ДОДАТОК А

Файл МКГ_Lambda=0,5_Півкруг.nb

```
(*Метод квазіфункцій Гріна*)

(*Задання початкових даних*)

Off[NIntegrate::slwcon];
|в···  |квадратурное интегрирова

Off[NIntegrate::eincr];
|в···  |квадратурное интегриров

Off[General::stop];
|в···  |общий


λ = 0.5;

l = 2; ϵ = 10^-3;
x[x1_, x2_] := {x1, x2}; ξ[ξ1_, ξ2_] := {ξ1, ξ2};
P[i_, var_] := LegendreP[i, var];
                |P-функция Лежандра первого рода

r[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Sqrt[(x1 - ξ1)^2 + (x2 - ξ2)^2];
ω[x1_, x2_] := x2 (1 - x1^2 - x2^2);

Ω = ImplicitRegion[x^2 + y^2 ≤ 1 && y ≥ 0, {x, y}];
    |неявно заданная область

(*Побудова системи координатних функцій*)

φk[i_, j_] := ω[x1, x2] P[i, x1] P[j, 2 x2 - 1];
n = ((l + 1) (l + 2))/2;

Φx = {};
For[i = 0, i ≤ l, i++, For[j = 0, j ≤ l - i, j++, {AppendTo[Φx, φk[i, j]]}]];
|цикл ДЛЯ             |цикл ДЛЯ                  |добавить в конец к

(*Задання функцій, що входять до інтегрального рівняння*)

q[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := -1/2 Log[r[x1, x2, ξ1, ξ2]^2 + 4 ω[x1, x2] ω[ξ1, ξ2]];
                             |натуральный логарифм

G2[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Log[1/r[x1, x2, ξ1, ξ2]] - q[x1, x2, ξ1, ξ2];
                          |натуральный логарифм

K1[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] = -1/(2 π) (D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ1, 2}] + D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ2, 2}]);
                                   |дифференцировать                 |дифференцировать
```

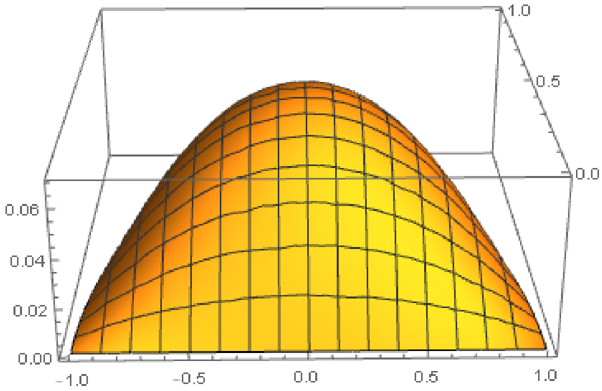
```
(*Початкове наближення*)

u[x1_, x2_] = 1.;

(*Матриця системи Гальоркіна*)
m = Table[NIntegrate[Φx[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω] - NIntegrate[K1[x1, x2, ξ1, ξ2] Φξ[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω], {j, n}, {i, n}];
    табл···  квадратурное интегрирование                  квадратурное интегрирование

MatrixForm[m]
матричная форма
```

$$
\begin{pmatrix}
0.0858037 & 0.0148899 & -0.0209585 & -2.36517\times10^{-10} & 5.32828\times10^{-11} & -0.0306219 \\
0.00662569 & 0.0114099 & 0.00096185 & 2.30299\times10^{-10} & -1.40335\times10^{-9} & -0.00296 \\
-0.0254849 & -0.00305287 & 0.0104499 & -4.44647\times10^{-10} & 9.96834\times10^{-12} & 0.00873603 \\
1.17764\times10^{-9} & 7.77349\times10^{-11} & -3.39447\times10^{-10} & 0.00677138 & 0.000406179 & -4.72694\times10^{-10} \\
-1.4427\times10^{-10} & -2.49033\times10^{-9} & -2.38166\times10^{-9} & -0.0000193388 & 0.000776004 & 7.18862\times10^{-10} \\
-0.030731 & -0.00615248 & 0.0068363 & -1.99049\times10^{-11} & 7.50864\times10^{-9} & 0.0129901
\end{pmatrix}
$$

```
(*Побудова першого наближення*)
b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
    табл···  квадратурное интегрирование                                                          требуемая абсол. точность

c = Chop[LinearSolve[m, b]];
    отс···  решить линейные уравнения

 (*Перше наближення*)
 u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

 error = NMaximize[{Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω}, {x1, x2}][[1]];
         численная ···  абсолютное значение
 k = 1;

 Print[" k = ", k, "   Похибка = ", error];
 печатать
 (*Ітераційний процес*)
 While[error > ϵ, {
 цикл-пока

   u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];

   b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
       табл···  квадратурное интегрирование                                                          требуемая абсол. точность

   c = Chop[LinearSolve[m, b]];
       отс···  решить линейные уравнения

   u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

   error = NMaximize[{Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω}, {x1, x2}][[1]];
           численная ···  абсолютное значение

   k++;
   Print[" k = ", k, "   Похибка = ", error];};]
   печатать

  k = 1   Похибка = 1.
  k = 2   Похибка = 0.0622772
  k = 3   Похибка = 0.00517962
  k = 4   Похибка = 0.000450488

u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];
```

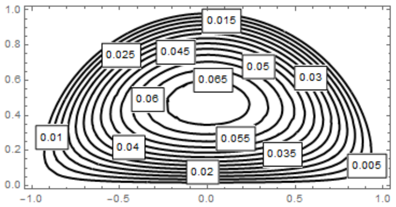
```
(*Побудова поверхні та ліній рівня наближеного розв'язку*)

Plot3D[u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < 1], PlotRange → Full]
```

график функции 2-х переменных | региональная функ··· | функция | отображае··· | в полн




```
ContourPlot[u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < 1], PlotRange → Full,
 Contours → Function[{min, max}, Range[0.005, 0.07, 0.005]], ContourLabels → (Text[Framed[#3], {#1, #2}, Background → White] &), ContourStyle → {{Black, Thick}},
 ContourShading → None]
```

контурный график | аспектное отн··· | автоматич··· | региональная функ··· | функция | отображае··· | в полном объеме
контуры | функция | диапазон | контурные метки | текст | обрамлённый | фон | белый | контурный стиль | чёрный | жирный
оцвечивание конт··· | ни одного/отсутствует




```
NMaximize[{u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω}, {x1, x2}][[1]]
```

