структуре. Следовательно, каждое из соотношений (30) описывает реакцию АНЭ  $\mathbf{X}_n^l(f_1, \dots, f_n)$  в сечении  $\alpha - \alpha$  на возбуждение ее с частотой  $f_1 \neq f_2 \neq \dots \neq f_n$  источниками  $\mathbf{H}_n^l(f_1, \dots, f_n)$ , включенными в этом же сечении, т.е. каждый столбец многомерной матрицы  $\mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n)$  можно рассматривать как некоторый вектор источников сигналов комбинационных частот, возникающих на нелинейных элементах. Сами же матрицы  $\mathbf{H}_n(f_1, \dots, f_n)$  являются матрицами преобразования входного воздействия на АНЭ в ее отклик на комбинационных частотах в сечении  $\alpha - \alpha$ .

Таким образом, на первом этапе решения уравнений состояния нами найдены ядра функционалов Вольтерра  $\mathbf{Y}_n(f_1, \dots, f_n)$ , необходимые для определения вектора переменных состояния  $\mathbf{y}^\alpha(f)$  по (17). Второй этап заключается в преобразовании (17) с учетом конкретного вида входного воздействия на АНЭ.

В связи с тем, что вектор  $\hat{\mathbf{y}}^\alpha(f_k)$  есть линейное преобразование векторов  $\mathbf{u}_{inc}(f_k)$  и  $\mathbf{b}_0(f_k)$  (см. (9)), при котором, как известно, не происходит образования новых спектральных составляющих в отклике, то полное воздействие  $\hat{\mathbf{y}}^\alpha(f)$  на  $r$ -м входе многополосника НМ имеет вид:

$$\hat{y}_r^\alpha(f) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^q \hat{y}_{r,k}^\alpha \delta(f - f_k) + \sum_{k=0}^q (\hat{y}_{r,k}^\alpha)^* \delta(f - f_k) \right], \quad (31)$$

где  $\hat{y}_{r,k}^\alpha$  – элемент вектора  $\hat{\mathbf{y}}^\alpha(f_k)$  с номером  $r$ , характеризующий воздействие с частотой  $f_k$  на  $r$ -м входе НМ.

С целью большей компактности последующих выкладок запишем (31) в несколько иной форме. Введем два вектора  $\mathbf{y}^0$  и  $\boldsymbol{\zeta}$ , компоненты которых определены следующим образом

$$\left. \begin{aligned} [\hat{y}_{r,1}^0, \hat{y}_{r,2}^0, \dots, \hat{y}_{r,2(q+1)}^0] &= \left[ (\hat{y}_{r,q}^\alpha)^*, (\hat{y}_{r,q-1}^\alpha)^*, \dots, (\hat{y}_{r,0}^\alpha)^*, \hat{y}_{r,0}^\alpha, \dots, \hat{y}_{r,q}^\alpha \right] \\ [\zeta_{r,1}, \zeta_{r,2}, \dots, \zeta_{r,2(q+1)}] &= [-f_{r,q}, -f_{r,q-1}, \dots, -f_{r,0}, f_{r,0}, \dots, f_{r,q}] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Тогда

$$\hat{y}_r^\alpha(f) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^{2(q+1)} y_{r,k}^0 \delta(f - \zeta_k) \right]. \quad (33)$$

Теперь можно определить  $p$ -й элемент вектора  $\mathbf{U}_n(f_1, \dots, f_n)$ , входящего в (17). Для этого подставим (33) в (19) и после группировки слагаемых, отличающихся только перестановкой частот, получим:

$$U_{np}(f_1, \dots, f_n) = \prod_{i=1}^n \mathfrak{F}_{k_i}^\alpha(f_i) = \frac{1}{2^n} \sum_{k_1=1}^{2(q+1)} \dots \sum_{k_n=k_{n-1}}^{2(q+1)} K_v^n \prod_{i=1}^n y_{r,k_i}^0 \delta(f_i - \zeta_{k_i}). \quad (34)$$

Здесь  $K_v^n$  – коэффициент, равный  $K_v^n = (n; k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{v_1! v_2! \dots v_n!}$ ,  $k_i \leq k_{i+1}$ ;  $v_i$  – числа, показывающие количество повторений одинаковых индексов  $k_i$ .

Общее число слагаемых в сумме (34) вычисляется из соотношения:

$$N_\Sigma = C_{2q+n+1}^n = \frac{(2q+n+1)!}{n!(2q+1)!}.$$

Итак, с учетом конкретного внешнего воздействия определены элементы вектора  $U_n(f_1, \dots, f_n)$ .

