

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування методів нечіткої векторної оптимізації

для складання дієти

(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи ПМм-22-1

Мірошніченко О.О.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність

113 Прикладна математика

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма

Прикладна математика

(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. Матвієнко О.І.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2024 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“06” листопада 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Мірошніченку Олександру Олександровичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування методів нечіткої векторної оптимізації
для складання дієти

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1276 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи набір продуктів, що використовуються для харчування;
вміст корисних речовин у 100 г продукту;
калорійність 100 г продукту (у кілокалоріях);
вартість продуктів;
потреба в корисних речовинах (у грамах) і кілокалоріях.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 9 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Матвієнко О.І.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 52 с., 2 табл., 2 рис., 1 дод., 18 джерел.

ВЕКТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ, ДІЄТА, НЕЧІТКА МНОЖИНА, НЕЧІТКА ОПТИМІЗАЦІЯ, ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ.

Об'єкт дослідження – задачі векторної оптимізації.

Мета роботи – застосування методів нечіткої векторної оптимізації для складання дієти.

Методи дослідження – методи розв'язання задач векторної оптимізації, методи нечіткої логіки.

В кваліфікаційній роботі розв'язана задача розробки умовного денного пайка, що забезпечує потреби людини в корисних речовинах та енергетиці і є найкращим за витратами та вагою, з використанням методів нечіткої векторної оптимізації. За допомогою математичного пакету Wolfram Mathematica розроблено комп'ютерну програму, яка реалізує розв'язок цієї задачі, проаналізовано результати роботи програми.

ABSTRACT

Introductory note: 52 pages, 2 tables, 2 figures, 1 appendix, 18 sources.

VECTOR OPTIMIZATION, DIETA, FUZZY MULTIPLICITY, FUZZY OPTIMIZATION, MAKING DECISIONS.

Object of research – problems of vector optimization.

Purpose of work – application of methods of fuzzy vector optimization for making a diet.

Methods of research – methods of solving vector optimization problems, methods of fuzzy logic.

In the qualification work, the task of developing a conditional daily ration, which provides human needs in nutrients and energy and is the best in terms of costs and weight, is solved, using methods of fuzzy vector optimization. With the help of the mathematical package Wolfram Mathematica, a computer program was developed that implements the solution of this problem, and the results of the program were analyzed.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	10
1.1 Аналіз сучасного стану векторної оптимізації.....	10
1.2 Задача векторної оптимізації	14
1.3 Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації на нечіткій множині альтернатив	16
1.4 Змістовна постановка задачі дослідження	19
1.4.1 Змістовна постановка задачі дослідження	19
1.4.2 Нечітка задача векторної оптимізації з нечітко визначеною метою ..	20
1.5 Постановка задач дослідження	21
2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання	22
2.1 Проблематика та класифікація методів розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації.....	22
2.1.1 Метод адитивної згортки критеріїв.....	23
2.1.2 Метод мультиплікативної та мінімаксної згортки критеріїв.....	24
2.1.3 Метод задоволених вимог (головного критерію)	25
2.1.4 Метод послідовних поступок.....	26
2.1.5 Методи цільового програмування (ідеальної точки).....	27
2.1.6 Метод гарантованого результату.....	28
2.1.7 Метод послідовного вводу обмежень	31
2.2 Метод розв’язання задачі векторної оптимізації з нечіткими вихідними даними	32
Висновки за розділом 2	38
3 Програмна реалізація	39
3.1 Система комп’ютерної алгебри Mathematica	39
3.2 Опис програми	40
Висновки за розділом 3	41

	7
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	42
4.1 Обчислювальний експеримент	42
Висновки за розділом 4	45
Висновки	46
Перелік джерел посилання	47
Додаток А Лістинг програми	49

ВСТУП

Актуальність теми. Практично будь-яка прикладна задача є багатокритеріальною і, як правило, звести її до одного критерію досить складно, оскільки цілей може бути значно більше. В цьому випадку оптимізація проводиться за декількома частковими критеріями, і проблема зводиться до розгляду задачі багатокритеріальної оптимізації. В зв'язку з цим особливого значення в даний час набуває теорія прийняття рішень при наявності багатьох критеріїв.

Багато людей у своєму харчуванні дотримуються певної дієти. Для одних дієти призначаються з медичною метою, інші намагаються схуднути чи, навпаки, набрати вагу, або просто підтримувати свій організм в хорошій формі. Також є спеціальні дієти для спортсменів. Раціон харчування повинен бути складений таким чином, щоб забезпечувати людину усіма поживними речовинами, відповідати її фінансовим можливостям, мати адекватну вагу та об'єм.

При складанні раціону треба враховувати кілька чинників, наприклад, вартість продуктів та вагу. Крім того, багато параметрів, що впливають на результат, визначено неточно. Тому для розв'язання цієї задачі будемо використовувати методи нечіткої векторної оптимізації.

Необхідним етапом розв'язання будь-якої оптимізаційної задачі є збір вихідної інформації, яка в умовах часових обмежень не є повністю визначеною, а носить приблизний, неточний характер. Наразі для розв'язання задач з нечіткими вихідними даними успішно застосовується теорія нечітких множин та нечітка логіка. За допомогою теорії нечітких множин можна апроксимувати будь-яку систему без використання складного математичного апарату, наприклад, диференціального та інтегрального числення, які традиційно застосовуються в теорії управління. Тому використання математичного апарату, який синтезує методи дослідження операцій і методи теорії нечітких множин для прийняття рішень є актуальною проблемою.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є розробка умовного денного пайка, що забезпечує потреби людини в корисних речовинах та енергетиці і є найкращим за витратами та вагою, використовуючи методи нечіткої векторної оптимізації. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі складання раціону;
- розробити математичну модель задачі складання раціону, яка враховує нечіткість вхідних даних;
- обрати метод її розв’язання;
- створити програмний продукт для розв’язання задачі;
- проаналізувати отримані результати.

Об’єктом дослідження є задачі векторної оптимізації.

Предметом дослідження є задачі векторної оптимізації з нечіткими вихідними даними.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи розв’язання задач векторної оптимізації, методи нечіткої логіки.

Публікації. Результати, отримані у роботі, було представлено на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 10-12 травня 2023 р.) [1].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Аналіз сучасного стану векторної оптимізації

Дослідженню та аналізу сучасних методів розв'язання задач векторної оптимізації і проблеми в цілому присвячено багато робіт оглядового характеру у вітчизняній і закордонній літературі. Проте в цих роботах не відображено на достатньому рівні переваги і недоліки зазначених методів. Зупинимось докладніше на цьому питанні.

Уперше проблема багатокритеріальної векторної оптимізації виникла в італійського економіста і соціолога В. Парето при математичному дослідженні товарного обміну. Надалі інтерес до проблеми векторної оптимізації підсилювався у зв'язку з розробкою і широким використанням обчислювальної техніки в роботах економістів-математиків. І вже пізніше стало ясно, що багатокритеріальні задачі виникають не тільки в економіці, але й у техніці: наприклад, при проектуванні технічних систем, при оптимальному проектуванні інтегральних схем, у військовій справі тощо.

Векторна (багатокритеріальна) задача оптимізації лежить в основі математичної моделі, що описує деяку економічну систему або технічний об'єкт. Формалізуємо опис такої математичної моделі.

Нехай $x = x_j, j \in N_n$ — вектор змінних моделі; N_n — множина індексів вектору змінних, який належить простору n - вимірних векторів $x \in R^n$, зазвичай передбачається невід'ємність вектору змінних $x \geq 0$; функціональний взаємозв'язок змінних встановлюється визначеними співвідношеннями, на які накладаються обмеження

$$G(x) \leq b, x \geq 0,$$

де $G(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$ — вектор функцій. Останні нерівності визначають допустиму область X значень змінних x , включену в простір змінних, $X \subset R^n$.

