УДК 621.391

О. В. ОВЧАРЕНКО

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ *

Понятие аналитического сигнала возникло как обобщение понятия комплексной амплитуды гармонического сигнала на случай негармонических сигналов, определенных на всей действительной оси. Вначале рассматривали узкополосные сигналы, для которых с помощью аналитического сигнала естественным путем определялись медленно изменяющиеся амплитуда и фаза. Мнимая компонента аналитического сигнала вводилась при этом с помощью преобразования Гильберта [2]. В результате многочисленных исследований обосновали естественность такого определения аналитического сигнала и возможность его распространения на широкополосные сигналы [1—3]. Более того, доказали его единственность, вытекающую из обычных физических требований к огибающей и фазе модулированного сигнала [2].

В то же время в указанных работах отмечалось, что для финитных функций аналитический сигнал, построенный при помощи преобразования Гильберта, может иметь бесконечные выбросы на концах интервала определения функции [1]. Известные трудности возникают и при установлении связи амплитуды с фазой, когда также приходится строить аналог аналитического сигнала [3]. В этом случае возникают функции, имеющие логарифмические особенности, из-за которых не удается получить соответствующие интегральные представления.

Указанные трудности легко преодолимы при последовательном использовании теории краевых задач аналитических функций. Эта теория использована нами для построения аналитического сигнала на конечном интервале и полуоси.

Пусть вначале вещественный сигнал $f(t)$ определен на замкнутой действительной оси $\hat{\boldsymbol{R}} = R \cup \{\infty\}$ и удовлетворяет условию Гельдера всюду на $\hat{\boldsymbol{R}}$ [4]. Тогда аналитический сигнал для $f(t)$ представляет собой комплексную функцию $A(t) = u(t) + iv(t)$, определенную на $\boldsymbol{R}$, где

$$u(t) = f(t), \quad v(t) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\boldsymbol{R}} \frac{f(\tau)\, d\tau}{\tau - t}.$$

* Работа выполнена под руководством д-ра техн. наук С. Е. Фальковича.

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Такой аналитический сигнал можно получить естественным путем в результате решения некоторой частной краевой задачи Гильберта. Общая задача Гильберта состоит в отыскании голоморфной функции $\Phi^+(z)$, определенной во внутренней области D^+, ограниченной произвольной ориентированной замкнутой кривой Γ на некоторой римановой поверхности. На кривой Γ предельная функция $\Phi^+(t) = u(t) + iv(t)$ должна удовлетворять граничному условию $au + bv = c$, где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные на Γ вещественные функции, удовлетворяющие условию Гельдера. В частном случае, если римановой поверхностью является сфера Римана с ее естественной стереографической проекцией на комплексную плоскость C, когда на сфере Римана в качестве замкнутой кривой выбирается меридиан, соответствующий замкнутой вещественной оси $\bar{R}$ с ее естественной ориентацией в направлении от $-\infty$ к $+\infty$ (в качестве D^+ выступает открытая верхняя полуплоскость), при условии $a(t) \equiv 1$, $b(t) \equiv 0$, $c(t) \equiv f(t)$ решение задачи Гильберта дается формулой Шварца [5, с. 183, 187]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\bar{R}} \frac{f(\tau)\, d\tau}{\tau - z}.$$

Отсюда помощью формул Сохоцкого [4] устанавливается связь между $u(t)$ и $v(t)$ в виде преобразования Гильберта, т. е. предельная функция $\Phi^+(z)$ в указанном частном случае является обычным аналитическим сигналом.

В теории краевых задач аналитических функций, помимо краевых задач с гельдеровыми коэффициентами, рассматриваются случаи, в которых условия Гельдера не выполняются в конечном числе точек контура, в частности, когда в таких точках краевые функции разрывны. К таким задачам сводятся и краевые задачи с разомкнутыми контурами. Рассмотрим краевую задачу на конечном отрезке $[t_1, t_2] = I$ вещественной оси $\bar{R}$ и с помощью ее решения построим аналитический сигнал на конечном интервале времени.

