

МЕТОД R-ФУНКЦІЙ У ЧИСЕЛЬНОМУ ДОСЛІДЖЕННІ ЗАДАЧ ОБТІКАННЯ

Дудар М.А.

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: mykyta.dudar@nure.ua

The paper addresses the problem of the flow around a cylindrical body by an ideal incompressible fluid. To solve the problem, a structural method (the R-functions method) was used. The structure of the solution, which exactly satisfies the equations and boundary conditions of the problem outside a certain finite region adjacent to the body being flowed around, was written.

Багато явищ у фізиці, хімії, біології, аеро- та гідродинаміці можна доволі точно описати, використовуючи диференціальні рівняння. У цьому випадку ми приходимо до крайових задач: у деякій скінченній або нескінченній області Ω необхідно знайти розв'язок рівняння $Au = f$, що задовольняє на ділянках $\partial\Omega_i$ межі $\partial\Omega$ крайові умови $L_i u|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, де f і φ_i задані функції, а A , L_i – деякі задані оператори, визначені на межі області Ω та на ділянках $\partial\Omega_i$ її межі відповідно. Отже, постановка такої задачі поєднує у собі аналітичну та геометричну інформації. Для її повного урахування можна використати метод R-функцій, запропонований акад. НАН України В.Л. Рвачовим [1]. У обчислювальній гідродинаміці до розв'язання задач обтікання цей метод було застосовано, наприклад, у роботах [2 – 4].

Розглянемо задачу про обтікання циліндричного тіла стаціонарним вихровим поступальним безциркулярним потоком нев'язкої (ідеальної) рідини, швидкість якої на нескінченності V_∞ спрямована вздовж більшої вісі профілю тіла. Математична модель має наступний вигляд:

$$\Delta\psi = 0 \text{ зовні } \bar{\Omega},$$
$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \psi_\infty = V_\infty y.$$

Тут $\bar{\Omega}$ – поперечний переріз тіла, що обтікається, ψ – функція течії, Δ – оператор Лапласа, $\partial\Omega$ – контур напрямної циліндричного тіла. Функція течії ψ пов'язана з компонентами вектора швидкостей потоку за формулами:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Відповідно до методу R-функцій, структуру розв'язку цієї крайової задачі можна записати так [2]:

$$\psi = \omega_M(\psi_0 + \Phi) + \omega_M(1 - \omega_M)\Phi_1.$$

Тут ψ_0 точний розв'язок задачі для випадку, коли $\partial\Omega$ є коло радіусу R . Він має вигляд

$$\psi_0 = V_\infty \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right) \sin \varphi,$$

де ρ , φ – змінні полярної системи координат.

Функція $\omega_M = f_M(\omega)$ обираємо у вигляді

$$f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - \exp \frac{\omega}{\omega - M}, & 0 \leq \omega < M, \\ 1, & \omega \geq M, \end{cases}$$

де $\omega(x, y) = 0$ – рівняння межі $\partial\Omega$. Невизначені компоненти структури Φ і Φ_1 оберемо у вигляді:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{m_1} a_k \varphi_k, \quad \Phi_1 = \sum_{j=1}^{m_2} b_j \tau_j,$$

де $\{\varphi_k(\rho, \varphi)\}$, $k = 1, 2, \dots$, – повна система частинних розв'язків рівняння Лапласа відносно зовнішності кола скінченного радіусу; $\{\tau_j(\rho, \varphi)\}$ $j = 1, 2, \dots$, – повна система частинних розв'язків рівняння Лапласа відносно області $\{\omega(x, y) < M\}$.

Коефіцієнти a_k і b_j знаходяться за допомогою методу Рітца. Комп'ютерне моделювання було проведено у пакеті Mathematica 10.3 для випадку обтікання еліптичного циліндра. Отриманий наближений розв'язок порівняно з точним розв'язком задачі.

Список використаних джерел:

1. Рвачёв В. Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.

2. Стрельченко А. Й., Колосова С. В., Рвачов В. Л. Про один метод розв'язування крайових задач. *Доповіді АН УРСР, сер. А.* 1972. № 9. С. 837 – 839.

3. Ламтюгова С. Н., Сидоров М. В. Математическое моделирование задач обтекания в цилиндрической системе координат. *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.* 2014. № 1105, вип. 24. С. 111 – 121.

4. Lamtygova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the problem of flow past a cylindrical body applying the R-functions method and the Galerkin method. *ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes.* 2014. Vol. 3, No. 3. Pp. 43 – 50.