Функціонування системи, технічного об'єкта направлена на виконання зазначених цілей — критеріїв, функціонально зв'язаних з вектором змінних $f_k(x)$, $k \in N_l$, де N_l — множина індексів критеріїв. Множину $f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x)$ критеріїв можна представити у вигляді вектор-функції $F(x) = (f_k(x), k \in N_l)$, який називають векторним критерієм (векторною цільовою функцією). Припускаючи, що кожен компонент векторного критерію спрямований на збільшення (максимізацію) свого значення, задача вибору за багатьма критеріями розв'язується як задача вибору за векторним критерієм $F(x)$ вектору змінних $x \geq 0$ з допустимої області і записується наступним чином:

$$Z(F, G) : \max F(x) = f_k(x), k \in N_l,$$

за умов

$$G(x) \leq b, x \geq 0.$$

Передбачається, що задача $Z(F, G)$ опукла, тобто кожна компонента векторного критерію $F(x)$ — угнута функція, а $g_i(x)$, $i \in N_m$, — опуклі функції.

Множина точок X , що визначають допустиму область вектору змінних, є непорожньою компактною множиною:

$$X = \{x \in R^n \mid x \geq 0, G(x) \leq b\} \neq \emptyset.$$

Звідси випливає, що існує розв'язок задачі $Z(F, G)$ по кожній компоненті векторного критерію $f_k(x)$, $k \in N_l$.

Векторна задача $Z(F, G)$ розглядається для випадку, коли точки оптимуму x^k , $k \in N_l$ отримані при розв'язанні задачі за кожним критерієм $f_k(x)$, $k \in N_l$, окремо, не збігаються (при збігу розв'язок вважається ідеальним). Тому з математичної точки зору векторна задача $Z(F, G)$ є некоректною, тобто якщо один із критеріїв $f_k(x)$, $k \in N_l$, досяг свого оптимуму, то поліпшення інших компонент векторного критерію неможливо.

Звідси випливає, що під розв'язанням векторної задачі $Z(F, G)$ можна розуміти тільки якийсь компромісний розв'язок, що задовольняє в тому чи іншому розумінні усі компоненти векторного критерію. На вирішення цієї проблеми і спрямовані основні методи розв'язання векторних задач оптимізації. Перша спроба формулювання оптимального розв'язку зроблена в роботі В. Парето.

Оптимальність за Парето.

У векторній задачі математичного програмування точка $x^0 \in X$ оптимальна за Парето, якщо вона допустима і не існує іншої точки x' , для якої

$$f_k(x') \geq f_k(x^0), \forall k \in N_l,$$

і хоча б для одного критерію $k \in N_l$ виконується строга нерівність.

Множина таких точок називається множиною $P(F, X)$ точок, оптимальних за Парето, $P(F, X) \subset X$. Їх також називають множиною точок, що непокращуються, тобто не можна знайти іншої такої точки, щоб покращувався який-небудь із критеріїв, а інші при цьому не погіршувалися. Множина точок, оптимальних за Парето, лежить між точками оптимуму, отриманими при розв'язанні векторної оптимізаційної задачі окремо за кожним критерієм.

Звичайно методи розв'язання векторних задач побудовані таким чином, щоб вийти на одну з точок оптимуму за Парето, з огляду на важливість (пріоритетність) того чи іншого критерію $q \in N_l$. В даний час розроблено досить багато методів розв'язання задач векторної оптимізації, але майже всі вони носять евристичний характер. При розробці методів розв'язання векторних задач приходиться вирішувати специфічні проблеми, що так чи інакше зв'язані з вибором принципу оптимальності, який визначає оптимальність того чи іншого розв'язку. Розглянемо ці проблеми.

Нормалізація критеріїв. У векторних задачах оптимізації локальні критерії мають різний фізичний зміст і, як наслідок, вимірюються в різних одиницях, масштаби їх не порівнювані, тому неможливе порівняння якості отриманих результатів за кожним критерієм. Операція зведення масштабів локальних критеріїв до єдиного, зазвичай безрозмірного, зветься нормалізацією. Розв'язання проблеми нормалізації передуює побудові принципу оптимальності.

Вибір принципу оптимальності. У задачах векторної оптимізації принцип оптимальності визначає властивості оптимального розв'язку і дає відповідь на головне питання — у якому розумінні оптимальний розв'язок переважає всі інші допустимі розв'язки і дає правило пошуку цього оптимального розв'язку. Принцип оптимальності — це основна проблема векторної оптимізації. Вона безпосередньо пов'язана з проблемою нормалізації критеріїв. Якщо не виникає проблеми нормалізації критеріїв, то вибір принципу оптимальності ставиться на перше місце.

Урахування пріоритету критеріїв. Зазвичай з фізичного змісту задачі зрозуміло, що локальні критерії мають різну важливість при розв'язанні задачі, тобто один локальний критерій має деякий пріоритет над іншим локальним критерієм. Це, звичайно, варто враховувати при виборі принципу оптимальності і визначенні області можливих розв'язків, віддаючи відому перевагу (пріоритет) більш важливим критеріям. Цю проблему можна сформулювати в такий спосіб: знайти математичне визначення пріоритету і ступінь впливу його на розв'язання задачі векторної оптимізації.

Обчислення оптимуму задачі векторної оптимізації. На сьогодні досягнуті певні успіхи в області розв'язання широкого круга оптимізаційних задач. Але існує багато прикладів, коли обчислювальні методи й алгоритми стають непридатними для розв'язання вказаних задач в результаті невеликих змін і додавань до початкової задачі, тому виникає проблема обчислення оптимуму побудованої задачі векторної оптимізації. Перераховані проблеми так чи інакше зводять багатокритеріальну задачу до однокритеріальної, тобто зводять до проблеми обчислення оптимуму.

Розв'язання перерахованих проблем (а як наслідок, і розвиток методів розв'язання задач векторної оптимізації) відбувається в декількох напрямках. Основні з них:

- методи, що ґрунтуються на згортанні критеріїв у єдиний;
- методи, побудовані на накладенні обмежень на критерії;
- методи цільового програмування;
- методи, засновані на відшуканні компромісного рішення;
- методи, в основі яких лежать людино-машинні процедури прийняття рішень (інтерактивне програмування).

Існують інші класифікації методів розв'язання векторних задач, зокрема в залежності від вигляду наданої інформації про важливість критеріїв та ін.

Широке поширення одержав напрямок, пов'язаний із прийняттям рішень в умовах невизначеності.

1.2 Задача векторної оптимізації

Розглянемо задачу, що часто зустрічається в процесі прийняття рішення про вибір найкращого способу дій у ситуації, коли якість варіанта використання ресурсів оцінюється за допомогою не одного, а кількох кількісних показників – критеріїв ефективності. В цьому випадку стає невизначеним саме поняття оптимальності, не зрозуміло, який варіант вважати

найкращим. Адже найкращий з погляду деяких з критеріїв спосіб дій може виявитися дуже поганим за іншими критеріям.

Задачі такого типу називаються векторними задачами (багатокритеріальної) оптимізації [2].

Наведемо формулювання задачі векторної оптимізації.

Є множина альтернатив $V = u, v, t, \dots$. Є також кілька функцій $f_1(u), f_2(u), \dots, f_k(u)$, областю визначення яких є множина V . Ці функції називаються частинними критеріями.

Розглянемо векторний критерій:

$$F(u) = f_1(u), f_2(u), \dots, f_k(u) .$$

Потрібно вибрати у множини V альтернативу, найкращу в значенні векторного критерію $F(u)$.

Один із підходів до вирішення цієї задачі, запропонований у [2], заснований на тому, що з допомогою деякої функції k змінних здійснюється згортка векторного критерію та перехід до задачі з одним критерієм.

Розглянемо функцію $G(x_1, x_2, \dots, x_k)$, за допомогою якої можна перейти до одного критерію $H(u)$, здійснивши згортку векторного критерію за формулою:

$$H(u) = G(f_1(u), f_2(u), \dots, f_k(u)) .$$

Існують різні способи побудови згорток. Часто як згортка використовується лінійна функція k змінних:

$$H(u) = \sum_{i=1}^k \delta_i f_i(u),$$

$$\delta_i \geq 0 \text{ для будь-якого } i \text{ та } \sum_{i=1}^k \delta_i = 1 .$$

Коефіцієнт δ_i відображає важливість частинного критерію $f_i(u)$.

