УДК 621.385

Т. Р. ШАВОРЫКИНА, канд. физ.-мат. наук,
Г. П. ЩЕРБИНИН, канд. физ.-мат. наук

ВЛИЯНИЕ РАССИНХРОНИЗМА НА ВЫХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛБВ С КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Влияние входных параметров на взаимодействие электронного пучка с полем замедленной электромагнитной волны исследовалось в основном в рамках классической теории. Однако при таком подходе трудно объяснить некоторые нелинейные эффекты, обнаруженные в результате проведения реальных и численных экспериментов и достаточно просто объясняемые в квазиклассическом приближении.

Существенный интерес представляет влияние рассинхронизма на электронный КПД системы: для каждого значения параметра пространственного заряда имеется некоторое оптимальное значение параметра рассинхронизма, при котором электронный КПД достигает максимума. Увеличение рассинхронизма от малых значений до оптимального сопровождается довольно плавным ростом электронного КПД, а рост параметра рассинхронизма сверх оптимального значения приводит к быстрому уменьшению электронного КПД [1]. Этому явлению можно дать физическое объяснение, используя квантовомеханический подход.

Пусть в системе распространяется волна напряжения высокочастотного поля, изображенная на рис. 1 и определяемая выражением

$$u(z,\ t) = U_0 + U_1 \cos(\omega_0 t - \beta_0 z), \tag{1}$$

где U_0— потенциал электронного пучка, U_1— амплитуда напряжения высокочастотного поля; $\beta_0 = \frac{\omega}{V_\phi}$ — фазовая постоянная распространения волны. По отношению к захваченным этой волной электронам ее можно рассматривать как последовательность потенциальных ям. Если пренебречь туннелированием, то состояние электронов в каждой из них можно [2] описывать независимо, исходя из уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - eu(z,\ t)\,\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{2}$$

Здесь $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка; ψ — волновая функция; e и m — заряд и масса электрона соответственно. Переходя к новой системе координат, в которой волна находится в состоянии покоя, введем новую независимую переменную $\xi = \frac{1}{2}(\omega_0 t - \beta_0 z)$ (3) и представим волновую функцию в виде $\psi = \Phi(\xi)\exp\{i(\omega t - \alpha z)\}$ (4), где ω и α пока не определены. С учетом (1) из (2) получим

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\alpha^2\Phi + i\alpha\beta_0\Phi' + \frac{1}{4}\beta_0^2\Phi''\right) +$$
$$+ e(U_0 + U_1\cos 2\xi)\,\Phi = \hbar\omega\Phi - \frac{i}{2}\omega_0\hbar\Phi'.$$

Приравнивая здесь сначала мнимые, а затем действительные части равенства, найдем

$$\alpha = -\frac{m}{\hbar}v_\phi,$$

а функция $\Phi(\xi)$ удовлетворяет уравнению Матье

$$\Phi'' + \frac{1}{\hbar^2}(\varkappa + \delta\cos 2\xi)\,\Phi = 0, \tag{5}$$

в котором введены параметры

$$\varkappa = \frac{8m}{\omega_0^2}v_\phi^2\left(eU_0 - \hbar\omega + \frac{m}{2}v_\phi^2\right),\quad \delta = \frac{8em}{\omega_0^2}U_1 v_\phi^2. \tag{6}$$

Предположение о том, что напряжение электромагнитной волны изменяется вдоль направления движения пучка гармонически с частотой ω_0 и распространяется с фазовой скоростью v_ϕ, соответствует случаю больших входных сигналов. В конечной стадии развития колебаний при больших уровнях сигнала имеет место режим насыщения, в котором амплитуда волны напряжения постоянна, гармоники основной частоты ω_0 незначительны по амплитуде, потому что сопротивление связи быстро уменьшается с ростом номера гармоники.

Для эффективной передачи энергии от пучка электромагнитной волне необходимо, чтобы электроны двигались быстрее волны, т.е. чтобы параметр рассинхронизма $b = v_0/v_ф$ был больше единицы. Это накладывает ограничение на решение уравнения (5). Чтобы проанализировать это ограничение, представим (5) как

$$\Phi'' + \frac{k^2}{\hbar^2}\Phi = 0, \qquad (7)$$

где $k^2(\xi) = \varkappa + \delta\cos 2\xi$.

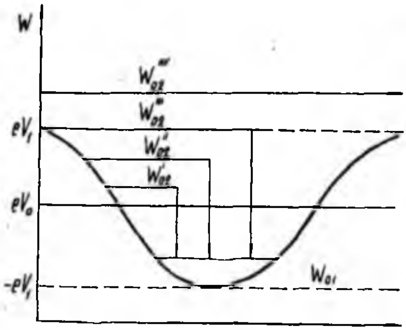

Рис. 1

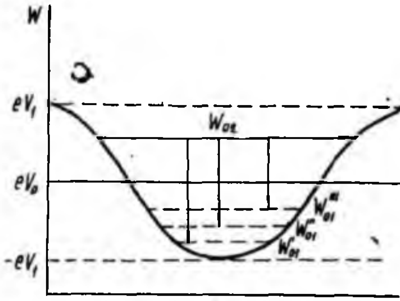

Рис. 2

Характер решения уравнения (7) существенно зависит от знака переменного коэффициента $k^2(\xi)$. Эту зависимость проще всего проанализировать в случае, когда $k = \text{const}$: если $k^2 > 0$, то частные решения уравнения (7) равны