Отметим, что задача Гильберта на оси $\bar{R}$ эквивалентна следующей задаче Римана [4]: найти кусочно-голоморфную в D^+ и D^- функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую граничному условию $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$ (2), где

$$G(t) = -\frac{a(t) + ib(t)}{a(t) - ib(t)}, \quad g(t) = \frac{2c(t)}{a(t) - ib(t)},$$

и дополнительному требованию кососимметрии: $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$.

В случае, когда a, b, c определяются тождествами (1), краевое условие (2) принимает вид $\Phi^+(t) = -\Phi^-(t) + 2f(t)$. Теперь пусть $f(t)$ определена на конечном интервале и удовлетворяет условию Гельдера на этом отрезке. Поставим задачу: найти голоморфную вне отрезка I, кососимметрическую, ограниченную функцию $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$, такую, что $u(t) = f(t)\ \forall t \in I$. Решение этой задачи позволит найти интегральную связь между мнимой $v(t)$ и вещественной $u(t) = f(t)$ частями, аналогичную преобразованию Гильберта. С помощью этого преобразования и будет определяться аналитический сигнал $A(t) = \Phi^+(t) = u(t) + iv(t)$ на конечном интервале I.

Установим свойства функции $\Phi(z)$ на вещественной оси R. Если $t \in I$, то $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, в противном случае $\Phi^+(t) = f(t) + iv(t)$, $\Phi^-(t) = f(t) - iv(t)$. Складывая эти равенства, получаем $\Phi^+ = -\Phi^- + 2f$. Следовательно, имеем кососимметрическую задачу Римана на R, в граничное условие которой (2) входят разрывные функции

$$G(t) = \begin{cases} -1, & t \in I; \\ +1, & t \notin I; \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 2f(t), & t \in I; \\ 0, & t \notin I. \end{cases}$$

Решим эту задачу методом приведения к задаче Римана с непрерывным коэффициентом $G_1(t)$ [4, стр. 442]. Для этого определим значения аргумента функции $G(t)$ в начале интервалов I, $R \setminus I$:

$$\arg G(t_1 + 0) = \varphi_{10} = \pi, \quad \arg G(t_2 + 0) = \varphi_{20} = 0.$$

Так как приращения Δ_1, Δ_2 аргумента $G(t)$ на интервалах I и $R \setminus I$ равны нулю, приращения $\arg G(t)$ при переходе точек t_1, t_2 составляют

$$\theta_1 = \varphi_{20} + \Delta_2 - \varphi_{10} = -\pi; \quad \theta_2 = \varphi_{10} + \Delta_1 - \varphi_{20} = \pi.$$

Теперь можно определить параметры

$$\rho_k = \frac{|G(t_k - 0)|}{|G(t_k + 0)|} = 1; \quad \gamma_k = \frac{\theta_k}{2\pi} - \varkappa_k - i\frac{\ln \rho_k}{2\pi} = (-1)^k \frac{1}{2} - \varkappa_k,$$

где $\varkappa_k$ — целые числа, которые выбираются в зависимости от класса функций, в котором ищется решение задачи Римана, и построить функции

$$\omega_k^{\pm}(z) = \left(\frac{z - t_k}{z - z^{\pm}}\right)^{\gamma_k}, \quad k = 1,\ 2. \tag{3}$$

Эти многозначные функции имеют по две точки ветвления: t^k, $z^{\pm}$. Соединяя указанные пары точек линиями разрезов, лежащими в полуплоскостях $D^{\pm}$, определяем естественные однозначные ветви функций $\omega_k^{\pm}(z)$, которые являются голоморфными соответственно в $D^{\pm}$. С помощью функций $\omega_k^{\pm}(z)$ определяем вспомогательную кусочно-голоморфную функцию

$$H(z) = \begin{cases} \omega_1^+(z)\,\omega_2^+(z), & z \in D^+; \\ \omega_1^-(z)\,\omega_2^-(z), & z \in D^- \end{cases}$$