Зауважимо, що для використання такої згортки необхідно, щоб:

- всі частинні критерії були максимізовані (мінімізовані), тобто чим краще (гірше) за даним частинним критерієм варіант, тим більше (менше) значення критерію;

- всі частинні критерії мали однакову розмірність (були б безрозмірними величинами).

У літературі з векторної оптимізації пропонуються численні підходи, що дозволяють так перетворити вихідні критерії, щоб зазначені вимоги виконувались.

1.3 Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації на нечіткій множині альтернатив

Під задачею багатокритеріальної оптимізації розуміють задачу відшукування мінімуму або максимуму векторного критерію на допустимій множині альтернатив. За допомогою векторної цільової функції формально представляється одна з основних властивостей альтернатив: цінність, корисність, вартість й ін. Нечіткість у постановці задачі багатокритеріальної оптимізації може бути як в описі множини альтернатив, так і в описі векторної цільової функції. Різні форми опису вихідної інформації обумовлюють існування різних формулювань нечітких задач оптимізації:

- а) задача досягнення нечітко поставленої мети при нечітких обмеженнях;
- б) задача нечіткої оптимізації при нечіткій множині допустимих альтернатив;

- в) нечіткий варіант стандартної задачі оптимізації з «пом'якшенням» критеріїв й/або обмежень, де замість задачі оптимізації розв'язується задача задоволення мети й відповідні нерівності для цільової функції й обмежень можуть порушуватися;

- г) задача векторної оптимізації з нечіткими коефіцієнтами та ін.

Розглянемо задачу максимізації векторної функції F на нечітко заданій евклідовій комбінаторній множині X .

Багатокритеріальна задача комбінаторної оптимізації має вид:

$$Z(F, X) : \max \{ F(x) \mid x \in X \subset R^n \}, F(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x)),$$

$$f_i : R^n \rightarrow R, i \in N_1, X = \text{vert} \Pi_{nk}(A) \cap D \neq \emptyset, \Pi_{nk}(A) = \text{conv} P_{nk}(A),$$

де $P_{nk}(A)$ – комбінаторна множина перестановок;

$D \subset R^n$ – опуклий многогранник.

На множині X задана нечітка підмножина $\tilde{X} = \{x, \mu_{\tilde{X}}(x)\}$, де $x \in X$, а $\mu_{\tilde{X}}(x) : X \rightarrow [0, 1]$ — функція приналежності множини \tilde{X} , що називається нечіткою множиною альтернатив. Під максимізацією будемо розуміти вибір нечіткої підмножини R з нечіткої множини \tilde{X} , якій відповідає найбільше значення, як векторної функції F , так і функції приналежності $\mu_{\tilde{X}}(x)$ нечіткій множині альтернатив. Ці альтернативи в задачах багатокритеріальної оптимізації залежно від способу їх порівняння називаються ефективними (оптимальними за Парето), слабо ефективними (за Слейтером), строго ефективними (за Смейлом) і відповідно позначаються: $P(F, \tilde{X})$, $Sl(F, \tilde{X})$, $Sm(F, \tilde{X})$.

Альтернатива $x^* \in \tilde{X}$ називається ефективною, якщо не існує іншої альтернативи $x \in \tilde{X}$ такої, що: $F(x) \geq F(x^*)$, $\mu_{\tilde{X}}(x) \geq \mu_{\tilde{X}}(x^*)$ і хоча б одна нерівність строга; слабо ефективною, якщо $\exists x \in \tilde{X} : F(x) > F(x^*)$, $\mu_{\tilde{X}}(x) > \mu_{\tilde{X}}(x^*)$ і строго ефективною, якщо $\exists x \in \tilde{X} : x \neq x^*, F(x) \geq F(x^*), \mu_{\tilde{X}}(x) \geq \mu_{\tilde{X}}(x^*)$.

З означень випливає, що $Sm(F, \tilde{X}) \subset P(F, \tilde{X}) \subset Sl(F, \tilde{X})$.

Вхідну задачу $Z(F, X)$ представимо у вигляді $(l + 1)$ – критеріальної задачі: $F(x) \rightarrow \max, \mu_{\tilde{X}}(x) \rightarrow \max, x \in \tilde{X}$.

Під розв'язком задачі з нечіткою множиною альтернатив розуміємо нечітку множину з функцією приналежності:

$$\mu(x) = \mu_{\tilde{X}}(x) \mid x \in P(F, \tilde{X}) \vee 0 \mid x \notin P(F, \tilde{X}) .$$

Таким чином, нечітка підмножина розв'язків буде містити в собі ті і тільки ті альтернативи універсальної множини X , які визначають значення векторної функції $F(x)$ й функції приналежності $\mu_{\tilde{X}}(x), x \in X$, що не покращуються одночасно.

Слід зазначити, що нечіткий варіант цієї задачі означає, що обмеження пом'якшуються, тобто допускається можливість їх порушення з тим або іншим ступенем.

Нехай $P(\alpha)$ – множина всіх ефективних альтернатив $(l+1)$ – критеріальної задачі:

$$\begin{aligned} y_i &\rightarrow \max, i \in N_l, \mu_D(x) \rightarrow \max, \\ F(x, y) &\geq \alpha, x \in X, y = (y_1, \dots, y_l) \in Y. \end{aligned}$$

Тоді, розв'язком векторної задачі нечіткої оптимізації з нечіткою множиною альтернатив і ступенем недомінованості альтернатив, не менше α називається нечітка множина з функцією приналежності виду:

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{X}}(x), & x \in P_\alpha(F, \tilde{X}), \\ 0, & x \notin P_\alpha(F, \tilde{X}). \end{cases}$$

Таким чином, нечітка множина розв'язків вхідної задачі буде містити в собі тільки ті альтернативи зі ступенем недомінованості не менше α , які будуть ефективним як за оцінками альтернатив $y_i, i \in N_l$, так і за функцією

приналежності $\mu_{\tilde{X}}(x)$ нечіткій множині альтернатив. Вибір з них деякої конкретної альтернативи здійснюється за допомогою методів багатокритеріальної оптимізації. Більш того, замість задачі максимізації векторної цільової функції можна ставити задачу досягнення якогось наперед заданого значення векторного критерію, що відповідає задоволенню вхідної мети.

1.4 Змістовна та формальна постановка задачі дослідження

1.4.1 Змістовна постановка задачі дослідження

Вербальна постановка задачі: розробити денний раціон, що забезпечує потреби в корисних речовинах та енергетиці і є найкращим за витратами та вагою.

Вхідними даними є:

- набір продуктів, що використовуються для харчування;
- вміст корисних речовин у 100 г продукту;
- калорійність 100 г продукту (у кілокалоріях);
- вартість продуктів;
- потреба в корисних речовинах (у грамах) і кілокалоріях.

Вихідними даними є: набір продуктів та їх вага.

Розглянемо задачу вибору найкращої альтернативи із заданої нечіткої множини альтернатив з функцією приналежності, що визначена на універсальній множині. Вважатимемо, що якість альтернативи оцінюється за допомогою частинних критеріїв ефективності. Ціль в цій задачі є визначеною нечітко. Для розв'язання цієї задачі скористаємося ідеєю Заде – Беллмана [1 – 3], згідно з якою нечітким розв'язком розглянутої задачі є перетин нечіткої цілі та нечіткої множини альтернатив.

У випадку задачі з критеріями ефективності як нечітку ціль пропонується розглядати перетин нечітких множин – нечітких частинних цілей, визначених частинними критеріями ефективності, тобто виходити з того, що ціль досягається з потрібною надійністю, якщо з цією надійністю досягається кожна з частинних цілей.

1.4.2 Нечітка задача векторної оптимізації з нечітко визначеною метою

Розглянемо задачу вибору найкращої альтернативи із заданої нечіткої множини альтернатив \hat{C} з функцією приналежності $\mu_{\hat{C}} x$, що визначена на універсальній множині X , при цьому будемо виходити з того, що якість альтернативи оцінюється за допомогою n частинних критеріїв ефективності: f_1, f_2, \dots, f_n . Мета в цій задачі є визначеною нечітко. Для розв'язання цієї задачі скористаємося ідеєю Заде – Беллмана [2], [7], згідно з якою нечітким рішенням розглянутої задачі є перетин нечіткої мети та нечіткої множини альтернатив \hat{C} .