численная максимизация

0.0695385

```
(*Аналітичний вигляд наближеного розв'язку*)

u[x1, x2]
```

$$0.203323\,x2\,(1-x1^2-x2^2)-2.08792\times10^{-8}\,x1\,x2\,(1-x1^2-x2^2)+0.00881829\,(-1+3\,x1^2)\,x2\,(1-x1^2-x2^2)-0.0838536\,x2\,(-1+2\,x2)\,(1-x1^2-x2^2)-1.88135\times10^{-7}\,x1\,x2\,(-1+2\,x2)\,(1-x1^2-x2^2)+0.0194739\,x2\,(1-x1^2-x2^2)\,(1-6\,x2+6\,x2^2)$$

```
u[x, y]
```

$$0.203323\,y\,(1-x^2-y^2)-2.08792\times10^{-8}\,x\,y\,(1-x^2-y^2)+0.00881829\,(-1+3\,x^2)\,y\,(1-x^2-y^2)-0.0838536\,y\,(-1+2\,y)\,(1-x^2-y^2)-1.88135\times10^{-7}\,x\,y\,(-1+2\,y)\,(1-x^2-y^2)+0.0194739\,y\,(1-x^2-y^2)\,(1-6\,y+6\,y^2)$$

Файл МКГ_Lambda=0,5_Чверть круга.nb

```
(*Метод квазіфункцій Гріна*)

(*Задання початкових даних*)

Off[NIntegrate::slwcon];
Off[NIntegrate::eincr];
Off[General::stop];

λ = 0.5;

l = 2; ϵ = 10^-3;
x[x1_, x2_] := {x1, x2}; ξ[ξ1_, ξ2_] := {ξ1, ξ2};
P[i_, var_] := LegendreP[i, var];
```

в··· | квадратурное интегрирова
в··· | квадратурное интегриров
в··· | общий
P-функция Лежандра первого рода

```
r[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Sqrt[(x1 - ξ1)^2 + (x2 - ξ2)^2];
ω[x1_, x2_] := x1 * x2 * (1 - x1^2 - x2^2);

Ω = ImplicitRegion[{x^2 + y^2 ≤ 1, y ≥ 0, x ≥ 0}, {x, y}];
    неявно заданная область


(*Побудова системи координатних функцій*)

φk[i_, j_] := ω[x1, x2] P[i, x1] P[j, 2 x2 - 1];
n = ((l + 1) (l + 2))/2;
Φx = {};
For[i = 0, i ≤ l, i++, For[j = 0, j ≤ l - i, j++, {AppendTo[Φx, φk[i, j]]}]];
цикл ДЛЯ                цикл ДЛЯ                  добавить в конец к


(*Задання функцій, що входять до інтегрального рівняння*)

q[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := -1/2 Log[r[x1, x2, ξ1, ξ2]^2 + 4 ω[x1, x2] ω[ξ1, ξ2]];
                              натуральный логарифм

G2[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Log[1/r[x1, x2, ξ1, ξ2]] - q[x1, x2, ξ1, ξ2];
                          натуральный логарифм

K1[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] = -1/(2 π) (D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ1, 2}] + D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ2, 2}]);
                                   дифференцировать                  дифференцировать

(*Початкове наближення*)


u[x1_, x2_] = 1.;


(*Матриця системи Гальоркіна*)
m = Table[NIntegrate[Φx[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω] - NIntegrate[K1[x1, x2, ξ1, ξ2] Φξ[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω], {j, n}, {i, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование            квадратурное интегрирование


MatrixForm[m]
матричная форма
```

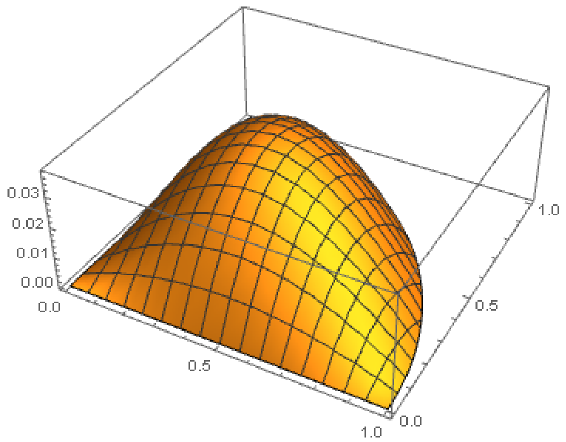
0.00161991	0.0000468394	-0.000674937	0.000833391	-2.64889×10^{-7}	-0.000133502
-0.0000289973	0.000180265	7.95571×10^{-6}	-0.000038883	0.000087546	-0.0000338376
-0.00056358	-0.000035113	0.000306471	-0.00029211	-0.0000155553	0.0000438096
0.000795515	-9.34231×10^{-7}	-0.000331958	0.000454556	-0.0000136403	1.86409×10^{-6}
-0.000041198	0.0000851871	8.32795×10^{-6}	-0.00003527	0.00004661	-0.0000195712
-0.000162577	-0.0000417156	0.0000676392	-0.0000180272	-0.0000224009	0.000115562

```
(*Побудова першого наближення*)
b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование                                                              требуемая абсол. точность

c = Chop[LinearSolve[m, b]];
    отс··· решить линейные уравнения
(*Перше наближення*)
u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
        численная··· абсолютное значение
k = 1;
```

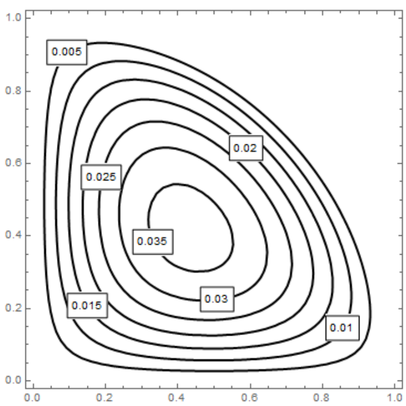
```
Print[" k = ", k, "   Похибка = ", error];

(*Ітераційний процес*)
While[error > ϵ, {

  u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];

  b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];

  c = Chop[LinearSolve[m, b]];

  u1[x1_, x2_] = Σ_{k=1}^{n} c[[k]] Φx[[k]];

  error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];

  k++;

  Print[" k = ", k, "   Похибка = ", error];}];]
```

```
k = 1   Похибка = 1.
k = 2   Похибка = 0.0383779
k = 3   Похибка = 0.00210166
k = 4   Похибка = 0.000109662
```

```
u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];

(*Побудова поверхні та ліній рівня наближеного розв'язку*)

Plot3D[u[x1, x2], {x1, 0, 1}, {x2, 0, 1}, RegionFunction → Function[{x, y, z}, Sqrt[x^2 + y^2] < 1], PlotRange → Full]
```




```
ContourPlot[u[x1, x2], {x1, 0, 1}, {x2, 0, 1}, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, Sqrt[x^2 + y^2] < 1], PlotRange → Full,
 Contours → Function[{min, max}, Range[0.005, 0.5, 0.005]], ContourLabels → (Text[Framed[#3], {#1, #2}, Background → White] &), ContourStyle → {{Black, Thick}},
 ContourShading → None]
```



```
NMaximize[{u[x1, x2], 0 ≤ x1 ≤ 1, 0 ≤ x2 ≤ √(1 - x1²)}, {x1, x2}][[1]]
численная максимизация
0.037501
(*Аналітичний вигляд наближеного розв'язку*)
u[x1, x2]
0.525795 x1 x2 (1 - x1² - x2²) - 0.419616 x1² x2 (1 - x1² - x2²) + 0.0431118 x1 (-1 + 3 x1²) x2 (1 - x1² - x2²) -
 0.165261 x1 x2 (-1 + 2 x2) (1 - x1² - x2²) + 0.0349263 x1² x2 (-1 + 2 x2) (1 - x1² - x2²) + 0.0543867 x1 x2 (1 - x1² - x2²) (1 - 6 x2 + 6 x2²)
u[x, y]
0.525795 x y (1 - x² - y²) - 0.419616 x² y (1 - x² - y²) + 0.0431118 x (-1 + 3 x²) y (1 - x² - y²) -
 0.165261 x y (-1 + 2 y) (1 - x² - y²) + 0.0349263 x² y (-1 + 2 y) (1 - x² - y²) + 0.0543867 x y (1 - x² - y²) (1 - 6 y + 6 y²)
```

