

## ОБНАРУЖИТЕЛЬ НЕШУМОВЫХ СИГНАЛОВ, ЗАМАСКИРОВАННЫХ ГАУССОВЫМ ШУМОМ

### Введение

Большинство практических задач в области радиотехники связано с проблемой обнаружения полезных сигналов и оценивания их параметров в условиях мешающего действия шумов и нешумовых помех.

В связи с этим интерес представляют задачи обнаружения и оценивания сигналов, для которых известна минимальная априорная информация о комплексной огибающей и времени существования на интервале наблюдения. Такого рода задачи характерны для медико-биологических исследований, радиоастрономии, физических экспериментов и т.д.

Для решения подобных задач уже неприменимы эффективные процедуры оптимальной или квазиоптимальной фильтрации, а потому требуется поиск наиболее общих алгоритмов обработки, основанных на статистическом различии чистого шума и аддитивной смеси «сигнал плюс шум».

Организацию таких алгоритмов удобно искать на основе так называемого «энергетического подхода», который базируется на анализе оценок энергии регистрируемых колебаний на интервале наблюдения в предположении гауссового характера шумов [1]. Причём, это ограничение не является чрезмерным, поскольку, во-первых, решение задачи для гауссовых шумов открывает путь для совершенствования алгоритмов обработки в условиях воздействия шумов с иными статистическими характеристиками, а во-вторых, в настоящее время получили развитие исследования процедур нормализации негауссовых процессов.

Таким образом, для гауссового характера шумов оценка энергии на интервале наблюдения, приведённая к дисперсии шума, представляет собой реализацию случайной величины  $\xi$ , имеющей либо центральное, либо нецентральное распределение  $\chi_n^2$  с  $n$  степенями свободы, где  $n$  – количество статистически независимых выборок на интервале наблюдения. При этом полагается известной (хотя бы приблизительно) спектральная область, которую занимает полезный сигнал.

### Обнаружение сигналов в белом гауссовом шуме

Процедура обнаружения сигнала в гауссовом шуме представляет собой проверку следующих двух гипотез.

Гипотеза  $H_0$ : входной процесс  $y(t)$  является только шумом:

- входной процесс определяется выражением

$$y(t) = n(t), \quad (1)$$

где  $n(t)$  – шум,

- энергия входного процесса определяется выражением

$$E[n(t)] = 0, \quad (2)$$

- двусторонняя спектральная плотность шума  $N_{02}$ ;

- ширина полосы шума  $W$ , Гц.

2. Гипотеза  $H_1$ : входной процесс  $y(t)$  является суммой сигнала и шума:

- входной процесс определяется выражением

$$y(t) = n(t) + s(t), \quad (3)$$

где  $s(t)$  – сигнал – энергия входного процесса определяется выражением

$$E[n(t) + s(t)] = E[s(t)]. \quad (4)$$

Относительно узкополосный случайный процесс представляется в виде выражения [2]:

$$y(t) = A(t) \cdot \exp(i \cdot \varphi(t)), \quad (5)$$

где  $A(t)$  – огибающая процесса;  $\varphi(t)$  – фаза процесса

С другой стороны, узкополосный случайный процесс можно записать так:

$$y(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = A_C(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - A_S(t) \cdot \sin(\omega_0 t), \quad (6)$$

где  $A_C(t)$  и  $A_S(t)$  – квадратурные составляющие нормального случайного процесса, имеющие нормальное распределение;  $\omega_0$  – опорная угловая частота

Косинусная квадратурная составляющая  $A_C(t)$  определяется по формуле

$$A_C(t) = A(t) \cdot \cos\varphi(t). \quad (7)$$

Синусная квадратурная составляющая  $A(t)$  определяется по формуле

$$A_S(t) = A(t) \cdot \sin\varphi(t). \quad (8)$$

Огибающая нормального случайного процесса определяется по формуле

$$A(t) = \sqrt{A_C^2(t) + A_S^2(t)}. \quad (9)$$

Фаза нормального случайного процесса

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \left( \frac{A_S(t)}{A_C(t)} \right). \quad (10)$$