и вводим новую неизвестную функцию $\Phi_1(z)$, связанную с $\Phi(z)$ равенством $\Phi(z) = H(z)\Phi_1(z)$. Подставляя это выражение в (2), получаем граничное условие для $\Phi_1(z)$:

$$\Phi_1^+(t) = G_1(t)\,\Phi_1^-(t) + g_1(t),$$

где

$$G_1(t) = \frac{\omega_1^-(t)\,\omega_2^-(t)}{\omega_1^+(t)\,\omega_2^+(t)} = \left(\frac{t - z^+}{t - z^-}\right)^{\varkappa_1 + \varkappa_2}; \quad g_1(t) = \frac{2f(t)}{\omega_1^+(t)\,\omega_2^+(t)}. \tag{4}$$

Таким образом, пришли к простейшей задаче Римана с дробно-рациональным коэффициентом [4, с.115]. Для ее решения строим каноническую кусочно-голоморфную функцию

$$X_1(z) = \begin{cases} X_1^+(z), & z \in D^+; \\ X_1^-(z), & z \in D^-, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$X_1^+(z) = (z - z^-)^{-\varkappa}; \; X_1^-(z) = (z - z^+)^{-\varkappa}, \; \varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2,$$

а затем получаем общее решение в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_{\hat{R}} \frac{g_1(\tau)\, d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau - z)} + X_1(z) P_\varkappa(z),$$

где $P_\varkappa(z)$ — произвольный полином степени $\varkappa \geqslant 0$; $P_\varkappa(z) \equiv 0$ $\varkappa < 0$.

Из этой формулы, с учетом (5), (4), (3) и кососимметрии произведения $H(z) X_1(z)$ для ограниченного решения исходной задачи Гильберта, которому соответствует

$$\varkappa_1 = -1, \; \varkappa_2 = 0, \; \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2},$$

получаем

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{(z - t_1)(z - t_2)}}{2\pi i} \int_{t_1}^{t_2} \frac{2f(\tau)\, d\tau}{\sqrt{(\tau - t_1)(\tau - t_2)}(\tau - z)}.$$

Используя формулу Сохотского, из этого равенства находим искомое интегральное выражение мнимой части $v(t)$ аналитического сигнала через заданный вещественный сигнал $f(t)$:

$$v(t) = -\frac{\sqrt{(t - t_1)(t - t_2)}}{\pi} \int_{-t_1}^{t_2} \frac{f(\tau)\, d\tau}{\sqrt{(\tau - t_1)(\tau - t_2)}(\tau - t)}.$$

Данный метод в случае задания сигнала $f(t)$ на полуоси $[t_1, \infty]$, где он удовлетворяет условию Гельдера, дает

$$v(t) = -\frac{\sqrt{t - t_1}}{\pi} \int_{t_1}^{\infty} \frac{f(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\tau - t_1}(\tau - t)}.$$

Установленные новые интегральные представления аналитических сигналов в отличие от преобразования Гильберта ограничены благодаря дополнительным внеинтегральным множителям дробной степени $^1/_2$.

Список литературы: 1. *Коржик В. И.* Огибающая сигнала и некоторые ее свойства // Радиотехника.— 1968.— **23**, № 4.— С. 1—6. 2. *Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М. : Наука, 1983.— 288 с.— 3. *Велкер*. К созданию единой теории модуляции // Тр. ин-та по электротех. и радиоэлектронике.— 1966.— № 3.— С. 5—20; № 5.— С. 22—44. 4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Наука, 1977.— 640 с. 5. *Мусхелишвили Н. М.* Сингулярные интегральные уравнения.— М. : Физматгиз, 1962.— 600 с.

Поступила в редколлегию 15.09.86