Файл МКГ_Lambda=0,5_Половина еліпса.nb

```
(*Метод квазіфункцій Гріна*)
(*Задання початкових даних*)
Off[NIntegrate::slwcon];
в…  квадратурное интегрирова
Off[NIntegrate::eincr];
в…  квадратурное интегриров
Off[General::stop];
в…  общий

λ = 0.5; a1 = 0.3; b1 = 1.;
l = 2; ϵ = 10^-3;
x[x1_, x2_] := {x1, x2}; ξ[ξ1_, ξ2_] := {ξ1, ξ2};
P[i_, var_] := LegendreP[i, var];
               P-функция Лежандра первого рода
r[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := √((x1 - ξ1)² + (x2 - ξ2)²);
ω[x1_, x2_] := x2 (1 - x1²/a1² - x2²/b1²);
Ω = ImplicitRegion[{x²/a1² + y²/b1² ≤ 1, y ≥ 0}, {x, y}];
    неявно заданная область

(*Побудова системи координатних функцій*)
φk[i_, j_] := ω[x1, x2] P[i, x1] P[j, 2 x2 - 1];
n = ((l + 1) (l + 2))/2;
Φx = {};
For[i = 0, i ≤ l, i++, For[j = 0, j ≤ l - i, j++, {AppendTo[Φx, φk[i, j]]}]];
цикл ДЛЯ              цикл ДЛЯ                добавить в конец к
```

```
(*Задання функцій, що входять до інтегрального рівняння*)

q[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := -1/2 Log[r[x1, x2, ξ1, ξ2]^2 + 4 ω[x1, x2] ω[ξ1, ξ2]];
                          натуральный логарифм

G2[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Log[1/r[x1, x2, ξ1, ξ2]] - q[x1, x2, ξ1, ξ2];
                          натуральный логарифм

K1[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] = -1/(2 π) (D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ1, 2}] + D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ2, 2}]);
                                   дифференцировать                 дифференцировать

(*Початкове наближення*)

u[x1_, x2_] = 1.;

(*Матриця системи Гальоркіна*)
m = Table[NIntegrate[Φx[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω] - NIntegrate[K1[x1, x2, ξ1, ξ2] Φξ[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω], {j, n}, {i, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование                 квадратурное интегрирование

MatrixForm[m]
матричная форма
```

$$\begin{pmatrix} 0.0481521 & 0.00737187 & -0.0122905 & -1.1845\times10^{-10} & 1.09028\times10^{-10} & -0.022853 \\ 0.00363597 & 0.0045434 & 0.000138056 & -3.61746\times10^{-11} & 6.9508\times10^{-11} & -0.00175605 \\ -0.0143951 & -0.00160457 & 0.00516985 & -4.76697\times10^{-11} & 7.67288\times10^{-11} & 0.00679569 \\ -1.39143\times10^{-10} & 1.21282\times10^{-10} & 2.54231\times10^{-12} & 0.000334961 & 4.9963\times10^{-6} & 5.53003\times10^{-11} \\ 2.64922\times10^{-10} & 1.36824\times10^{-11} & 4.4775\times10^{-11} & -5.2065\times10^{-6} & 0.00003085 & 1.18135\times10^{-10} \\ -0.0233883 & -0.00362101 & 0.00594572 & -1.03447\times10^{-10} & -9.52584\times10^{-11} & 0.0111076 \end{pmatrix}$$

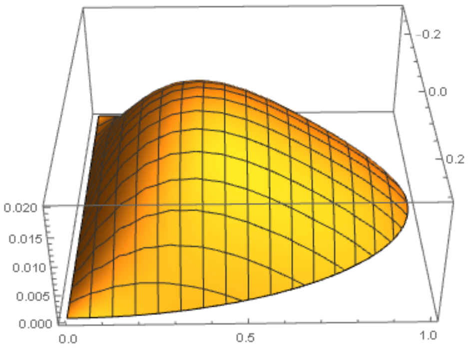
```
(*Побудова першого наближення*)
b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование                                                          требуемая абсол. точность

c = Chop[LinearSolve[m, b]];
    отс··· решить линейные уравнения

(*Побудова першого наближення*)
b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование                                                          требуемая абсол. точность

c = Chop[LinearSolve[m, b]];
    отс··· решить линейные уравнения
(*Перше наближення*)
u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
        численная··· абсолютное значение

k = 1;

Print["  k = ", k, "    Похибка = ", error];
печатать

(*Ітераційний процес*)
While[error > ε, {
цикл-пока

  u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];

  b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
      таблица значений ое интегрирование                                                          требуемая абсол. точность

  c = Chop[LinearSolve[m, b]];
      отс··· решить линейные уравнения

  u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];
```

```
error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
k++;
Print["  k = ", k, "   Похибка = ", error];};]
```

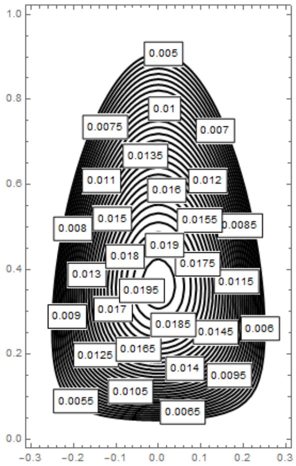
```
k = 1   Похибка = 1.
k = 2   Похибка = 0.0215588
k = 3   Похибка = 0.00105979
k = 4   Похибка = 0.0000246648
```

```
u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];
```

```
(*Побудова поверхні та ліній рівня наближеного розв'язку*)

Plot3D[u[x1, x2], {x1, -a1, a1}, {x2, 0, b1}, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2/a1^2 + y^2/b1^2 < 1], PlotRange → Full]
```




```
ContourPlot[u[x1, x2], {x1, -a1, a1}, {x2, 0, b1}, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2/a1^2 + y^2/b1^2 < 1], PlotRange → Full,
 Contours → Function[{min, max}, Range[0.005, 0.02, 0.0005]], ContourLabels → (Text[Framed[#3], {#1, #2}, Background → White] &), ContourStyle → {{Black, Thick}},
 ContourShading → None]
```




```
(*Аналітичний вигляд наближеного розв'язку*)

u[x1, x2]
```