Если шум является полосовым случайным процессом, то каждую его реализацию можно выразить в виде

$$n(t) = n_C(t) \times \cos(\omega_0 t) - n_S(t) \cdot \sin(\omega_0 t), \quad (11)$$

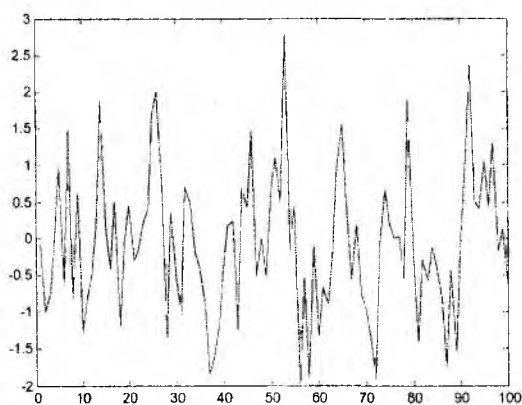
где  $n_C(t)$  – косинусная квадратурная составляющая шума;  $n_S(t)$  – синусная квадратурная составляющая шума

Сигнал можно выразить как

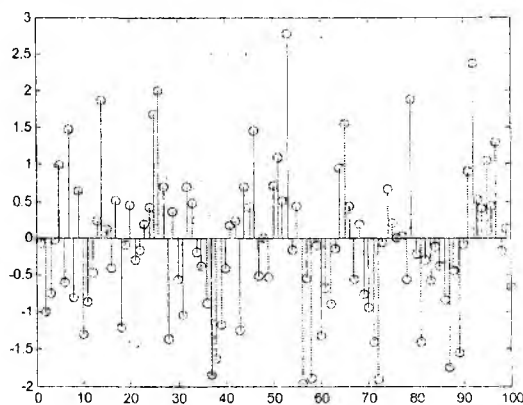
$$s(t) = s_C(t) \times \cos(\omega_0 t) - s_S(t) \cdot \sin(\omega_0 t), \quad (12)$$

где  $s_C(t)$  – косинусная квадратурная составляющая сигнала;  $s_S(t)$  – синусная квадратурная составляющая сигнала

Реализация гауссового шума и взятие выборок из шума показаны на рис. 1.



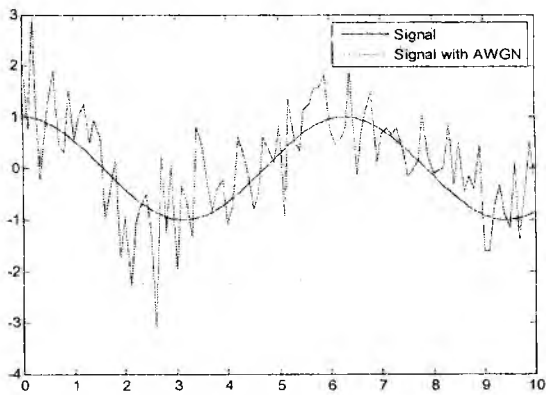
а



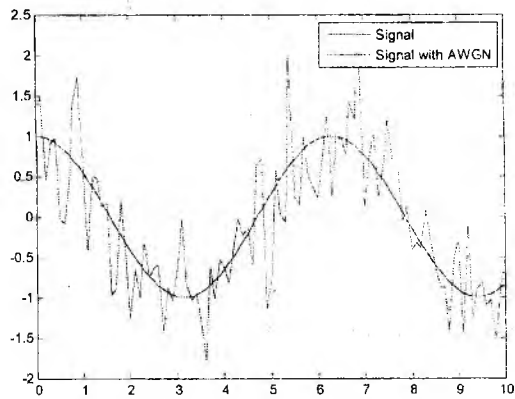
б

Рис. 1. Реализация гауссового шума (а) и выборки шума (б)

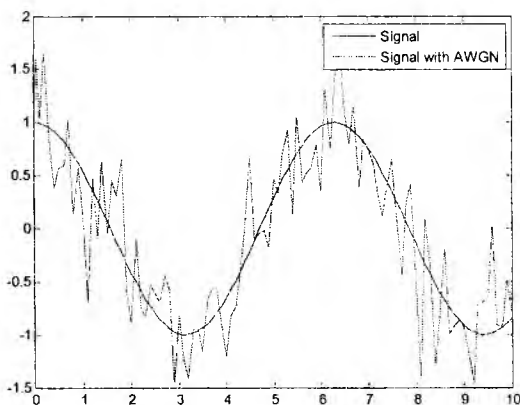
Добавление к сигналу аддитивного белого гауссового шума может быть проиллюстрировано рис. 2, который графически отображает аддитивную смесь «сигнал плюс шум».