У випадку задачі з n критеріями ефективності як нечітку ціль \hat{G} пропонується розглядати перетин нечітких множин $\hat{G}_i, i = 1, 2, \dots, n$ — нечітких частинних цілей, визначених частинними критеріями ефективності f_1, f_2, \dots, f_n , тобто виходити з того, що ціль досягається з потрібною надійністю, якщо з цією надійністю досягається кожна з частинних цілей. Позначимо функцію приналежності нечіткої множини \hat{G}_i через μ_i , тоді отримаємо, що

$$\mu_{\hat{G}} x = \min\{\mu_1 x, \mu_2 x, \dots, \mu_n x\}.$$

Під нечітким рішенням розглянутої задачі будемо розуміти перетин нечіткої мети та нечіткої множини альтернатив. Тоді функція приналежності $\mu_{\hat{D}} x$ нечіткого рішення \hat{D} задачі матиме вид:

$$\mu_{\bar{D}} x = \min\{\mu_{\bar{G}} x, \mu_{\bar{C}} x\}.$$

Як рішення задачі пропонується обирати альтернативу x , для якої значення функції $\mu_{\bar{D}} x$ є максимальним.

1.5 Постановка задач дослідження

Для досягнення поставленої у кваліфікаційній роботі мети необхідно розв'язати такі задачі дослідження:

- визначити вхідні та вихідні дані задачі складання раціону;
- розробити математичну модель задачі складання раціону, яка враховує нечіткість вхідних даних;
- обрати метод її розв'язання;
- створити програмний продукт для розв'язання задачі;
- проаналізувати отримані результати.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Проблематика та класифікація методів розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації

При розв'язанні задач багатокритеріальної оптимізації доводиться вирішувати специфічні питання, пов'язані з невизначеністю цілей і несумісністю критеріїв.

Основні проблеми, що виникають при розробці методів багатокритеріальної оптимізації:

а) проблема нормалізації критеріїв, тобто їх зведення до єдиного (безрозмірного) масштабу виміру;

б) проблема вибору принципу оптимальності, тобто встановлення, у якому сенсі оптимальний розв'язок кращий від всіх інших;

в) проблема визначення пріоритетів критеріїв, що виникає в тих випадках, коли з фізичного змісту зрозуміло, що деякі критерії мають пріоритет над іншими;

г) проблема визначення оптимуму задачі багатокритеріальної оптимізації. Мова йде про те, як використати методи лінійної, нелінійної, дискретної оптимізації для визначення оптимуму задач із певною специфікою.

При розв'язанні багатокритеріальної задачі часто виникає необхідність нормалізації (нормування) критеріїв $f_k(x)$, тобто зведення всіх критеріїв до єдиного масштабу та безрозмірного виду. Надалі будемо вважати, що всі критерії невід'ємні, тобто $f_k \geq 0$ для всіх $x \in X$.

Найчастіше використовується заміна критеріїв їх безрозмірними відносними величинами: $\lambda_k(x) = \frac{f_k(x)}{f_k^*}$, де $f_k^* = \max_{x \in X} f_k(x)$. Нормалізовані критерії мають дві важливі властивості: по-перше, вони є безрозмірними величинами, і, по-друге, вони задовольняють нерівності $0 \leq \lambda_k(x) \leq 1$ для кожного $x \in X$. Ці властивості дозволяють порівнювати критерії між собою.

Основні методи, що застосовуються при розв'язанні задач багатокритеріальної оптимізації, представлені наступною схемою (рис. 2.1).

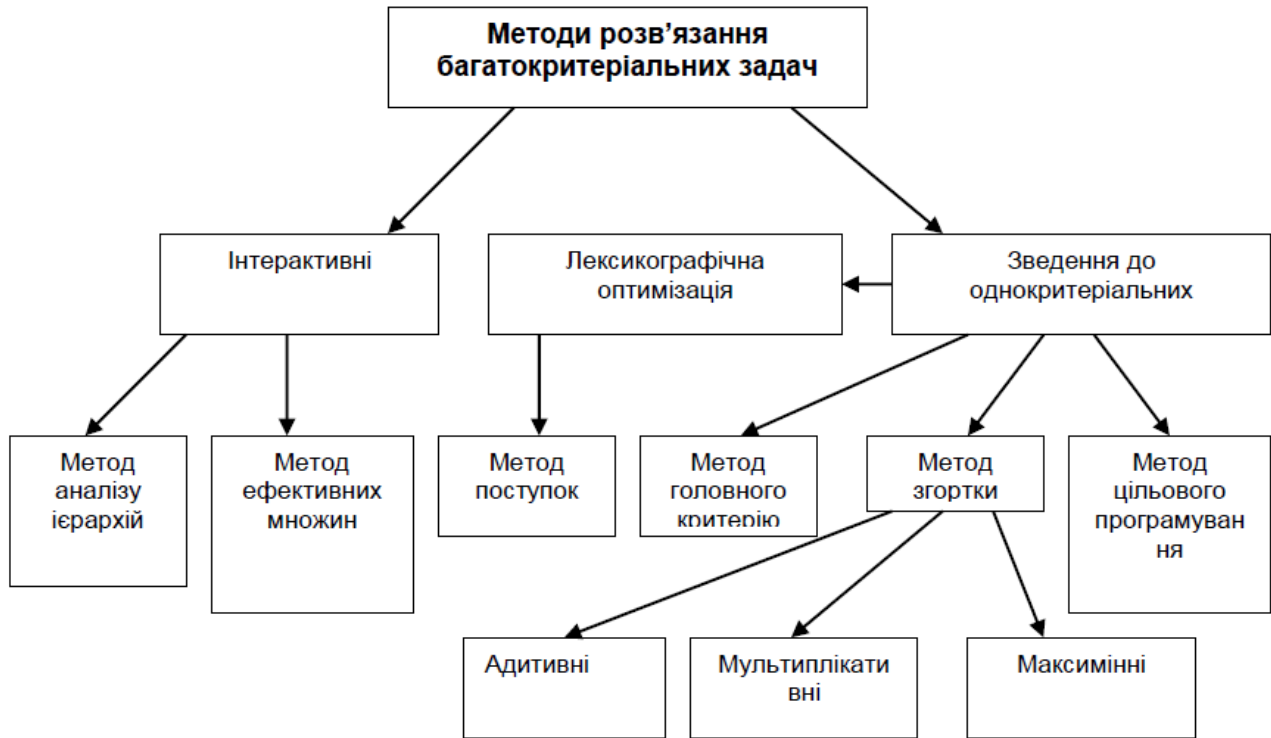


Рисунок 2.1 – Основні методи розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації

2.1.1 Метод адитивної згортки критеріїв

Нехай критерії порівнянні, наприклад, нормовані й визначений вектор вагових коефіцієнтів критеріїв $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$, координати якого характеризують важливість відповідного критерію. Тобто $\alpha_i \geq \alpha_j$, якщо критерій f_i є переважніший ніж f_j . При цьому

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0.$$

Для адитивного методу будується нова цільова функція.

$$F(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k f_k(x).$$

і розв'язується задача оптимізації скалярного критерію $F(x) \rightarrow \max$, при умові $x \in X$.

Основною перевагою адитивної згортки є те, що з нею пов'язані «класичні», достатні і необхідні, умови оптимальності за Парето. Але, водночас, при цьому часто отриманий розв'язок є нестійким, тобто малим приростам вагових коефіцієнтів відповідають великі прирости цільових функцій.

2.1.2 Метод мультиплікативної та мінімаксної згортки критеріїв

Для мультиплікативного методу підхід до розв'язання аналогічний, тільки цільова функція має вигляд:

$$F = \prod_{k=1}^K f_k^{\alpha_k}(x),$$

причому

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0.$$

Логічним поясненням мультиплікативного методу є уявлення про ваги критеріїв, як про ймовірності досягнення деяких показників якості. Але використання цієї згортки призводить до нелінійної цільової функції.