$0.0818598\, x2 \left(1-11.1111\, x1^2-1.\, x2^2\right)+5.54095\times 10^{-8}\, x1\, x2 \left(1-11.1111\, x1^2-1.\, x2^2\right)+0.023668 \left(-1+3\, x1^2\right) x2 \left(1-11.1111\, x1^2-1.\, x2^2\right)-0.044672\, x2\, (-1+2\, x2) \left(1-11.1111\, x1^2-1.\, x2^2\right)-8.82326\times 10^{-7}\, x1\, x2\, (-1+2\, x2) \left(1-11.1111\, x1^2-1.\, x2^2\right)+0.0191248\, x2 \left(1-11.1111\, x1^2-1.\, x2^2\right) \left(1-6\, x2+6\, x2^2\right)$

```
u[x, y]
```

$0.0818598\, y \left(1-11.1111\, x^2-1.\, y^2\right)+5.54095\times 10^{-8}\, x\, y \left(1-11.1111\, x^2-1.\, y^2\right)+0.023668 \left(-1+3\, x^2\right) y \left(1-11.1111\, x^2-1.\, y^2\right)-0.044672\, y\, (-1+2\, y) \left(1-11.1111\, x^2-1.\, y^2\right)-8.82326\times 10^{-7}\, x\, y\, (-1+2\, y) \left(1-11.1111\, x^2-1.\, y^2\right)+0.0191248\, y \left(1-11.1111\, x^2-1.\, y^2\right) \left(1-6\, y+6\, y^2\right)$

Файл МКГ_Lambda=3_Півкруг.nb

```
(*Метод квазіфункцій Гріна*)

(*Задання початкових даних*)

Off[NIntegrate::slwcon];
в··· квадратурное интегрирова

Off[NIntegrate::eincr];
в··· квадратурное интегриров

Off[General::stop];
в··· общий


λ = 3;

l = 2; ϵ = 10^-3;
x[x1_, x2_] := {x1, x2}; ξ[ξ1_, ξ2_] := {ξ1, ξ2};
P[i_, var_] := LegendreP[i, var];
                P-функция Лежандра первого рода

r[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Sqrt[(x1 - ξ1)^2 + (x2 - ξ2)^2];
ω[x1_, x2_] := x2 (1 - x1^2 - x2^2);

Ω = ImplicitRegion[x^2 + y^2 ≤ 1 && y ≥ 0, {x, y}];
    неявно заданная область

(*Побудова системи координатних функцій*)

φk[i_, j_] := ω[x1, x2] P[i, x1] P[j, 2 x2 - 1];
n = (l + 1) (l + 2)/2;
Φx = {};
For[i = 0, i ≤ l, i++, For[j = 0, j ≤ l - i, j++, {AppendTo[Φx, φk[i, j]]}]];
цикл ДЛЯ               цикл ДЛЯ                  добавить в конец к

(*Задання функцій, що входять до інтегрального рівняння*)

q[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := -1/2 Log[r[x1, x2, ξ1, ξ2]^2 + 4 ω[x1, x2] ω[ξ1, ξ2]];
                               натуральный логарифм

G2[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Log[1/r[x1, x2, ξ1, ξ2]] - q[x1, x2, ξ1, ξ2];
                          натуральный логарифм

K1[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] = -1/(2 π) (D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ1, 2}] + D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ2, 2}]);
                                   дифференцировать                 дифференцировать

(*Початкове наближення*)


u[x1_, x2_] = 1.;
```

```
(*Матриця системи Гальоркіна*)
m = Table[NIntegrate[Φx[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω] - NIntegrate[K1[x1, x2, ξ1, ξ2] Φξ[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω], {j, n}, {i, n}];
```

```
MatrixForm[m]
```

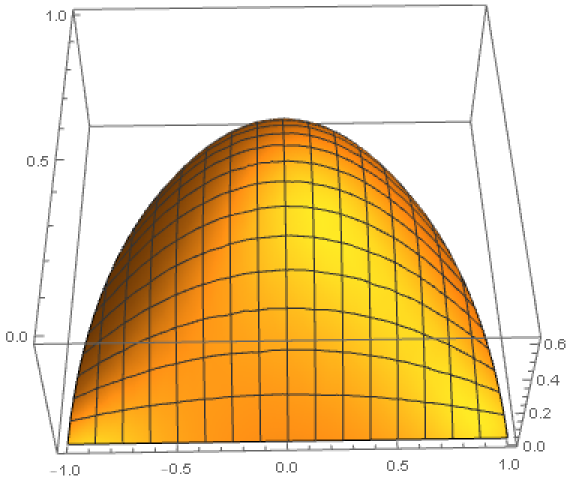
$$\begin{pmatrix} 0.0858037 & 0.0148899 & -0.0209585 & -2.36517\times10^{-10} & 5.32828\times10^{-11} & -0.0306219 \\ 0.00662569 & 0.0114099 & 0.00096185 & 2.30299\times10^{-10} & -1.40335\times10^{-9} & -0.00296 \\ -0.0254849 & -0.00305287 & 0.0104499 & -4.44647\times10^{-10} & 9.96834\times10^{-12} & 0.00873603 \\ 1.17764\times10^{-9} & 7.77349\times10^{-11} & -3.39447\times10^{-10} & 0.00677138 & 0.000406179 & -4.72694\times10^{-10} \\ -1.4427\times10^{-10} & -2.49033\times10^{-9} & -2.38166\times10^{-9} & -0.0000193388 & 0.000776004 & 7.18862\times10^{-10} \\ -0.030731 & -0.00615248 & 0.0068363 & -1.99049\times10^{-11} & 7.50864\times10^{-9} & 0.0129901 \end{pmatrix}$$

```
(*Побудова першого наближення*)
b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];

c = Chop[LinearSolve[m, b]];
(*Перше наближення*)
u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

error = NMaximize[{Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω}, {x1, x2}][[1]];

k = 1;

Print["  k = ", k, "    Похибка = ", error];

(*Ітераційний процес*)
While[error > ϵ, {

  u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];

  b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];

  c = Chop[LinearSolve[m, b]];

  u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

  error = NMaximize[{Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω}, {x1, x2}][[1]];

  k++;

  Print["  k = ", k, "    Похибка = ", error];};]
```