*a*



*б*



*в*

Рис.2. Добавление к сигналу аддитивного белого гауссового шума

В качестве модели полезного сигнала удобно использовать гармоническое колебание, как показано на рисунке 2, *a*, *б*, *в*, и к этому сигналу добавлен аддитивный белый гауссов шум с различным отношением сигнал/шум: SNR=1 (рис. 2, *a*), SNR=2 (рис. 2, *б*) и SNR=3 (рис. 2, *в*). Соответственно видно, что при увеличении отношения сигнал/шум уменьшается амплитуда аддитивной смеси «сигнал плюс шум» и тем самым становится проще обнаружить сигнал в шуме.

Взятие выборок из шума и, аналогично, из аддитивной смеси «сигнал плюс шум» проиллюстрировано на рис. 3.

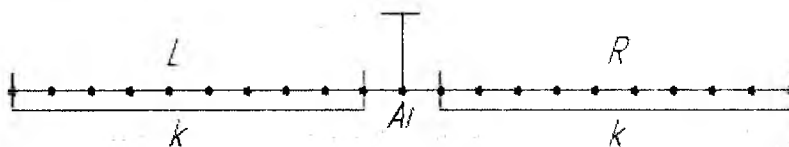


Рис. 3. Иллюстрация взятия выборок

Для оценки входного процесса на интервале наблюдения введём некоторый параметр и обозначим его через  $\xi_i$ . Схема нахождения  $\xi_i$  показана на рис. 4.

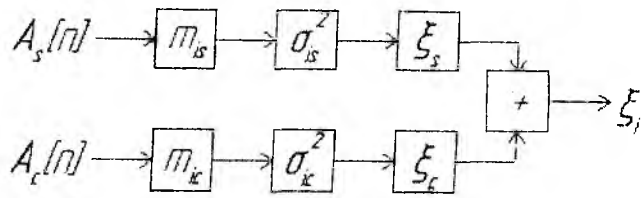


Рис. 4. Схема нахождения  $\xi_i$

Математическое ожидание выборок, находящихся слева от произвольной выборки  $A_i$ , определяется по формуле

$$m_L = \frac{1}{k} \cdot \left( \sum_{i=1}^k A_{iL} \right). \quad (13)$$

где  $k$  – количество выборок;  $A_i$  – значение  $i$ -й выборки

Математическое ожидание выборок, находящихся справа от произвольной выборки  $A_i$ , определяется по формуле

$$m_R = \frac{1}{k} \cdot \left( \sum_{i=1}^k A_{iR} \right), \quad (14)$$

Дисперсии выборок, находящихся слева и справа от произвольной выборки  $A_i$ , определяются по формулам:

$$\sigma_L^2 = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^k (A_{iL} - m_L)^2, \quad (15)$$

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^k (A_{iR} - m_R)^2. \quad (16)$$

Среднеквадратическое отклонение суммы выборок, находящихся слева и справа от произвольной выборки  $A_i$ , определяется по формуле

$$\sigma = \sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_R^2}. \quad (17)$$

Параметр  $\xi_i$  определяется соотношением

$$\xi_i = \left( \frac{A_i}{\sigma} \right)^2. \quad (18)$$

Далее необходимо найти сумму параметра  $\xi_i$ .

Перечисленные действия выполняются сначала для чистого гауссового шума, а затем для аддитивной смеси «сигнал плюс шум» при различных отношениях сигнал/шум.