Крім того, досить часто використовують мінімаксну згортку

$$F = \max_{k \in [1, K]} f_k(x) \rightarrow \min ,$$

та згортку мінімальної оптимальності

$$F = \sum_{k=1}^K f_k(x) \rightarrow \min .$$

Основний і дуже істотний недолік методів згортання критеріїв полягає в суб'єктивності вибору коефіцієнтів α_k .

2.1.3 Метод задоволених вимог (головного критерію)

Визначається основний (головний) серед критеріїв. Наприклад, $f_1(x)$. Всі інші цільові функції переводяться в розряд обмежень за наведеним нижче правилом.

Відповідно до вимог особи, що приймає рішення, на всі критерії накладаються певні обмеження, яким вони повинні задовольняти. Вводиться система контрольних показників (мінімально допустимих рівнів) \tilde{f}_k і вважається, що за всіма критеріями повинні бути досягнуті значення, не менші заданих:

$$f_k(x) \geq \tilde{f}_k, k = 1, 2, \dots, K .$$

Після вибору основного критерію та встановлення нижніх границь для інших критеріїв розв'язується задача однокритеріальної оптимізації:

$$f_1(x) \rightarrow \max,$$

при умовах

$$\begin{cases} f_k(x) \geq \tilde{f}, k = 1, 2, \dots, K, \\ x \in X. \end{cases}$$

Цей метод найчастіше використовується в інженерній практиці.

Зауважимо, що основним недоліком є те, що отриманий розв'язок може і не бути ефективним.

2.1.4 Метод послідовних поступок

Критерії нумеруються в порядку спадання важливості. Нехай критерії f_1, f_2, \dots, f_K вже записані в порядку зменшення їх важливості.

Крок 1. Розв'язується однокритеріальна задача за 1-м критерієм:

$$z_1^* = \max_{x \in X} f_1(x).$$

Крок 2. Призначається розумна з інженерної точки зору поступка Δz_1 , складається й розв'язується нова задача оптимізації за 2-м критерієм:

$$z_2^* = \max_{\substack{x \in X \\ f_1(x) \geq z_1^* - \Delta z_1}} f_2(x).$$

Крок 3. Призначається поступка для 2-го критерію Δz_2 , складається й розв'язується задача оптимізації за 3-м критерієм: $z_3^* = \max_{\substack{x \in X \\ f_1(x) \geq z_1^* - \Delta z_1, \\ f_2(x) \geq z_2^* - \Delta z_2}} f_3(x).$

Процес призначення поступок за кожним критерієм і розв'язків однокритеріальних задач триває до останнього K -го кроку.

Крок K . Призначається поступка для K -1-го критерію Δz_{K-1} , складається й розв'язується задача оптимізації за останнім K -им критерієм:

$$z_K^* = \max_{x \in X} f_K(x).$$

$$\begin{aligned} & f_1(x) \geq z_1^* - \Delta z_1, \\ & f_2(x) \geq z_2^* - \Delta z_2, \\ & f_{K-1}(x) \geq z_{K-1}^* - \Delta z_{K-1}. \end{aligned}$$

Основний недолік методів, що використовують обмеження критеріїв, полягає в суб'єктивності вибору контрольних показників та в суб'єктивності вибору поступок. При використанні методу послідовних поступок варто пам'ятати, що поступки можуть бути непорівнянні між собою, тому треба попередньо організувати нормалізацію критеріїв. Крім того, в загальному випадку вже з 2-го кроку розв'язок може бути не оптимальним за Парето.

2.1.5 Методи цільового програмування (ідеальної точки)

Назва цієї групи методів пов'язана з тим, що особа, що приймає рішення, задає певні цілі $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_K$ для кожного критерію. Розглядувані методи не використовують допоміжну інформацію від особи, що приймає рішення, про перевагу на множині критеріїв. Це може відбуватися, коли в особи, що приймає рішення, або інформація відсутня, або її не можна застосувати з деяких причин. Робиться припущення про наявність, так званого, "оптимального" розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації, який може бути знайдено шляхом перетворення багатокритеріальної задачі у відповідну скаляризовану (однокритеріальну) задачу.

Задача багатокритеріальної (векторної) оптимізації в цьому випадку перетвориться в задачу мінімізації суми відхилень із деяким показником p :

$$F(x) = \left(\sum_{k=1}^K w_k |f_k(x) - \bar{f}_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow \min, \text{ при } x \in X,$$

де w_k – деякі вагові коефіцієнти, що характеризують важливість критерію.

Цю задачу можна конкретизувати залежно від значень параметру p та заданих цілей. Зокрема, при $p = 2$ і $w_k = 1$ одержимо задачу мінімізації суми квадратів відхилень:

$$F(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^K |f_k(x) - f_k^*|^2} \rightarrow \min \text{ при } x \in X,$$

в якій мінімізується евклідова відстань від множини досяжності F до «абсолютного максимуму» (ідеальної точки) $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_l^*)$ в просторі критеріїв. Тут $f_k^* = \max_{x \in X} f_k(x)$. Тобто, правило вибору компромісу R у цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка має оцінку, що є найближчою до ідеальної точки в деякій метриці.

Ускладнення, обумовлені несумірністю величин $|f_k(x) - f_k^*|$, можна перебороти за допомогою нормалізації критеріїв, розглядаючи наступну задачу оптимізації:

$$F(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^K \left(\frac{|f_k(x) - f_k^*|}{f_k^*} \right)^2} \rightarrow \min \text{ при } x \in X.$$

2.1.6 Методи гарантованого результату

Розглядаються методи, які дають найкращий результат навіть для самого найменшого із критеріїв, тобто, компромісний розв'язок отримується шляхом розв'язання наступної задачі оптимізації: $z = \min_{k=1,2,\dots,K} f_k(x) \rightarrow \max \text{ при } x \in X$.

За деякими джерелами, з урахуванням нормалізації критеріїв методи гарантованого результату утворюють найбільш перспективний напрямок у розв'язанні задач багатокритеріальної (векторної) оптимізації.

Для нормалізованих критеріїв $\lambda_k(x) = \frac{f_k(x)}{f_k^*}$, де $f_k^* = \max_{x \in X} f_k(x)$,

максимінна задача формулюється у вигляді:

$$z = \min_{k=1,2,\dots,K} \lambda_k(x) \rightarrow \max \text{ при } x \in X. \quad (2.1)$$

Зупинимося на розгляді двох випадків, коли критерії рівнозначні та нерівнозначні (із заданим пріоритетом).

Рівнозначні критерії. Задача (2.1) еквівалентна задачі

$$z = \lambda \rightarrow \max, \quad (2.2)$$

при умовах

$$\begin{cases} \lambda \leq \lambda_k(x), k = 1, 2, \dots, K, \\ x \in X. \end{cases} \quad (2.3)$$

Задача (2.2) – (2.3) називається λ -задачею. Вона має лінійну цільову функцію та $m + K$ обмежень. Якщо всі функції f_k й g_i лінійні, то λ -задача відноситься до лінійного програмування. У цьому випадку доведено, що оптимальний розв'язок x^* λ -задачі оптимальний за Парето.

Критерії із заданим пріоритетом. Розглянемо тільки два критерії $f_1(x)$ та $f_2(x)$, і нехай $\lambda_1(x)$ й $\lambda_2(x)$ – відповідні нормалізовані критерії. Розіб'ємо допустиму область на дві частини $X = X_1 \cup X_2$ так, щоб в області X_1 виконувалась нерівність $\lambda_1(x) > \lambda_2(x)$, тобто перший критерій мав пріоритет над другим, а в області X_2 виконувалась нерівність $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x)$, тобто другий критерій мав пріоритет над першим.

Для числової характеристики пріоритету вводиться коефіцієнт зв'язку $p(x) : \lambda_1(x) = p(x)\lambda_2(x)$, що показує, у скільки разів відносна оцінка $\lambda_1(x)$ більша $\lambda_2(x)$. Якщо x^* – оптимальна точка для рівнозначних критеріїв, то $p(x^*) = 1$.

Якщо x_1^* – точка оптимуму за 1-м критерієм, де $\lambda_1(x_1^*) = 1$, $\lambda_2(x_1^*) < 1$, тобто $x_1^* \in X_1$, і значить $p(x_1^*) > 1$. Аналогічно, якщо x_2^* – точка оптимуму за 2-м критерієм, де $\lambda_1(x_2^*) < 1$, $\lambda_2(x_2^*) = 1$, то значить $p(x_2^*) < 1$.