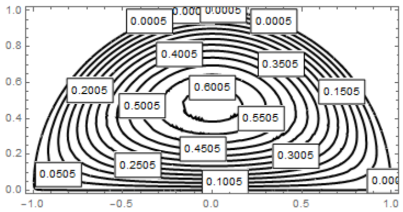
```
 k = 1    Похибка = 1.
 k = 2    Похибка = 0.136226
 k = 3    Похибка = 0.0464259
 k = 4    Похибка = 0.0140516
 k = 5    Похибка = 0.0041531
 k = 6    Похибка = 0.00125459
 k = 7    Похибка = 0.000360978
```

```
u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];
```

```
(*Побудова поверхні та ліній рівня наближеного розв'язку*)

Plot3D[u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < 1], PlotRange → Full]
график функции 2-х переменных   региональная функ···   функция   отображае···   в полн
```




```
ContourPlot[u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < 1], PlotRange → Full,
контурный график   аспектное отн···   автоматич···   региональная функ···   функция   отображае···   в полном объеме
 Contours → Function[{min, max}, Range[0.0005, 0.65, 0.05]], ContourLabels → (Text[Framed[#3], {#1, #2}, Background → White] &), ContourStyle → {{Black, Thick}},
 контуры   функция   диапазон   контурные метки   текст   обрамлённый   фон   белый   контурный стиль   чёрный   жирный
 ContourShading → None]
 оцвечивание конт···   ни одного/отсутствует
```




```
NMaximize[{u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω}, {x1, x2}][[1]]
численная максимизация

0.623789

(*Аналітичний вигляд наближеного розв'язку*)

u[x1, x2]
```

$$1.69276\,x2\left(1-x1^2-x2^2\right)-1.80931\times10^{-7}\,x1\,x2\left(1-x1^2-x2^2\right)-0.017478\left(-1+3\,x1^2\right)x2\left(1-x1^2-x2^2\right)-0.734838\,x2\,(-1+2\,x2)\left(1-x1^2-x2^2\right)-1.69145\times10^{-6}\,x1\,x2\,(-1+2\,x2)\left(1-x1^2-x2^2\right)+0.103009\,x2\left(1-x1^2-x2^2\right)\left(1-6\,x2+6\,x2^2\right)$$

```
u[x, y]
```

$$1.69276\,y\left(1-x^2-y^2\right)-1.80931\times10^{-7}\,x\,y\left(1-x^2-y^2\right)-0.017478\left(-1+3\,x^2\right)y\left(1-x^2-y^2\right)-0.734838\,y\,(-1+2\,y)\left(1-x^2-y^2\right)-1.69145\times10^{-6}\,x\,y\,(-1+2\,y)\left(1-x^2-y^2\right)+0.103009\,y\left(1-x^2-y^2\right)\left(1-6\,y+6\,y^2\right)$$

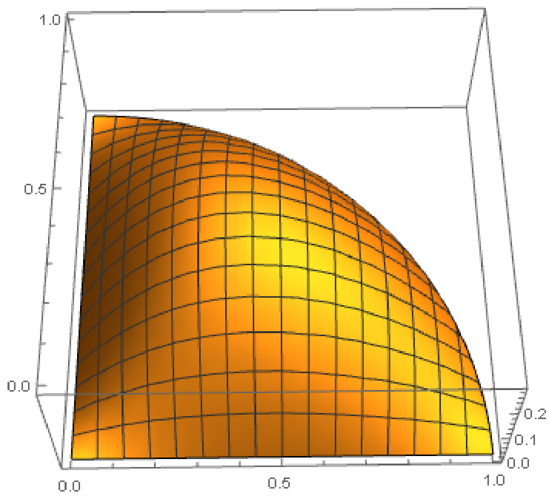
Файл МКГ_Lambda=3_Чверть круга.nb

```
(*Метод квазіфункцій Гріна*)

(*Задання початкових даних*)

Off[NIntegrate::slwcon];
в···   квадратурное интегрирова

Off[NIntegrate::eincr];
в···   квадратурное интегриров
```

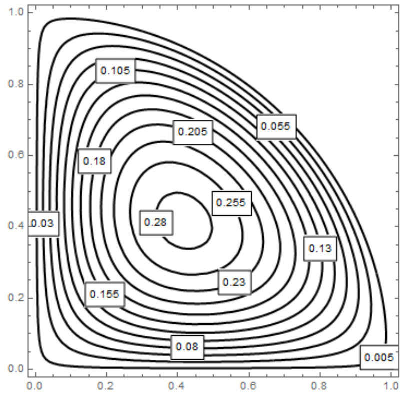
```
Off[General::stop];
|в⋯ |общий

λ = 3.;

l = 2; ϵ = 10^-3;
x[x1_, x2_] := {x1, x2}; ξ[ξ1_, ξ2_] := {ξ1, ξ2};
P[i_, var_] := LegendreP[i, var];
               |P-функция Лежандра первого рода

r[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Sqrt[(x1 - ξ1)^2 + (x2 - ξ2)^2];
ω[x1_, x2_] := x1 * x2 * (1 - x1^2 - x2^2);

Ω = ImplicitRegion[{x^2 + y^2 ≤ 1, y ≥ 0, x ≥ 0}, {x, y}];
    |неявно заданная область

(*Побудова системи координатних функцій*)

φk[i_, j_] := ω[x1, x2] P[i, x1] P[j, 2 x2 - 1];
n = ((l + 1) (l + 2))/2;
Φx = {};
For[i = 0, i ≤ l, i++, For[j = 0, j ≤ l - i, j++, {AppendTo[Φx, φk[i, j]]}]];
|цикл ДЛЯ              |цикл ДЛЯ                 |добавить в конец к
Φξ = Φx /. {x1 → ξ1, x2 → ξ2};

(*Задання функцій, що входять до інтегрального рівняння*)

q[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := -1/2 Log[r[x1, x2, ξ1, ξ2]^2 + 4 ω[x1, x2] ω[ξ1, ξ2]];
                               |натуральный логарифм

G2[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Log[1/r[x1, x2, ξ1, ξ2]] - q[x1, x2, ξ1, ξ2];
                          |натуральный логарифм

K1[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] = -1/(2 π) (D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ1, 2}] + D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ2, 2}]);
                                   |дифференцировать                  |дифференцировать

(*Початкове наближення*)

u[x1_, x2_] = 1.;

(*Матриця системи Гальоркіна*)
m = Table[NIntegrate[Φx[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω] - NIntegrate[K1[x1, x2, ξ1, ξ2] Φξ[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω], {j, n}, {i, n}];
    |табл⋯ |квадратурное интегрирование              |квадратурное интегрирование

MatrixForm[m]
|матричная форма
```

