ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ З МОНОТОННИМ ОПЕРАТОРОМ ТА БАГАТЬМА ПАРАМЕТРАМИ

Гладуш Д. Б.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, проф. Колосова С.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харьков, просп. Науки, 14, каф. Прикладної математики,
тел. (057)702-13-35)
E-mail: diana.melnyk@nure.ua

The purpose of this work is to prove the existence and uniqueness of the solution of one boundary value problem for a nonlinear elliptic equation with a monotone operator and four parameters and to justify the possibility of constructing two-sided approximations to the solution.

Теорія нелінійних рівнянь знаходить застосування у всіх основних розділах сучасної фізики: у теорії тяжіння, квантовій теорії поля, теорії плазми, нелінійній оптиці тощо. Рівняння еліптичного типу описують стаціонарні явища різної фізичної природи.

Розглянемо крайову задачу [1]

$$-\Delta u = \lambda(a + bu^p) \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$
$$u > 0 \text{ у } \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ (\lambda > 0).$$

Вважаємо $a > 0,\ b > 0,\ p > 0,$ Ω – скінченна область. У відповідність задачі (1) поставимо нелінійне операторне рівняння

$$u(x) = \lambda \int_\Omega \mathbb{G}(x,s)\left(a + bu^p(s)\right)ds, \tag{2}$$

де $\mathbb{G}(x,s)$ – функція Гріна оператора - Δ першої крайової задачі у Ω, $x = (x_1, \dots, x_n\ ),\ s = (s_1, \dots, s_n)$ [2, 3, 4]. Позначимо

$$\mathrm{T}u = \lambda \int_\Omega \mathbb{G}(x,s)\left(a + bu^p(s)\right)ds,\ D(\mathrm{T}) = \mathrm{K},$$

де K – конус невід'ємних у $C(\Omega)$ функцій. Відомо, що конус K є нормальним та цілком неперервним [2, 3, 4].

Дослідження задачі (1), а відповідно й рівняння (2), проведено методом операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах [2]. Відомо, якщо монотонний оператор T має інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$, тобто такий, що $\mathrm{T}v_0 \geq v_0,\ \mathrm{T}w_0 \leq w_0$, та виконуються умови, що конус K є нормальним та оператор T є цілком неперервним, тоді існує хоча б одна нерухома точка у оператора T, тобто задача (1) має розв'язок.

Висновок про єдиність нерухомої точки у оператора T виходить з умови, що оператор T є угнутим та u_0 – угнутим, $u_0 = \lambda \int_\Omega \mathbb{G}(x,s)ds$.

Нами доведені наступні властивості оператора T :

1) оператор T є монотонним, тобто якщо $u_1 \leq u_2$, маємо $Tu_1 \leq Tu_2$,

2) оператор T є угнутим та u_0 – угнутим, тобто $\forall t \in (0,1)$ та $u > 0$ $T(tu) - tTu = \lambda \left[\int_{\Omega} \mathbb{G}[a + b(tu)^p]\, ds - \int_{\Omega} \mathbb{G}(x,s) t [a + bu^p] ds \right] > 0$, при цьому отримали умову $p < 1$,

3) оператор T є u_0 – угнутим, $u_0 = \int_{\Omega} \mathbb{G}(x,s) ds$, тобто виконується умова

$$f(tu) - tf(u) > 0 \;\; \forall x \in \Omega, \forall u > 0, \forall t \in (0,1).$$

4) побудовано інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 > = < 0, \beta >$, при цьому на параметри λ, a, b, p, β накладено умову

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} \int_{\Omega} \mathbb{G}(x,s) ds \leq \frac{\beta}{\lambda(a + b\beta^p)},$$

а тому згідно з [2] можемо зробити висновок, що послідовні наближення, які будуються за схемою $u_{n+1} = \mathrm{T}u_n$, $n = 1, 2, \ldots$, збігаються за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного додатного розв'язку, яким би не було початкове наближення $u_1 \in < v_0, w_0 >$. Обираючи за початкові наближення $u_1 = v_0$, $u_1 \in w_0$, отримаємо нерівності

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \cdots \leq v_k \leq \cdots \leq u \leq \cdots \leq w_k \leq \ldots \leq w_1 \leq w_0 = \beta,$$

Список використаних джерел:

1. M. Matinfaz, K.Nemati. A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem. International Mathematical Forum, 3, 2008, no. 17, 811-816.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. - М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
3. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: изд-во Тбилиси у-та, 1984. - 246с.
4. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов. Труды Моск. матем. Общества, 1978. – т. 36. с. 237-273.