Нехай перший критерій має пріоритет над другим. Тоді коефіцієнт $p(x)$ необхідно задати в інтервалі $(1; p(x_1^*))$, а далі скласти й розв'язати λ -задачу, включивши в систему обмежень рівність $\lambda_1(x) = p(x)\lambda_2(x)$. В результаті одержимо точку x^* , що буде належати множині X_1 , де 1-ий критерій має пріоритет над 2-им.

Доведено, що для опуклих задач багатокритеріальної (векторної) оптимізації точка x^* , що є розв'язком λ -задачі, єдина й оптимальна за Парето.

Недолік розглянутого методу полягає в суб'єктивності задання коефіцієнта зв'язку $p(x)$.

Розв'язок задачі багатокритеріальної (векторної) оптимізації методом гарантованого результату, як правило, проходить наступні етапи:

- розробка математичної моделі системи на основі заданих цілей та обмежень; при цьому часто використовується думка експертів;
- попередній аналіз системи окремо за кожним частковим критерієм; використовують методи й програмні засоби однокритеріальної оптимізації;
- нормалізація критеріїв;
- розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації при рівнозначних критеріях;
- визначення пріоритетів критеріїв і розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації із призначеними пріоритетами.

2.1.7 Метод послідовного вводу обмежень

Характерною особливістю цієї діалогової процедури є послідовне (на кожному кроці) введення обмежень на альтернативи, які мають незадовільні, з точки зору особи, що приймає рішення, значення критеріїв.

k -й крок ($k = 1, 2, \dots$). Обчислюються оптимальні значення кожного критерію окремо на «уточненій» множині альтернатив:

$$f_i^{*(k)} = \max_{x \in G_k} f_i(x), \quad i = \overline{1, m}; \quad G_1 \equiv X;$$

і формується вектор "ідеальної" оцінки на уточненій множині альтернатив:

$$f^{*(k)} = (f_1^{*(k)}, \dots, f_m^{*(k)}). \text{ Далі визначається вагові коефіцієнти критеріїв } \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)}$$

наступним способом. Складається матриця $\sigma^{(k)} = (\sigma_{ij}^{(k)})_{i,j=\overline{1,m}}$ переваг особи, що приймає рішення, на множині критеріїв, кожна пара симетричних елементів якої $(\sigma_{ij}^{(k)}, \sigma_{ji}^{(k)})$ характеризує відносну важливість i -го критерію у порівнянні з j -м. Значення кожної пари елементів цієї матриці вибирається так: (8,1) – при переважній перевазі i -го критерію над j -м; (4,1) – при значній перевазі; (2,1) – при "звичайній" перевазі; (1,1) – при рівноцінності критеріїв. Тепер розраховуються

вагові коефіцієнти критеріїв за наступною формулою:

$$\alpha_i^{(k)} = \left(\sum_{s=1}^m \sigma_{is} \right) / \left(\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \sigma_{rs} \right), \quad i = \overline{1, m}. \text{ У результаті розв'язку задачі:}$$

$\max_{x \in G_k} \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(k)} f_i(x)$, визначається альтернатива x^k та її оцінка

$$y^k = (f_1(x^k), \dots, f_m(x^k)).$$

Особа, що приймає рішення, аналізує отриману альтернативу та оцінку y^k шляхом її співставлення з «ідеальною» оцінкою $f^{*(k)}$. Якщо оцінка y^k

задовольняє особу, що приймає рішення, то процедура закінчується, а альтернатива x^k приймається за розв'язок вихідної задачі. Інакше, вказується номер $s \in 1, \dots, m$ критерію, значення якого найменш, на думку особи, що приймає рішення, його задовольняє; визначається, до якого рівня ξ_s потрібно покращити значення цього критерію, формується нова "уточнена" множина альтернатив $G_{k+1} = \{x \in G_k \mid f_s(x) \geq \xi_s\}$ і здійснюється перехід на наступний крок.

Основними недоліками даного методу є те, що потрібна різна додаткова інформація від особи, що приймає рішення, та отриманий розв'язок не завжди буде Паретівським.

2.2 Метод розв'язання задачі векторної оптимізації з нечіткими вихідними даними

Під час організації матеріально-технічного забезпечення часто доводиться враховувати кілька чинників (узагалі кажучи, суперечливих), що характеризують якість ухвалених рішень, наприклад, оперативну та економічну ефективність. Крім того, багато параметрів, що впливають на результат, визначено неточно.

Розглянемо один підхід до розв'язання таких задач.

Нехай частинні критерії ефективності та множина альтернатив задані за допомогою лінійних функцій.

Розглянемо для простоти задачу з двома частинними мінімізованими критеріями і з чіткою множиною допустимих планів (з чіткою множиною альтернатив):

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min, \\ f_2(x) = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \rightarrow \min, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Через $\mu_l(x)$ ($l=1,2$) позначимо функцію приналежності нечіткої множини, що формалізує частинну нечітку мету задачі, визначену частинним критерієм f_l . Будемо припускати, що функції μ_l є спадними функціями свого аргументу і що мінімальне значення цих функцій дорівнює нулю, а максимальне - одиниці.

Будемо характеризувати ступінь приналежності альтернативи нечіткій меті значенням відповідного нормованого критерію, наприклад, для критерію $f(x)$, що мінімізується, можна використовувати формулу

$$\mu(x) = \frac{f^{\max} - f(x)}{f^{\max} - f^{\min}},$$

для критерію, що максимізується, формулу

$$\mu(x) = \frac{f(x) - f^{\min}}{f^{\max} - f^{\min}},$$

де f^{\max} і f^{\min} – відповідно максимальне і мінімальне значення критерію f , якщо в задачі (2.1) залишити тільки один цей критерій і прибрати інший (інші).

Будемо припускати, що $d_j \geq 0, a_{ij} \geq 0, b_i \geq 0$ для $i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$.

Розглянемо сімейство задач, що залежать від параметра $E, 1 \geq E \geq 0$:

оптимальний план x^{*k} задачі (2.3), обчислюємо $\mu_1(x^{*k})$ і $\mu_2(x^{*k})$ і знаходимо $\mu_{\hat{D}}(x^{*k})$:

$$\mu_{\hat{D}}(x^{*k}) = \min \{ \mu_1(x^{*k}), \mu_2(x^{*k}) \},$$

тобто для x^{*k} визначаємо значення функції приналежності нечіткому розв'язку.

Якщо x^{**} – план, за якого значення $\mu_{\hat{D}}(x^{*k})$ максимальне, тобто

$$\mu_{\hat{D}}(x^{**}) = \max_{1 \leq k \leq n} \mu_{\hat{D}}(x^{*k}),$$

то він вважається розв'язком задачі (2.1).

Розглянемо задачу векторної оптимізації з p частинними критеріями і множиною альтернатив $X = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq e_j, j = 1, 2, \dots, \omega\}$:

$$\begin{cases} f_i(x) \rightarrow \max, i = 1, 2, \dots, p, \\ g_j(x) \leq e_j, j = 1, 2, \dots, \omega, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n. \end{cases} \quad (2.4)$$

Позначимо: $\hat{G}_i (i = 1, 2, \dots, p)$ – нечітка множина, що формалізує частинну нечітку мету, що визначається частинним критерієм ефективності f_i ; μ_i – функція приналежності нечіткої множини \hat{G}_i ; \hat{G} – нечітка множина, що формалізує нечітку мету; $\mu_{\hat{G}}$ – функція приналежності нечіткої множини мети; \hat{X}_j – нечітка множина, що визначається умовою $g_j(x) \leq e_j, j = 1, 2, \dots, \omega$; μ_{p+j} – функція приналежності нечіткої множини X_j .

Для розв'язання задачі (2.4) скористаємося ідеями, викладеними в [9].