$$\begin{pmatrix} 0.00161991 & 0.0000468394 & -0.000674937 & 0.000833391 & -2.64889\times10^{-7} & -0.000133502 \\ -0.0000289973 & 0.000180265 & 7.95571\times10^{-6} & -0.000038883 & 0.000087546 & -0.0000338376 \\ -0.00056358 & -0.000035113 & 0.000306471 & -0.00029211 & -0.0000155553 & 0.0000438096 \\ 0.000795515 & -9.34231\times10^{-7} & -0.000331958 & 0.000454556 & -0.0000136403 & 1.86409\times10^{-6} \\ -0.000041198 & 0.0000851871 & 8.32795\times10^{-6} & -0.00003527 & 0.00004661 & -0.0000195712 \\ -0.000162577 & -0.0000417156 & 0.0000676392 & -0.0000180272 & -0.0000224009 & 0.000115562 \end{pmatrix}$$

```
(*Побудова першого наближення*)
b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование                                                                  требуемая абсол. точность

c = Chop[LinearSolve[m, b]];
    отс··· решить линейные уравнения
(*Перше наближення*)
u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] φx[[k]], {k, 1, n}];

error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
        численная··· абсолютное значение

k = 1;

Print["  k = ", k, "    Похибка  = ", error];
печатать

(*Ітераційний процес*)
While[error > ϵ, {
цикл-пока

  u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];
  b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
      табл··· квадратурное интегрирование                                                                  требуемая абсол. точность

  c = Chop[LinearSolve[m, b]];
      отс··· решить линейные уравнения

  u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] φx[[k]], {k, 1, n}];

  error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
          численная··· абсолютное значение

  k++;
  Print["  k = ", k, "    Похибка  = ", error];}];
  печатать

 k = 1    Похибка = 1.
 k = 2    Похибка = 0.142247
 k = 3    Похибка = 0.0292712
 k = 4    Похибка = 0.00633625
 k = 5    Похибка = 0.00320399
 k = 6    Похибка = 0.000473706

u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];

(*Побудова поверхні та ліній рівня наближеного розв'язку*)

Plot3D[u[x1, x2], {x1, 0, 1}, {x2, 0, 1}, RegionFunction → Function[{x, y, z}, Sqrt[x^2 + y^2] < 1], PlotRange → Full]
график функции 2-х переменных         региональная функ··· функция                          отображае··· в полн
```



```
ContourPlot[u[x1, x2], {x1, 0, 1}, {x2, 0, 1}, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, √(x^2 + y^2) < 1], PlotRange → Full,
 Contours → Function[{min, max}, Range[0.005, 0.3, 0.025]], ContourLabels → (Text[Framed[#3], {#1, #2}, Background → White] &), ContourStyle → {{Black, Thick}},
 ContourShading → None]
```




```
(*Аналітичний вигляд наближеного розв'язку*)
u[x1, x2]
```

$4.91288\,x1\,x2\,(1 - x1^2 - x2^2) - 4.77893\,x1^2\,x2\,(1 - x1^2 - x2^2) + 0.826349\,x1\,(-1 + 3\,x1^2)\,x2\,(1 - x1^2 - x2^2) - 1.72953\,x1\,x2\,(-1 + 2\,x2)\,(1 - x1^2 - x2^2) + 1.16062\,x1^2\,x2\,(-1 + 2\,x2)\,(1 - x1^2 - x2^2) + 0.409142\,x1\,x2\,(1 - x1^2 - x2^2)\,(1 - 6\,x2 + 6\,x2^2)$

```
u[x, y]
```

$4.91288\,x\,y\,(1 - x^2 - y^2) - 4.77893\,x^2\,y\,(1 - x^2 - y^2) + 0.826349\,x\,(-1 + 3\,x^2)\,y\,(1 - x^2 - y^2) - 1.72953\,x\,y\,(-1 + 2\,y)\,(1 - x^2 - y^2) + 1.16062\,x^2\,y\,(-1 + 2\,y)\,(1 - x^2 - y^2) + 0.409142\,x\,y\,(1 - x^2 - y^2)\,(1 - 6\,y + 6\,y^2)$

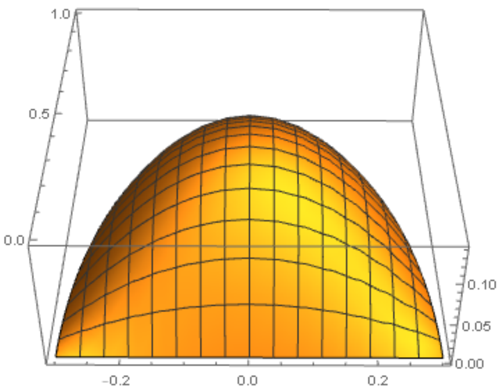
Файл МКГ_Lambda=3_Половина еліпса.nb

```
(*Метод квазіфункцій Гріна*)

(*Задання початкових даних*)

Off[NIntegrate::slwcon];

Off[NIntegrate::eincr];

Off[General::stop];


λ = 3.; a1 = 0.3; b1 = 1.;

l = 2; ϵ = 10^-3;
x[x1_, x2_] := {x1, x2}; ξ[ξ1_, ξ2_] := {ξ1, ξ2};
P[i_, var_] := LegendreP[i, var];

r[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := √((x1 - ξ1)^2 + (x2 - ξ2)^2);
```

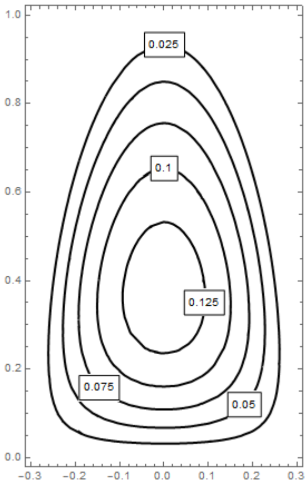
```
ω[x1_, x2_] := x2 (1 - x1^2/a1^2 - x2^2/b1^2);

Ω = ImplicitRegion[{x^2/a1^2 + y^2/b1^2 ≤ 1, y ≥ 0}, {x, y}];
   неявно заданная область

(*Побудова системи координатних функцій*)

φk[i_, j_] := ω[x1, x2] P[i, x1] P[j, 2 x2 - 1];
n = ((l + 1) (l + 2))/2;
Φx = {};
For[i = 0, i ≤ l, i++, For[j = 0, j ≤ l - i, j++, {AppendTo[Φx, φk[i, j]]}]];
цикл ДЛЯ                цикл ДЛЯ                 добавить в конец к

  (*Задання функцій, що входять до інтегрального рівняння*)

  q[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := -1/2 Log[r[x1, x2, ξ1, ξ2]^2 + 4 ω[x1, x2] ω[ξ1, ξ2]];
                                натуральный логарифм

  G2[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Log[1/r[x1, x2, ξ1, ξ2]] - q[x1, x2, ξ1, ξ2];
                           натуральный логарифм

  K1[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] =
   -1/(2 π) (D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ1, 2}] + D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ2, 2}]);
             дифференцировать                  дифференцировать

  (*Початкове наближення*)

  u[x1_, x2_] = 1.;

(*Матриця системи Гальоркіна*)
m = Table[NIntegrate[Φx[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω] - NIntegrate[K1[x1, x2, ξ1, ξ2] Φξ[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω], {j, n}, {i, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование          квадратурное интегрирование

MatrixForm[m]
матричная форма
```