$$\Phi(\xi) = \exp\left\{\pm i\,\frac{k}{\hbar}\,\xi\right\}$$

и имеют осциллирующий характер, а при $k^2 < 0$ решения являются экспоненциально изменяющимися функциями:

$$\Phi(\xi) = \exp\left\{\pm\,\frac{|k|}{\hbar}\,\xi\right\}.$$

Не конкретизируя пока знак величины $k^2(\xi)$, находим частные решения уравнения (7) в виде [3]:

$$\Phi(\xi) = \exp\left\{i\,\frac{P(\xi)}{\hbar}\right\}, \qquad (8)$$

(функция $P(\xi)$ подлежит определению). Подстановка этого выражения в (7) приводит к уравнению $(P')^2 = k^2(\xi) + i\hbar P''$ (9). Разложим искомую функцию $P(\xi)$ в ряд по степеням малого параметра, в качестве которого используем постоянную $\hbar$: $P = P_0 + \hbar P_1 + \hbar^2 P_2 + \cdots$. В нулевом по $\hbar$ приближении из (9) имеем

$(P_0')^2 = k^2$. Для дальнейших рассуждений необходимо задать знак величины k^2. Пусть $k^2 > 0$. Тогда $P_0 = \pm \int k\, d\xi$ (10). Первое по $\hbar$ приближение уравнения (9) дает $2P_0'P_1' = iP_0''$, откуда с учетом (10) следует, что $P_1 = i \ln \sqrt{k}$. Таким образом, с точностью до величины порядка $\hbar^2$ $P(\xi) = \int k\, d\xi + i\hbar \ln \sqrt{k}$, а частные решения (8) имеют вид

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\left\{\pm \frac{i}{\hbar} \int k\, d\xi\right\}. \tag{11}$$

Используя их, запишем общее решение уравнения (7) для случая $k^2 > 0$:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(C_1 \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int k\, d\xi\right\} + C_2 \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int k\, d\xi\right\}\right). \tag{12}$$

В этом случае происходит более интенсивная передача энергии полю от электронного потока [3], поэтому он представляет наибольший интерес. Аналогично можно показать, что если $k^2 < 0$, то

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(C_1' \exp\left\{\frac{1}{\hbar} \int |k|\, d\xi\right\} + C_2' \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} \int |k|\, d\xi\right\}\right).$$

Средние за период значения полной энергии и скорости электронов определяются выражениями [2]:

$$\bar{\varepsilon} = i\hbar \frac{\int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dz}{\int \psi^* \psi\, dz}; \quad \bar{V} = \frac{i\hbar}{m} \frac{\int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z}\, \partial z}{\int \psi^* \psi\, dz}.$$

Вычисляя интегралы, учитываем, что волновая функция $\psi(\xi)$ нормируется таким образом, чтобы интеграл по периоду от $\psi^*\psi$ равнялся единице. Кроме того, в соответствии с (3)

$$dz = -\frac{2}{\beta_0} d\xi, \text{ поэтому } \int \psi^* \psi\, dz = -\frac{2}{\beta_0}.$$

Так как условие нормировки выполняется и для функции $\Phi(\xi)$, то для средних значений энергии и скорости электронов имеем

$$\bar{\varepsilon} = -\hbar\omega + \frac{i}{2} \hbar\omega_0 \int \Phi^* \Phi'\, d\xi;$$

$$\bar{V} = v_\Phi + \frac{i}{2m} \hbar\beta_0 \int \Phi^* \Phi'\, d\xi.$$

Используя для $\Phi(\xi)$ выражение (11) для случая $k^2 > 0$, находим, что

$$\int \Phi^* \Phi'\, d\xi = -\frac{i}{\hbar} \int k \Phi^* \Phi\, d\xi = -\frac{i}{\hbar} \int |C|^2 d\xi = -\frac{i\pi}{\hbar} |C|^2.$$

С учетом этого результата

$$\bar{\varepsilon} = -\hbar\omega + \frac{\pi}{2} \omega_0 |C|^2; \quad \bar{V} = v_\Phi + \frac{\pi}{2m} \beta_0 |C|^2.$$

Таким образом, средняя скорость электронов равна сумме фазовой скорости волны и некоторой малой добавки, которой для отдельных электронов, движущихся с волной напряжения, можно пренебречь. Если при этом в выражении для средней энергии опустить слагаемое того же порядка малости, то $\bar{\varepsilon} = -\hbar\omega$ (13). При условии, что $|\delta| > 2n^2$, (n равно 0; 1; 2; ...), полосы на плоскости $O\varkappa\delta$, соответствующие периодическому распространению, определяется соотношением $\varkappa = |\delta| + (2n+1)\sqrt{2|\delta|}$. Подставляя сюда значения (6) величин $\varkappa$ и δ и используя (13), получаем