Відповідно до них розв'яжемо задачу (2.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\hat{D}}(x) = \min \{ \mu_1(x), \dots, \mu_p(x); \mu_{p+1}(x), \mu_{p+2}(x), \dots, \mu_{p+\omega}(x) \} \rightarrow \max, \\ g_j(x) \leq e_j, j = 1, 2, \dots, \omega, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Для розв'язання ж задачі (2.5) пропонується розв'язати задачу (2.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow \max, \\ \mu_i(x) \geq E, i = 1, 2, \dots, p, \\ \mu_{p+j}(x) \geq E, j = 1, 2, \dots, \omega, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Нехай x^* – оптимальний план задачі (2.5), тоді x^* – оптимальний план задачі (2.6).

Нехай (E^0, x^0) – оптимальний план задачі (2.6), тоді E^0 – оптимальне значення цільової функції цієї задачі. Нехай E^* – максимальне значення цільової функції задачі (3.4), тобто $\mu_{\hat{D}}(x^*) = E^*$. Так як $\mu_i(x^*) \geq E^*$ за будь-якого $i = 1, 2, \dots, p + \omega$, то (E^*, x^*) – допустимий план задачі (2.6) і, отже, максимальне значення E^0 цільової функції задачі (2.6) не менше E^* , тобто

$$E^0 \geq E^*.$$

Оскільки (E^0, x^0) – оптимальний план задачі (2.6), то $\mu_i(x^0) \geq E^0$ для $i = 1, 2, \dots, p + \omega$ та існує таке l , що $\mu_l(x^0) = E^0$. Якщо $E^0 > E^*$, то

$$\min_{1 \leq i \leq \omega} \mu_i(x^0) = E^0 > E.$$

Але тоді x^* – неоптимальний план у задачі (2.5), що суперечить нашому припущенню. Отже, $E^0 = E^*$ і x^* – оптимальний план задачі (2.6).

Очевидно, що оптимальний план задачі (2.6) є оптимальним планом задачі (2.5).

Висновки за розділом 2

У розділі було представлено опис проблематики та класифікації методів розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, наведено опис основних методів розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, також було описано метод розв'язання задачі векторної оптимізації з нечіткими вихідними даними.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica

За своєю сутністю Mathematica являє собою мову програмування надвисокого рівня, яка дозволяє реалізувати процедурний та функціональний стилі програмування, а також об'єктно-орієнтований стиль. За своїми можливостями мова програмування Mathematica значно перевищує розповсюджені C++, Basic, Java, тощо.

Завдяки такому поєднанню Mathematica протягом останнього десятиліття міцно утримує лідируючу позицію серед аналогічних програм.

Міць системи Mathematica як інструмента для розв'язку математичних задач зумовлена великою кількістю готових процедур, які реалізують різноманітні перетворення та обчислення (як чисельні, так і аналітичні). Серед них — операції математичного аналізу, лінійної алгебри, тощо.

Ще однією важливою особливістю системи комп'ютерної алгебри Mathematica є велика кількість пакетів розширень (стандартних «Add-on» та додаткових) для застосування її у фізиці, статистиці та інших науках.

Можливості системи Mathematica в області розв'язування задач оптимізації досить обмежені, відсутні вбудовані функції реалізації більшості методів. Однак, слід мати на увазі, що система Mathematica має великі можливості реалізації будь-яких методів засобами програмування на її мові. Більше того, існує можливість розв'язувати задачі оптимізації в аналітичному вигляді. Можливості системи комп'ютерної алгебри Mathematica розв'язувати задачі оптимізації за допомогою її вбудованих функцій обмежується зазвичай такими випадками:

- пошук максимального та мінімального числа з множини чисел, представлених у вигляді векторів або матриць;
- визначення локального мінімуму або максимуму аналітичної функції;

– визначення глобального мінімуму або максимуму аналітичної функції, зокрема, розв’язування оптимізаційних задач лінійного програмування.

Такий набір функціоналу цілком підходить для використання та можна застосовувати для створення програмного продукту «Складання раціону».

3.2 Опис програми

Програмна реалізація складається з двох частин: для версій Mathematica до версії 12 та після. Для старіших версій Mathematica в ролі оптимізації вибору найкращого результату буде виступати вбудовані функції FindMaximum і FindMinimum. Для версій Mathematica 12 і новіше у ролі оптимізатора виступає функція LinearOptimization з вказаним симплекс-методом Method→Simplex.

Спочатку оператор вводить кількість змінних. У ролі змінних будуть виступати продукти. Продукти мають значення ваги для жирів, білків і вуглеводів у грамах, а також різну вартість та калорійність. Ці значення позначаються як коефіцієнти для нерівностей. У розрахунках потрібні дві цільові функції: вага f1 та вартість пайка f2. Після вводу значень кількості змінних, кількості нерівностей та їх коефіцієнтів потрібно використовувати набір вбудованих функцій Mathematica, а саме Indexed для задання значень f1 та f2. А далі, в залежності від версії Mathematica, будемо використовувати чи вбудовані функції FindMaximum і FindMinimum чи LinearOptimization з симплекс-методом Method→Simplex для знаходження максимального значення функції $\mu_D(x_k^*)$, що дає змогу визначити оптимальний план розв’язку задачі пошуку збалансованої дієти.

Завдяки використанню вбудованого функціоналу вдалося отримати бажаний результат. Програма працює з задовільною швидкістю, результат обчислень представлено на рис. 3.1.

k	Оптимальний план x^*	$\mu_1(x^*)$	$\mu_2(x^*)$	$\mu_D(x^*)$	$f_1(x^*)$	$f_2(x^*)$
0	{0., 0., 15., 0.625, 0.}	0.431743	1.	0.431743	15.625	258.75
1	{0., 0., 15., 0.625, 0.}	0.431743	1.	0.431743	15.625	258.75
2	{0., 0., 15., 0.625, 0.}	0.431743	1.	0.431743	15.625	258.75
3	{0., 0., 15., 0.625, 0.}	0.431743	1.	0.431743	15.625	258.75
4	{0., 0., 15., 0.625, 0.}	0.431743	1.	0.431743	15.625	258.75
5	{0., 2.19028, 9.23611, 3.50694, 0.}	0.5	0.993332	0.5	14.9333	262.842
6	{0., 5.39917, 0.791667, 7.72917, 0.}	0.6	0.983604	0.6	13.92	268.838
7	{0., 5.7, 0., 6.61893, 0.587733}	0.7	0.95895	0.7	12.9067	284.167
8	{0., 5.7, 0., 4.95707, 1.23627}	0.8	0.933086	0.8	11.8933	300.461
9	{0., 5.7, 0., 3.2952, 1.8848}	0.9	0.907576	0.9	10.88	316.756
10	{0., 5.7, 0., 0., 4.16667}	1.	0.711342	0.711342	9.86667	450.65

Максимальне значення $\mu_D(x)$ дорівнює 0.9 для $k=10$

Розв'язок:

k	Оптимальний план x^*	$\mu_1(x^*)$	$\mu_2(x^*)$	$\mu_D(x^*)$	$f_1(x^*)$	$f_2(x^*)$
9	{0., 5.7, 0., 3.2952, 1.8848}	0.9	0.907576	0.9	10.88	316.756

Рисунок 3.1 – Результат використання FindMaximum і FindMinimum

Висновки за розділом 3

У розділі було надано короткі відомості про систему комп'ютерної алгебри Mathematica, також було описано роботу програми та представлено результат її роботи.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент

Розглянемо таку задачу: розробити денний пайок (умовний), що забезпечує потреби в корисних речовинах та енергетиці і є найкращим за витратами та вагою. Продукти, що використовуються для харчування, вміст корисних речовин у 100 г продукту, калорійність 100 г продукту (у кілокалоріях) та їхня вартість, потреба в корисних речовинах (у грамах) і кілокалоріях наведено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Вхідні дані задачі про дієту

Продукти	Корисні речовини			Калорійність	Вартість, у.о.
	Жири	Білки	Вуглеводи		
Хліб	1,0	5,0	46,0	220	4,0
Сухофрукти	0	0	100	380	4,5
Гречка	8,0	7,0	38,0	320	16,0
Яловичина	16,0	19,0	0	220	30
Сир	41,0	24,0	0	530	102,0
Потреба	130 г	100 г	570 г	3800 ккал	—

Побудуємо математичну модель, прийнявши за невідоме кількість відповідного продукту, що використовується в пайці: x_1 – хліба, x_2 – сухофруктів, x_3 – гречки, x_4 – яловичини, x_5 – сиру, одиницею виміру всіх невідомих є величина, що дорівнює 100 г. Щоб гарантувати обмеженість множини допустимих планів, введемо вимогу про те, що сумарна вага продуктів не повинна перевищувати 20 одиниць (2 кг).