Следовательно, известны все величины, необходимые для того, чтобы получить  $y^\alpha(f)$  в явном виде. Однако прежде чем сделать это, запишем (17) несколько иначе, так как непосредственная подстановка (34) в (17) невозможна. Более удобным является представление (17) в виде суммы произведений столбцов матрицы  $Y_n(f_1, \dots, f_n)$  на элементы вектора  $U_n(f_1, \dots, f_n)$ :

$$y^\alpha(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{p_{\max}} Y_n^p(f_1, \dots, f_n) U_{np}(f_1, \dots, f_n) \times \delta(f - f_1 - \dots - f_n) \prod_{i=1}^n df_i \quad (17, a)$$

Подставив теперь (34) в (17, a) и вычислив интегралы с использованием свойств  $\delta$ -функции, получим:

$$y^\alpha(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_p^{p_{\max}} \sum_{k_1=v_1}^{2(p+1)} \dots \sum_{k_n=v_n}^{2(p+1)} K_v^n Y_n^p(f_1, \dots, f_n) \times \left( \prod_{i=1}^n y_{p, k_i}^0 \right) \tilde{\delta}(f - \sum_{j=1}^n \zeta_{k_j}), \quad (35)$$

где  $\tilde{\delta}(x)$  – функция, которая определяется следующим образом:

$$\tilde{\delta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0 \\ 0 & \text{при } x \neq 0 \end{cases}.$$

Выражение (35) непосредственно связывает вектор переменных состояния с внешними воздействиями на АНЭ, т.е. представляет собой искомое решение уравнений состояния в явном виде. Иными словами, нами найден оператор  $L$ , необходимый для построения структурной модели АНЭ. Заключительный этап – это запись соотношения (12) с учетом (35). В результате имеем:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}'(f) \\ \mathbf{u}_r(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\alpha}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\alpha} \end{pmatrix} (\mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma)^{-1} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_p^{p_{\max}} \sum_{k_1=v_1}^{2(p+1)} \dots \sum_{k_n=v_n}^{2(p+1)} K_v^n Y_n^p(f_1, \dots, f_n) \times \right. \\ \left. \times \left( \prod_{i=1}^n y_{p, k_i}^0 \right) \tilde{\delta}(f - \sum_{j=1}^n \zeta_{k_j}) \right] + \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\alpha}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\alpha} \end{pmatrix} \right]^{\wedge \alpha} \mathbf{y}^\alpha(f) + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\gamma}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\gamma} \end{pmatrix} \mathbf{b}_0(f) + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\delta}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\delta} \end{pmatrix} \mathbf{u}_{\text{inc}}(f) \right] \tilde{\delta}(f - f_k) \quad (36)$$

Соотношение (36) – структурная модель АНЭ при периодическом, или почти-периодическом внешнем возбуждении. Проанализируем ее свойства.

Из вида правой части (36) следует, что вектор выходных параметров, характеризующий отклик антенны, состоит из двух слагаемых. Для того чтобы выяснить их смысл, предположим вначале, что нелинейный многополосник отключен, а входы линейного многополосника ЛМ-3 в сечении  $\alpha - \alpha$  имеют соответствующие нагрузки (входы в сечении  $\alpha_1 - \alpha_1$  (рис. 1) разомкнуты, входы в сечении  $\alpha_2 - \alpha_2$  замкнуты, а входы в сечении  $\alpha_3 - \alpha_3$  нагружены на неотражающие нагрузки). Тогда слагаемое в первых квадратных скобках правой части (36) обращается в нуль, и (36) приводится к виду:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}'(f_k) \\ \mathbf{u}_r(f_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'(f_k) \\ \mathbf{u}_r(f_k) \end{pmatrix}_{\text{ЛМ}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\alpha}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\alpha} \end{pmatrix} \mathbf{y}^\alpha(f_k) + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\gamma}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\gamma} \end{pmatrix} \mathbf{b}_0(f_k) + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\delta}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\delta} \end{pmatrix} \mathbf{u}_{\text{inc}}(f_k), \quad \forall k = \overline{0, q}. \quad (37)$$

В данном случае структурная модель представляет собой совокупность из  $(q+1)$  независимых соотношений, каждое из которых характеризует на соответствующей частоте внешнего воздействия ту часть суммарного отклика антенны, которая не зависит от нелинейных элементов, режима их работы, а обусловлена только параметрами линейной части антенны. На частотах, не совпадающих с частотами внешнего возбуждения, эта часть отклика отсутствует, т.е. для частот, которые появились в отклике антенны из-за наличия в ней нелинейных элементов, структурная модель АНЭ описывается зависимостью