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m}{2}(v_\text{ф}^2 - v_0^2) - eU_1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \sqrt{\frac{eU_1}{mv_\text{ф}^2}},$$

откуда видно, что имеется дискретный набор уровней полной энергии, которой могут обладать электроны, движущиеся с электромагнитной волной. Здесь слагаемое $\frac{m}{2}v^2$ представляет собой классическую кинетическую энергию; член $\frac{m}{2}v_\text{ф}^2 = eU_0$ определяет потенциальную энергию невозмущенного пучка. Последние два слагаемые правой части — это средняя энергия взаимодействия пучка с электромагнитной волной

$$\overline{W}_\text{вз} = -eU_1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \sqrt{\frac{eU_1}{mv_\text{ф}^2}}.$$

Из этого выражения следует, что имеет место неравенство $-eU_1 < \overline{W}_\text{вз} < eU_1$, означающее, что электроны должны захватываться волной напряжения. Дискретные значения этой энергии — возможные уровни энергии гармонических осцилляторов с частотами

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{eU_1}{mv_\text{ф}^2}}$$

и классической равновесной энергией, равной eU_1.

Общее число уровней энергии: $(2N-1)^2 = 2|\delta|$. Максимальный уровень энергии электрона в рассматриваемом случае определяется равенством

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \sqrt{\frac{eU_1}{mv_\text{ф}^2}} = 2eU, \quad n = N - 1.$$

Соответствующая ему область значений коэффициентов уравнения Матье (5) определяется условием $-|\delta| < \varkappa < |\delta|$, из которого следует неравенство

$$\frac{m}{2}(v_\text{ф}^2 - v_0^2) - eU_1 < \overline{W} < -\frac{m}{2}(v_\text{ф}^2 - v_0^2) + eU_1,$$

позволяющее сделать вывод, что захваченными волной могут быть только те электроны, «избыточная» энергия которых (равная разности между потенциальной энергией невозмущенного пучка и классической кинетической энергией электронов, движущихся со скоростью волны напряжения усиливаемого сигнала) не превышает высоты потенциального барьера, соответствующей амплитуде волны напряжения высокочастотного сигнала в области насыщения.

Возвращаясь к вопросу о зависимости электронного КПД от параметра рассинхронизма, проанализируем ее для фиксированного значения параметра пространственного заряда. Захваченный волной электрон с определенным значением «избыточной» энергии при переходе на нижний свободный энергетический уровень отдает высокочастотному полю энергию $\overline{W}_{02}=\frac{m}{2}(v_ф^2-v_0^2)$. Предположим, что это переход с уровня, которому соответствует энергия W' (рис. 2).С увеличением параметра рассинхронизма растут скорости электронов и энергия, которую они могут отдать полю при переходе на нижние энергетические уровни (переходы с уровней W'' и W'''). Естественно, что до определенного момента увеличение параметра рассинхронизма приводит к росту электронного КПД. Этот процесс продолжается до тех пор, пока энергия взаимодействия не сравняется с высотой потенциального барьера, равной eU_1. Дальнейший рост параметра рассинхронизма приводит к тому, что энергия взаимодействия электрона (энергия W_{02} на рис. 1) превышает высоту потенциального барьера, и ранее связанный электрон становится свободным. Связь между коэффициентами уравнения (5) принимает вид неравенства $\varkappa > |\delta|$, из которого следует условие

$$\frac{m}{2}(v_ф^2-v_0^2)>eU_1,$$

определяющее область существования свободных электронов.

Таким образом, электронный КПД достигает максимальное значение, когда параметр рассинхронизма имеет значение, которому соответствует энергия взаимодействия электрона с волной, равная высоте потенциального барьера. Дальнейшее увеличение параметра рассинхронизма приводит к переходу электрона из связанного состояния в свободное, «отрыву» от волны и, как следствие, к спаду электронного КПД. Хотя спад происходит заметно круче, чем нарастание до достижения максимума, электронный КПД не уменьшается до нуля скачком. Это объясняется прежде всего наличием разброса скоростей в сформированном электронном сгустке, из-за которого при переходе основной массы электронов в свободное состояние часть их еще находится в связанном с волной состоянии. Кроме разброса скоростей электронов скачкообразному уменьшению до нуля электронного КПД препятствует также явление подбарьерного отражения электронов.

Список литературы: 1. *Белоус Б. А., Шаворыкина Т. Р.* Определение выходных характеристик лампы с бегущей волной О-типа // Радиотехника. 1985. Вып. 74. С. 34—39. 2. *Шаворыкича Т. Р., Шульга В. Г.* Квантовомеханическая интерпретация процессов в лампе с бегущей волной в квазиклассическом приближении // Радиотехника. 1969. Вып. 10. С. 248—254. 3. *Мигдал А. Б., Крайнов В. П.* Приближенные методы квантовой механики. М., 1966. 152 с.

Поступила в редколлегию 27.10.87