Зауважимо, що в цій моделі дві цільові функції – вартість пайка і його вага.

З урахуванням сказаного отримаємо математичну модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min, \\ f_2(x) = 4x_1 + 4,5x_2 + 16x_3 + 30x_4 + 102x_5 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20, \\ x_1 + 8x_3 + 16x_4 + 41x_5 \geq 130, \\ 5x_1 + 7x_3 + 19x_4 + 24x_5 \geq 100, \\ 46x_1 + 100x_2 + 38x_3 \geq 570, \\ 220x_1 + 380x_2 + 320x_3 + 220x_4 + 530x_5 \leq 3800, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Відповідно до викладеного раніше для наближеного розв'язання задачі (4.1) будемо з кроком $\Delta = 0,1$ розв'язувати послідовність задач.

Будемо припускати, що

$$\mu_1(x) = \frac{f_1^{\max} - f_1(x)}{f_1^{\max} - f_1^{\min}} \quad \text{і} \quad \mu_2(x) = \frac{(f_2^{\max} - f_2(x))^2}{(f_2^{\max} - f_2^{\min})^2}.$$

Для початку знайдемо f_1^{\max} і f_1^{\min} , для цього розв'яжемо задачу, враховуючи у ній тільки перший критерій f_1 :

$$f_1^{\max} = 20 \quad \text{і} \quad f_1^{\min} = 9,87.$$

Потім розв'яжемо задачу (4.2) за k , що змінюється від нуля до одиниці. Ці задачі розв'язано симплекс-методом, необхідні результати наведено в таблиці 4.2

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 4,5x_2 + 16x_3 + 30x_4 + 102x_5 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20 - 1,013k, \\ x_1 + 8x_3 + 16x_4 + 41x_5 \geq 130, \\ 5x_1 + 7x_3 + 19x_4 + 24x_5 \geq 100, \\ 46x_1 + 100x_2 + 38x_3 \geq 570, \\ 220x_1 + 380x_2 + 320x_3 + 220x_4 + 530x_5 \leq 3800, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Таблиця 4.2 – Проміжні результати

Крок (k)	Оптимальний план задачі (4.1)	$\mu_1(x_k^*)$	$\mu_2(x_k^*)$	$\mu_D(x_k^*)$	$f_1(x_k^*)$	$f_2(x_k^*)$
1	2	3	4	5	6	7
0	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
1	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
2	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
3	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
4	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
5	(0;2,19;9,25;3,5;0)	0,50	0,993	0,50	14,94	262,842
6	(0;5,39;0,81;7,72;0)	0,60	0,983	0,69	13,92	268,838
7	(0;5,7;0;6,62;0,59)	0,70	0,959	0,70	12,91	284,167
8	(0;5,7;0;4,96;1,23)	0,80	0,934	0,80	11,89	300,461
9	(0;5,7;0;3,3;1,9)	0,90	0,905	0,90	10,90	316,756
10	(0;5,7;0;0,02;4,15)	1,00	0,713	0,713	9,87	450,65

Аналізуючи п'ятий стовпчик таблиці 4.2, помічаємо, що максимальне значення функція $\mu_D(x_k^*)$ набуває за $k = 9$. Таким чином, оптимальним є план (0; 5,7; 0; 3,3; 1,9), тобто для пайка слід використати 570 г сухофруктів, 330 г яловичини і 190 г сиру. Його вага дорівнює $10,90 \cdot 0,1 \text{ кг} = 1,090 \text{ кг}$, його вартість дорівнює 316,756 у.о. Ступінь упевненості в тому, що цей план є найкращим, дорівнює 0,9.

Висновки за розділом 4

У розділі було описано обчислювальний експеримент, а саме було наведено вхідні дані, описано математичну модель, наведено короткі відомості про хід обчислень, представлено проміжні результати, а також фінальний результат обчислень.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі були розглянуті задачі векторної оптимізації та методи їх розв'язання. Було запропоновано нечітку математичну модель для задачі складання раціону та метод її розв'язання. Задача складання раціону передбачає розробку умовного денного пайка, що забезпечує потреби людини в корисних речовинах та енергетиці і є найкращим за витратами та вагою, з використанням методів нечіткої векторної оптимізації.

Досліджувана задача є задачею вибору найкращої альтернативи із заданої нечіткої множини. Мета в цій задачі є визначеною нечітко. Для розв'язання задачі скористалися ідеєю Заде – Беллмана, згідно з якою нечітким рішенням є перетин нечіткої мети та нечіткої множини альтернатив.

За допомогою математичного пакету Wolfram Mathematica розроблено комп'ютерну програму, яка реалізує розв'язок цієї задачі, проаналізовано результати роботи програми.

Під час розв'язання задачі за цільову функцію було взято другий частинний критерій. Подальші дослідження в цієї області можна спрямувати на розв'язання задачі, коли за цільову функцію взяти перший частинний критерій. Також можна збільшити кількість критеріїв оптимізації, кількість обмежень та дослідити різні методи згорток.

На базі запропонованої математичної моделі та методу її розв'язання можна створити програмний додаток, який дозволить обирати продукти харчування, вводити необхідні обмеження у зручному для користувача вигляді, а на виході отримувати один або декілька варіантів денного раціону. Такий додаток буде корисний для дієтологів, спортсменів, лікарів та інших людей, які переймаються проблемами здорового харчування.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Мірошніченко О. О. Застосування методів нечіткої векторної оптимізації для складання дієти. *27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»* : зб. матеріалів форуму. Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2023. С. 169–170.
2. Флегонтов А. В., Вилков В. Б., Черных А. К. Моделирование задач принятия решений при нечетных данных. Санкт-Петербург : Лань, 2020. 329 с.
3. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. Vol. 8, no. 3. P. 338–353.
4. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers*. 1994. Vol. 43, no. 11. P. 1329–1333.
5. Mamdani E. H., Assilian S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*. 1975. Vol. 7, no. 1. P. 1–13.
6. Борисов А. Н. Принятие решений на основе нечетких моделей. Рига, 1990. 184 с.
7. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Москва : Мир, 1976. 165 с.
8. Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств. Москва, 1982. 429 с.
9. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. Москва, 1981. 206 с.
10. Яхьяева Г. Э. Нечеткие множества и нейронные сети. Москва, 2006. 315 с.
11. Zadeh L. A. Fuzzy algorithms. *Information and Control*. 1968. Vol. 12, no. 2. P. 94–102.
12. Вилков В. Б., Черных А. К., Флегонтов А. В. Теория и практика оптимизации решений на основе нечетких множеств и нечеткой логики. Санкт-Петербург : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. 160 с.

13. Chernykh A. K., Vilkov V. B. Management of transportation safety at the organization of material maintenance of forces and means Emercom of Russia in emergencies. *Пожаровзрывобезопасность*. 2016. Vol. 25, no. 9. P. 52–59.

14. Semenov A. S., Yakushev I. A., Egorov A. N. MATHEMATICAL MODELING OF TECHNICAL SYSTEMS IN THE MATLAB. *Современные наукоемкие технологии (Modern High Technologies)*. 2017. No. 8 2017. P. 56–64.

15. ДСТУ 3008:2015. Документація. Звіти у сфері науки та техніки. Структура та правила оформлення. Чинний від 2015-22-06. Київ : Держстандарт України. 2015. 31 с.

16. Wolfram S. Mathematica. Addison-Wesley France, 1995. 1018 p.

17. Guide to standard Mathematica packages, version 2.2 / ed. by B. Philip, W. Research. 3rd ed. [S.l.] : Wolfram Research, 1993. 459 p.

18. Inchausti P. Mathematica. Version 3.0 for Windows. Stephen Wolfram. *The Quarterly Review of Biology*. 1997. Vol. 72, no. 3. P. 362–364.