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}'(f) \\ \mathbf{u}_r(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\alpha}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\alpha} \end{pmatrix} \left( \mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma \right)^{-1} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_p^{P_{max}} \sum_{k_1=v_1}^{2(p+1)} \dots \sum_{k_n=v_n}^{2(p+1)} K_v^n \mathbf{Y}_n^p(f_1, \dots, f_n) \times \right. \\ \left. \times \left( \prod_{i=1}^n y_{p,k_i}^0 \right) \tilde{\delta} \left( f - \sum_{j=1}^n \zeta_{k_j} \right) \right] \quad (38)$$

Рассмотрим более подробно первое слагаемое в правой части (36). Из выражения в квадратных скобках следует, что отклик АНЭ представляет собой сумму откликов различного порядка, соответствующих порядку функционала Вольтерра. При  $n=1$ , учитывая (29), получим:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}'(f_k) \\ \mathbf{u}_r(f_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\gamma\alpha}^A \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\delta\alpha} \end{pmatrix} \left( \mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma \right)^{-1} \left[ \hat{\mathbf{Q}}_1(f_k) - \left( \mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma \right)^{-1} \right]^{-1} \hat{\mathbf{y}}^\alpha(f_k) + \begin{pmatrix} \mathbf{a}'(f_k) \\ \mathbf{u}_r(f_k) \end{pmatrix}_{\text{ЛМ}}, \quad \forall k = \overline{0, q}. \quad (39)$$

Соотношение (39) определяет линейную модель АНЭ, соответствующую очень слабым внешним воздействиям. Эта модель описывает антенну только на частотах внешних воздействий и, по сути, соответствует схеме рис. 1, в которой многополюсник НМ имеет линейные характеристики. При увеличении уровня внешнего воздействия необходимо учитывать последующие члены ряда Вольтерра, т.е. учитывать отклики более высоких порядков. Как отмечалось выше, эта процедура носит рекуррентный характер, что весьма удобно при формировании структурных моделей различного уровня адекватности. Построение модели более высокого уровня сложности осуществляется путем наращивания предыдущей, не затрагивая при этом моделей более низкого уровня. Это обстоятельство является прямым следствием использования рядов Вольтерра при построении структурной модели.

Основным моментом, определяющим на практике эффективность анализа АНЭ с использованием структурной модели, является возможность описания характеристик НМ конечным степенным рядом малой размерности. Поэтому такая модель удобна при исследовании многочастотного малосигнального возбуждения АФАР, например, для расчета поля рассеяния приемных АФАР на комбинационных частотах, их характеристик по побочным каналам приема и т.п. Более того, именно при анализе малосигнального режима АНЭ структурная модель имеет существенное преимущество перед моделью, основанной на численном решении уравнений состояния. Зачастую, если внешний сигнал мал, при численном решении УС в ходе итерационного процесса возможна потеря точности вычислений, что не позволяет дать корректную оценку высших гармоник, уровень которых ниже уровня основного сигнала менее чем  $-40 \dots -60$  дБ. Структурная модель дает устойчивые результаты величины гармоник или комбинационных составляющих до уровней порядка  $-100 \dots -150$  дБ от уровня основного сигнала.

### Выходные характеристики АНЭ

Следует отметить, что наличие в составе антенн нелинейных элементов приводит к тому, что АНЭ является невзаимным устройством, и характеристики приемных и передающих антенн следует определить отдельно. Ниже определены характеристики приемных антенн, т.к. описываемый в настоящей статье метод наиболее целесообразно применять для анализа антенн именно этого класса. Перед тем, как непосредственно перейти к определению характеристик приемных АНЭ, заметим следующее. Как видно из полученных ранее соотношений, любая АНЭ является источником сигналов комбинационных частот, которые генерируются на нелинейных элементах. Таким образом, АНЭ на комбинационных частотах может быть представлена схемой рис. 1, в которой в сечении  $\alpha$ - $\alpha$  вместо многополюсника НМ включены генераторы сигналов комбинационных частот. Далее эти сигналы проходят через многополюсник ЛМ-3 и попадают на вход многополюсника нагрузки ЛМ-2 (вектор  $\mathbf{a}'(f)$ ) и приводят к образованию побочных каналов приема. Кроме этого, сигналы комбинационных

частот, прошедшие через многополосник ЛМ-3, попадают на вход излучателей (многополосник ЛМ-1) и, соответственно, излучаются в свободное пространство (вектор  $\mathbf{u}_r(f)$ ), что ведет к образованию побочных излучений. Следовательно, наличие нелинейных элементов в составе антенны и возникающие из-за этого нелинейные эффекты требуют большого числа характеристик для описания АНЭ. При этом следует также учитывать, что характеристики АНЭ зависят от уровня входного воздействия существенно нелинейным образом.