$$
\begin{pmatrix}
0.0481521 & 0.00737187 & -0.0122905 & -1.1845\times10^{-10} & 1.09028\times10^{-10} & -0.022853 \\
0.00363597 & 0.0045434 & 0.000138056 & -3.61746\times10^{-11} & 6.9508\times10^{-11} & -0.00175605 \\
-0.0143951 & -0.00160457 & 0.00516985 & -4.76697\times10^{-11} & 7.67288\times10^{-11} & 0.00679569 \\
-1.39143\times10^{-10} & 1.21282\times10^{-10} & 2.54231\times10^{-12} & 0.000334961 & 4.9963\times10^{-6} & 5.53003\times10^{-11} \\
2.64922\times10^{-10} & 1.36824\times10^{-11} & 4.4775\times10^{-11} & -5.2065\times10^{-6} & 0.00003085 & 1.18135\times10^{-10} \\
-0.0233883 & -0.00362101 & 0.00594572 & -1.03447\times10^{-10} & -9.52584\times10^{-11} & 0.0111076
\end{pmatrix}
$$

```
(*Побудова першого наближення*)
b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
    табл···  квадратурное интегрирование                                    требуемая абсол. точность

c = Chop[LinearSolve[m, b]];
    отс···  решить линейные уравнения
(*Перше наближення*)
u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
        численная···  абсолютное значение

k = 1;

Print["  k = ", k, "    Похибка = ", error];
печатать

(*Ітераційний процес*)
While[error > ϵ, {
цикл-пока

   u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];
   b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
       табл···  квадратурное интегрирование                                    требуемая абсол. точность

   c = Chop[LinearSolve[m, b]];
       отс···  решить линейные уравнения

   u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

   error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
           численная···  абсолютное значение

   k++;
   Print["  k = ", k, "    Похибка = ", error];};]
   печатать

 k = 1    Похибка = 1.
 k = 2    Похибка = 0.0991434
 k = 3    Похибка = 0.0127549
 k = 4    Похибка = 0.0020536
 k = 5    Похибка = 0.000200683

u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];

(*Побудова поверхні та ліній рівня наближеного розв'язку*)

Plot3D[u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2/a1^2 + y^2/b1^2 < 1], PlotRange → Full]
график функции 2-х переменных    аспектное отн···  автоматич···  региональная функ···  функция        отображае···  в полно
```



```
ContourPlot[u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2/a1^2 + y^2/b1^2 < 1], PlotRange → Full,
 Contours → Function[{min, max}, Range[0.0, 0.15, 0.025]], ContourLabels → (Text[Framed[#3], {#1, #2}, Background → White] &), ContourStyle → {{Black, Thick}},
 ContourShading → None]
```




```
(*Аналітичний вигляд наближеного розв'язку*)
u[x1, x2]
```

$$0.402928\, x2 \left(1 - 11.1111\, x1^2 - 1.\, x2^2\right) + 3.321\times 10^{-7}\, x1\, x2 \left(1 - 11.1111\, x1^2 - 1.\, x2^2\right) - 0.00188619 \left(-1 + 3\, x1^2\right) x2 \left(1 - 11.1111\, x1^2 - 1.\, x2^2\right) - 0.314338\, x2 \left(-1 + 2\, x2\right) \left(1 - 11.1111\, x1^2 - 1.\, x2^2\right) - 3.41015\times 10^{-6}\, x1\, x2 \left(-1 + 2\, x2\right) \left(1 - 11.1111\, x1^2 - 1.\, x2^2\right) + 0.114904\, x2 \left(1 - 11.1111\, x1^2 - 1.\, x2^2\right) \left(1 - 6\, x2 + 6\, x2^2\right)$$

```
u[x, y]
```

$$0.402928\, y \left(1 - 11.1111\, x^2 - 1.\, y^2\right) + 3.321\times 10^{-7}\, x\, y \left(1 - 11.1111\, x^2 - 1.\, y^2\right) - 0.00188619 \left(-1 + 3\, x^2\right) y \left(1 - 11.1111\, x^2 - 1.\, y^2\right) - 0.314338\, y \left(-1 + 2\, y\right) \left(1 - 11.1111\, x^2 - 1.\, y^2\right) - 3.41015\times 10^{-6}\, x\, y \left(-1 + 2\, y\right) \left(1 - 11.1111\, x^2 - 1.\, y^2\right) + 0.114904\, y \left(1 - 11.1111\, x^2 - 1.\, y^2\right) \left(1 - 6\, y + 6\, y^2\right)$$

Файл МКГ_Lambda=10_Півкруг.nb

```
(*Метод квазіфункцій Гріна*)

(*Задання початкових даних*)

Off[NIntegrate::slwcon];

Off[NIntegrate::eincr];

Off[General::stop];


λ = 10.;

l = 2; ϵ = 10^-3;
x[x1_, x2_] := {x1, x2}; ξ[ξ1_, ξ2_] := {ξ1, ξ2};
P[i_, var_] := LegendreP[i, var];
```

```
r[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Sqrt[(x1 - ξ1)^2 + (x2 - ξ2)^2];
ω[x1_, x2_] := x2 (1 - x1^2 - x2^2);

Ω = ImplicitRegion[x^2 + y^2 ≤ 1 && y ≥ 0, {x, y}];
    неявно заданная область

(*Побудова системи координатних функцій*)

φk[i_, j_] := ω[x1, x2] P[i, x1] P[j, 2 x2 - 1];
n = ((l + 1) (l + 2))/2;
Φx = {};
For[i = 0, i ≤ l, i++, For[j = 0, j ≤ l - i, j++, {AppendTo[Φx, φk[i, j]]}]];
цикл ДЛЯ                цикл ДЛЯ                добавить в конец к
Φξ = Φx /. {x1 → ξ1, x2 → ξ2};


(*Задання функцій, що входять до інтегрального рівняння*)

q[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := -1/2 Log[r[x1, x2, ξ1, ξ2]^2 + 4 ω[x1, x2] ω[ξ1, ξ2]];
                            натуральный логарифм

G2[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Log[1/r[x1, x2, ξ1, ξ2]] - q[x1, x2, ξ1, ξ2];
                          натуральный логарифм

K1[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] = -1/(2 π) (D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ1, 2}] + D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ2, 2}]);
                                   дифференцировать              дифференцировать

(*Початкове наближення*)


u[x1_, x2_] = 1.;

(*Матриця системи Гальоркіна*)
m = Table[NIntegrate[Φx[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω] - NIntegrate[K1[x1, x2, ξ1, ξ2] Φξ[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω], {j, n}, {i, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование            квадратурное интегрирование


MatrixForm[m]
матричная форма
```

$$
\begin{pmatrix}
0.0858037 & 0.0148899 & -0.0209585 & -2.36517\times10^{-10} & 5.32828\times10^{-11} & -0.0306219 \\
0.00662569 & 0.0114099 & 0.00096185 & 2.30299\times10^{-10} & -1.40335\times10^{-9} & -0.00296 \\
-0.0254849 & -0.00305287 & 0.0104499 & -4.44647\times10^{-10} & 9.96834\times10^{-12} & 0.00873603 \\
1.17764\times10^{-9} & 7.77349\times10^{-11} & -3.39447\times10^{-10} & 0.00677138 & 0.000406179 & -4.72694\times10^{-10} \\
-1.4427\times10^{-10} & -2.49033\times10^{-9} & -2.38166\times10^{-9} & -0.0000193388 & 0.000776004 & 7.18862\times10^{-10} \\
-0.030731 & -0.00615248 & 0.0068363 & -1.99049\times10^{-11} & 7.50864\times10^{-9} & 0.0129901
\end{pmatrix}
$$