Затем необходимо найти параметр нецентральности

$$\lambda = \sum \xi_{iC+ш} - \sum \xi_{iш}. \quad (19)$$

Полученные параметры нецентральности возможно табулировать. Однако нагляднее будет привести графическую зависимость параметра нецентральности от отношения сигнал/шум.

Зависимость параметра нецентральности от отношения сигнал/шум показана на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что зависимость является нелинейной и что при незначительном увеличении отношения сигнал/шум увеличивается параметр нецентральности, т.е. чем больше отношение сигнал/шум, тем больше энергия сигнала или, соответственно, меньше двусторонняя спектральная плотность шума.

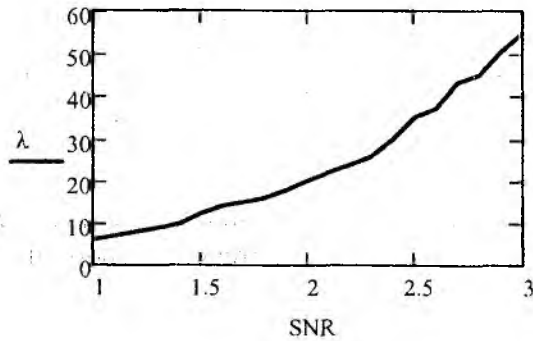


Рис. 5. Зависимость параметра нецентральности от отношения сигнал/шум

### Иллюстрация центрального и нецентрального распределения хи-квадрат

Случайная величина имеет центральное распределение хи-квадрат, если плотность распределения вероятностей определяется выражением [3]:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

где  $n$  - количество степеней свободы;  $\Gamma(x)$  – гамма-функция Эйлера

В качестве примера построен график плотности распределения вероятностей центрального распределение хи-квадрат с числом степеней свободы  $n = 128$  и показан на рис. 6.

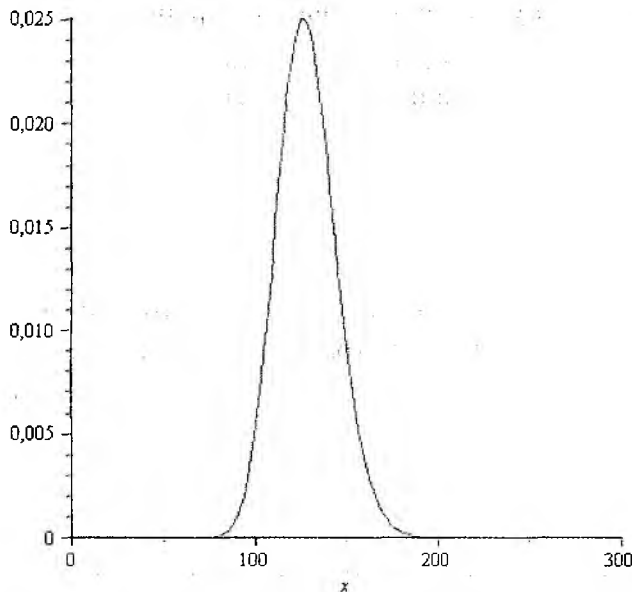


Рис. 6. График плотности распределения вероятностей центрального распределение хи-квадрат с числом степеней свободы  $n = 128$

Случайная величина имеет нецентральное распределение хи-квадрат, если плотность распределения вероятностей определяется выражением

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x+\lambda}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot x^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda \cdot x}{4}\right)^j}{j! \cdot \Gamma\left(j + \frac{n}{2}\right)}, \quad x \geq 0, \quad (21)$$

где  $\lambda$  – параметр нецентральности

В качестве примера построен график плотности распределения вероятностей нецентрального распределение хи-квадрат с числом степеней свободы  $n=128$  и параметром нецентральности  $\lambda=50$  и показан на рис. 7.