Перейдем теперь непосредственно к характеристикам приемных АНЭ. Одной из важнейших характеристик является диаграмма направленности (ДН). ДН относительно  $k$ -го входа ЛМ-2 описывается  $k$ -м элементом  $\mathbf{a}'(f_0)$ . Здесь  $f_0$  – рабочая частота антенны. Кроме ДН на рабочей частоте приемные АНЭ характеризуются также диаграммами направленности на частотах побочных каналов приема. Эти диаграммы также описываются компонентами вектора  $\mathbf{a}'(f_0)$ , вычисленными для выбранной комбинационной частоты. Это – диаграммы направленности АНЭ по побочному каналу приема. Остальные параметры, характеризующие АНЭ как приемную антенну, вычисляются через ДН по обычным соотношениям. Исходными для вычисления характеристик побочного излучения АНЭ являются ортогональные парциальные диаграммы направленности  $\mathbf{e}(\theta, \phi, f_m)$  и рассчитанный вектор расходящихся в каналах свободного пространства волн  $\mathbf{u}_r(f_m)$ . Здесь  $f_m$  – комбинационная частота, для которой рассчитываются характеристики АНЭ.

Характеристики поля побочного излучения АНЭ рассчитываются по следующим соотношениям [2]:

- вектор напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \sqrt{2W_0} \mathbf{e}_T(\theta, \phi, f_m) \mathbf{u}_r(f_m) \frac{\exp(-jk_m r)}{r},$$

где:  $W_0$  – волновое сопротивление свободного пространства;  $r, \theta, \phi$  – координаты точки, в которой вычисляется поле;  $k_m = 2\pi/\lambda_m$ ;  $\lambda_m$  – длина волны побочного излучения. Индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования;

- диаграмма направленности побочного излучения

$$\mathbf{f}(\theta, \phi) = \mathbf{e}_T(\theta, \phi, f_m) \mathbf{u}_r(f_m);$$

- мощность побочного излучения

$$P_\Sigma = \mathbf{u}_{rT}^*(f_m) \mathbf{u}_r(f_m);$$

- коэффициент направленного действия побочного излучения в направлении  $(\theta_0, \phi_0)$

$$D(\theta_0, \phi_0) = 4\pi \frac{|\mathbf{f}(\theta_0, \phi_0)|^2}{\mathbf{u}_{rT}^*(f_m) \mathbf{u}_r(f_m)}.$$

### Заключение

Представлен аналитический метод решения системы уравнений состояния для антенн с нелинейными элементами при почти-периодическом или периодическом входном воздействии. Полученное решение явилось основой для построения структурной модели АНЭ с использованием многомерных смешанных матриц. Последние рассчитываются через известные параметры линейных блоков и многомерные смешанные матрицы нелинейного многополосника.

Отличительной особенностью структурной модели являются:

- использование аппарата матричных рядов Вольтерра, позволяющих естественным образом подойти к исследованию многовходовых систем, каковыми являются антенные решетки;
- возможность эффективного анализа АНЭ со слабой нелинейностью, т.к. основная по трудности задача – решение уравнений состояния – проводится аналитически.

Область применения описанной модели – анализ одиночных АНЭ и антенных решеток, работающих в режиме слабой нелинейности, так как ключевым моментом, определяющим ее эффективность, является возможность описания НЭ коротким степенным рядом. Последнее зависит от характера нелинейности и уровня входного сигнала АНЭ.

Разработанная модель позволяет рассчитать все основные характеристики АНЭ при многочастотном возбуждении, в том числе такие, которые с помощью других известных методов анализа АНЭ получить не удавалось, или эти расчеты были связаны со значительными трудностями. К их числу можно, например, отнести: поле рассеяния АНЭ на промежуточной частоте, частоте гетеродина и комбинационных частотах, коэффициент направленного действия, отдаваемую в нагрузку мощность на основных и комбинационных частотах и т.д.