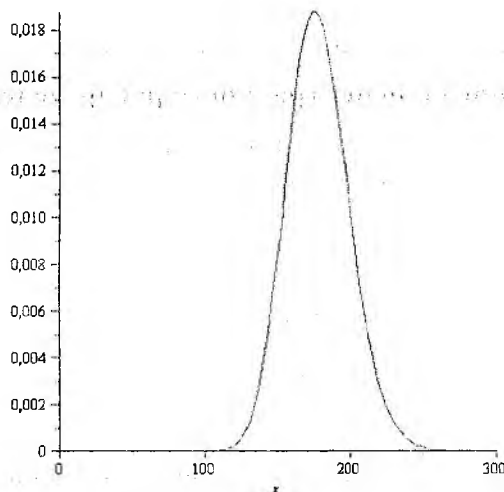


Рис. 7. График плотности распределения вероятностей нецентрального распределение хи-квадрат с числом степеней свободы  $n=128$  и параметром нецентральности  $\lambda=50$

### Оценка вероятностей пропуска цели и ложных тревог

Для определения вероятностей пропуска цели и ложных тревог необходимо найти точку пересечения (порог) графиков функций плотности распределения вероятностей центрального и нецентрального распределения хи-квадрат.

Вероятность пропуска цели

$$P_{п.ц.} = \int_0^{T_{por}} f1(x) dx, \quad (22)$$

где  $f1(x)$  – плотность распределения вероятностей нецентрального распределение хи-квадрат;  $T_{por}$  – точка пересечения (порог) графиков функций плотности распределения вероятностей центрального и нецентрального распределения хи-квадрат

Вероятность ложных тревог

$$P_{л.т.} = \int_{T_{por}}^{\infty} f2(x) dx, \quad (23)$$

где  $f2(x)$  – плотность распределения вероятностей центрального распределение хи-квадрат

Определение вероятности пропуска цели и ложных тревог проиллюстрировано на рис. 8.

Из рис. 8 видно, что площадь, ограниченная кривой  $f1(x)$  и  $T_{por}$ , есть вероятность пропуска цели, а площадь, ограниченная  $T_{por}$  и кривой  $f2(x)$ , есть вероятность ложных тревог.

Полученные вероятности пропуска цели и ложных тревог при различных значениях числа степеней свободы и параметра нецентральности возможно табулировать. Однако нагляднее будет привести графические зависимости вероятностей пропуска цели и ложных тревог от параметра нецентральности при различном числе степеней свободы.

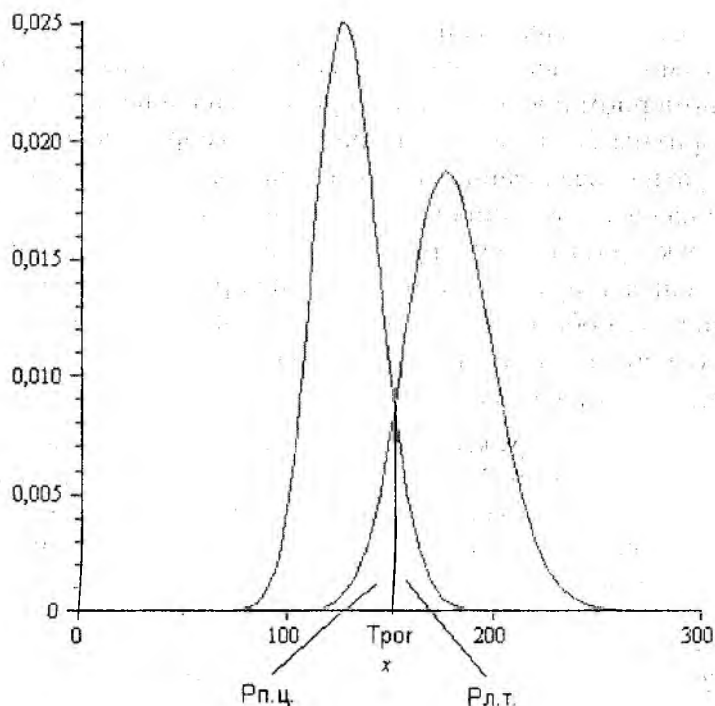


Рис. 8. Определение вероятности пропуска цели и ложных тревог

Зависимость вероятностей пропуска цели и ложных тревог от параметра нецентральности при различном числе степеней свободы представляет собой семейство графиков на рис. 9.

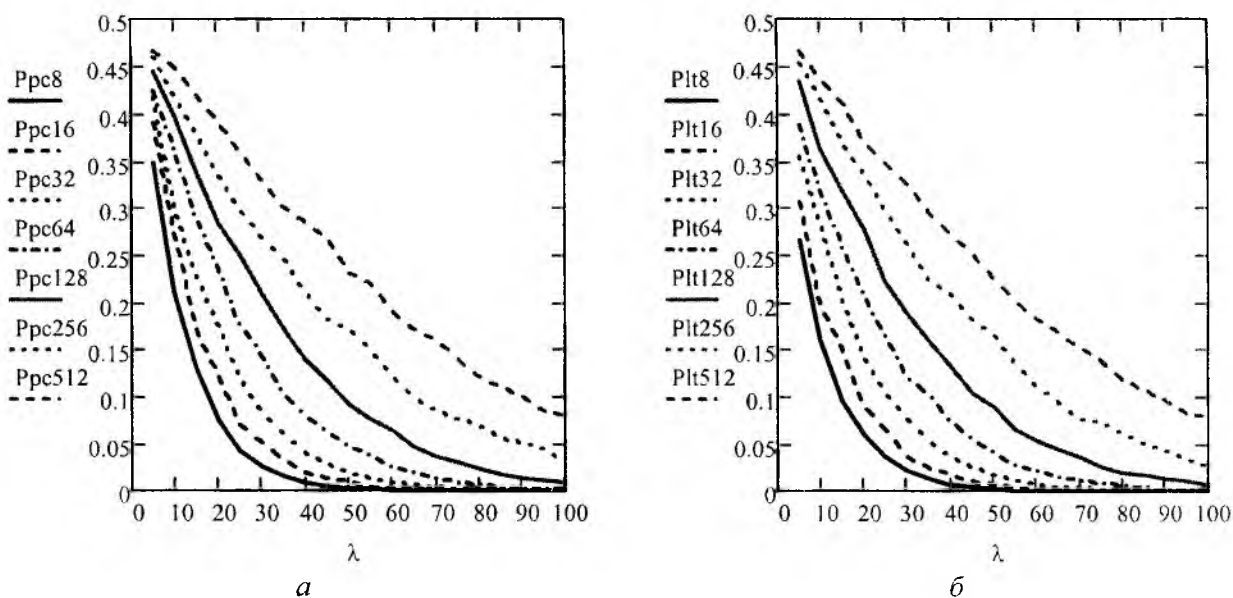


Рис. 9. Зависимость вероятностей пропуска цели (а) и ложных тревог (б) от параметра нецентральности

Из рис. 9, а, б видно, что при увеличении параметра нецентральности  $\lambda$  вероятности пропуска цели и ложных тревог уменьшаются, а при увеличении числа степеней свободы  $n$  -- возрастают.

### Выводы

1. Имитационное моделирование подтвердило работоспособность предложенных алгоритмов обнаружения на произвольном интервале наблюдения нешумовых сигналов, замаскированных гауссовым шумом.

2. Получены вероятностные характеристики обнаружителя в предположении равномерного распределения нешумовой энергии на интервале наблюдения. Аналогичный результат получается и при неравномерном поступлении энергии сигнала на интервале наблюдения.

3. Полученные алгоритмы базируются на простых алгебраических операциях суммирования. Поэтому их аппаратная реализация возможна на элементной базе средней и большой степени интеграции или на базе высокопроизводительной ЭВМ.

4. Качественные характеристики обнаружителя зависят от длительности интервала наблюдения, соотношения сигнал/шум и не зависят от вида распределения нешумовой энергии на интервале наблюдения. Это обстоятельство позволяет формулировать задачу оценивания распределения полезной энергии на интервале наблюдения как степень отклонения текущих парциальных оценок энергии от равномерного.

**Список литературы:** 1. *Урковиц*. Обнаружение неизвестных детерминированных сигналов по энергии // ТИИЭР. 1967. Т. 55. № 4. С. 50–59. 2. *Прохоров С.А.* Математическое описание и моделирование случайных процессов. Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. 209 с. 3. *Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. 640 с.

*Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники*

*Поступила в редколлегию 31.07.2009*