## Приложение

Соотношения для вычисления матриц  $\mathbf{Q}^\Sigma$  и  $\mathbf{Q}^A$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_{\alpha\alpha}^\Sigma &= \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\alpha} + \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta} (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\beta})^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\alpha} \\ \mathbf{Q}_{\alpha\delta}^\Sigma &= \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta} (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\beta})^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{\beta\delta} \\ \mathbf{Q}_{\alpha\gamma}^\Sigma &= \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\gamma} + \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta} (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\beta})^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\gamma} \\ \mathbf{Q}_{\delta\alpha}^\Sigma &= \hat{\mathbf{S}}_{\delta\beta} (\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\beta} \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta})^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\alpha} \\ \mathbf{Q}_{\delta\delta}^\Sigma &= \hat{\mathbf{S}}_{\delta\delta} + \hat{\mathbf{S}}_{\delta\beta} (\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\beta} \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta})^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\beta} \hat{\mathbf{S}}_{\beta\delta} \\ \mathbf{Q}_{\delta\gamma}^\Sigma &= \hat{\mathbf{S}}_{\delta\beta} (\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\beta} \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta})^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\gamma} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П1})$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_{\gamma\alpha}^A &= (\mathbf{E} - \mathbf{Q}_{\gamma\gamma} \mathbf{S}_L)^{-1} (\mathbf{Q}_{\gamma\alpha} + \mathbf{Q}_{\gamma\beta} (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\beta})^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \mathbf{Q}_{\beta\alpha}) \\ \mathbf{Q}_{\gamma\gamma}^A &= (\mathbf{E} - \mathbf{Q}_{\gamma\gamma} \mathbf{S}_L)^{-1} (\mathbf{Q}_{\gamma\gamma} + \mathbf{Q}_{\gamma\beta} (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\beta})^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \mathbf{Q}_{\beta\gamma}) \\ \mathbf{Q}_{\gamma\delta}^A &= (\mathbf{E} - \mathbf{Q}_{\gamma\gamma} \mathbf{S}_L)^{-1} \mathbf{Q}_{\gamma\beta} (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta\beta})^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \mathbf{Q}_{\beta\delta} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П2})$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_{ij} &= \mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}_{i\gamma} (\mathbf{E} - \mathbf{S}_L \mathbf{Q}_{\gamma\gamma})^{-1} \mathbf{S}_L \mathbf{Q}_{\gamma j} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{i\gamma} &= \mathbf{Q}_{i\gamma} (\mathbf{E} - \mathbf{S}_L \mathbf{Q}_{\gamma\gamma})^{-1} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П3})$$

**Список литературы:** 1. Шифрин Я.С., Лучанинов А.И., Щербина А.А. Нелинейные антенные эффекты //Радиоэлектроника. 1990. Т. 33, № 2. С. 4 – 13. 2. Шифрин Я.С., Лучанинов А.И. Антенны с нелинейными элементами//В кн.: Справочник по антенной технике. Т. 1./Под ред. Л.Д. Бахраха и Е.Г. Зелкина. М.: Изд-во ИПРЖР, 1997. С. 207-235. 3. Шифрин Я.С., Лучанинов А.И. Современное состояние теории и техники антенн с нелинейными элементами // Радиоэлектроника. 1996. Т. 39, № 9-10. С.4-16. 4. Qian Y., Itoh T. Progress in Active Integrated Antennas and Their Applications // IEEE Transactions on MTT. 1998. V. 46, No. 11. P. 1891-1900. 5. Шифрин Я.С., Лучанинов А.И., Посохов А.С. Матричный метод анализа антенн с нелинейными многополосниками при периодическом или почти периодическом воздействии // Харьковск. ин-т радиоэлектрон., 1986. 54 с.- Деп. в УкрНИИНТИ 25.06.86, N 1456-Ук. 86. 6. Сазонов Д.М. Основы матричной теории антенных решеток // Сб. науч.-методич. статей по прикладной электродинамике. Вып. 6. М.: Высш. шк., 1983. С. 111-162. 7. Shifrin Y.S., Luchaninov A.I. Nonlinear Effects in Antennae and the Methods of their Analysis //In: Non-Linear Electromagnetic Systems. / By ed. V. Kose and J. Sievert. IOS Press, 1998. P. 839-842. 8. Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976. 448 с.. 9. Методы нелинейных функционалов в теории электрической связи/ Б.М. Богданович, Л.А. Черкас, Е.В. Задедюрин, Ю.М. Вувуникян, Л.С. Бачило; Под ред. Б.М. Богдановича. - М.: Радио и связь, 1990. 280 с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 8.11.2001