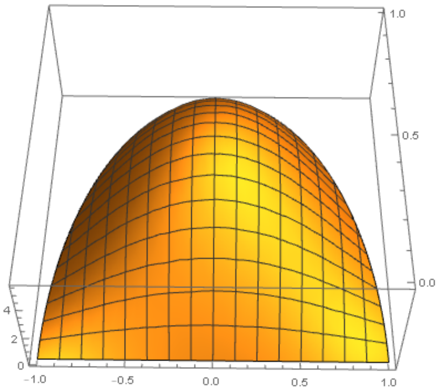
```
(*Побудова першого наближення*)
b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование                                                     требуемая абсол. точность

c = Chop[LinearSolve[m, b]];
    отс··· решить линейные уравнения
(*Перше наближення*)
u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

error = NMaximize[{Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω}, {x1, x2}][[1]];
        численная ···  абсолютное значение
k = 1;

Print["  k = ", k, "   Похибка = ", error];
печатать
```

```
(*Ітераційний процес*)
While[error > ϵ, {
  u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];
  b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
  c = Chop[LinearSolve[m, b]];
  u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] φx[[k]], {k, 1, n}];
  error = NMaximize[{Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω}, {x1, x2}][[1]];
  k++;
  Print[" k = ", k, "   Похибка = ", error];}];
```

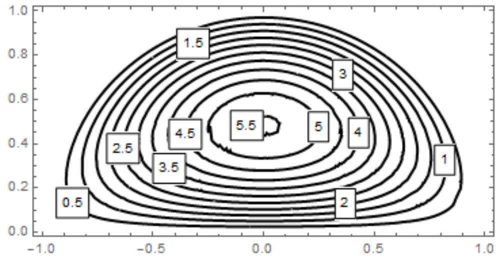
```
k = 1   Похибка = 1.74879
k = 2   Похибка = 1.13868
k = 3   Похибка = 0.685474
k = 4   Похибка = 0.409603
k = 5   Похибка = 0.241254
k = 6   Похибка = 0.141993
k = 7   Похибка = 0.0815082
k = 8   Похибка = 0.0455223
k = 9   Похибка = 0.0268378
k = 10   Похибка = 0.0155153
k = 11   Похибка = 0.00902394
k = 12   Похибка = 0.00510952
k = 13   Похибка = 0.00294207
k = 14   Похибка = 0.00167239
k = 15   Похибка = 0.000955413
```

```
u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];
(*Побудова поверхні та ліній рівня наближеного розв'язку*)
Plot3D[u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < 1], PlotRange → Full]
```


```
Plot3D[u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < 1], PlotRange → Full]
```


```
ContourPlot[u[x1, x2], {x1, x2} ∈ Ω, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < 1], PlotRange → Full,
 Contours → Function[{min, max}, Range[0.0, 5.5, 0.5]], ContourLabels → (Text[Framed[#3], {#1, #2}, Background → White] &), ContourStyle → {{Black, Thick}},
 ContourShading → None]
```




```
(*Аналітичний вигляд наближеного розв'язку*)

u[x1, x2]

13.2419 x2 (1 - x1^2 - x2^2) - 1.54082×10^-6 x1 x2 (1 - x1^2 - x2^2) - 1.52496 (-1 + 3 x1^2) x2 (1 - x1^2 - x2^2) -
 6.2757 x2 (-1 + 2 x2) (1 - x1^2 - x2^2) - 0.000014824 x1 x2 (-1 + 2 x2) (1 - x1^2 - x2^2) - 0.0240854 x2 (1 - x1^2 - x2^2) (1 - 6 x2 + 6 x2^2)

u[x, y]

13.2419 y (1 - x^2 - y^2) - 1.54082×10^-6 x y (1 - x^2 - y^2) - 1.52496 (-1 + 3 x^2) y (1 - x^2 - y^2) -
 6.2757 y (-1 + 2 y) (1 - x^2 - y^2) - 0.000014824 x y (-1 + 2 y) (1 - x^2 - y^2) - 0.0240854 y (1 - x^2 - y^2) (1 - 6 y + 6 y^2)
```

Файл МКГ_Lambda=10_Чверть круга.nb

```
(*Метод квазіфункцій Гріна*)

(*Задання початкових даних*)

Off[NIntegrate::slwcon];
в···  квадратурное интегрирова

Off[NIntegrate::eincr];
в···  квадратурное интегриров

Off[General::stop];
в···  общий


λ = 10.;

l = 2; ϵ = 10^-3;
x[x1_, x2_] := {x1, x2}; ξ[ξ1_, ξ2_] := {ξ1, ξ2};
P[i_, var_] := LegendreP[i, var];
                 P-функция Лежандра первого рода

r[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Sqrt[(x1 - ξ1)^2 + (x2 - ξ2)^2];
ω[x1_, x2_] := x1 * x2 * (1 - x1^2 - x2^2);

Ω = ImplicitRegion[{x^2 + y^2 ≤ 1, y ≥ 0, x ≥ 0}, {x, y}];
     неявно заданная область
```

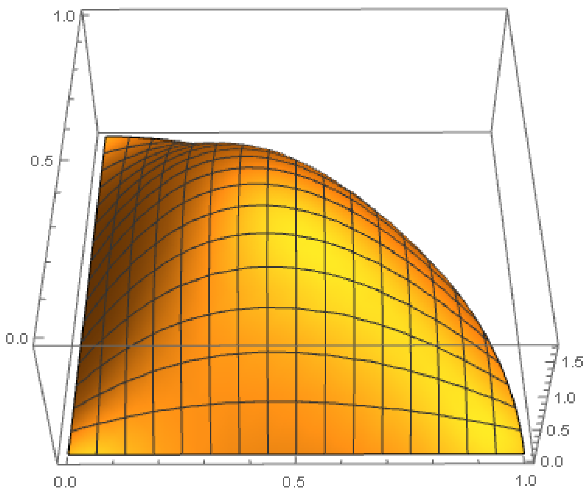
```
(*Побудова системи координатних функцій*)

φk[i_, j_] := ω[x1, x2] P[i, x1] P[j, 2 x2 - 1];

n = ((l + 1) (l + 2))/2;

Φx = {};

For[i = 0, i ≤ l, i++, For[j = 0, j ≤ l - i, j++, {AppendTo[Φx, φk[i, j]]}]];
цикл ДЛЯ                цикл ДЛЯ                добавить в конец к

Φξ = Φx /. {x1 → ξ1, x2 → ξ2};

(*Задання функцій, що входять до інтегрального рівняння*)

q[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := -1/2 Log[r[x1, x2, ξ1, ξ2]^2 + 4 ω[x1, x2] ω[ξ1, ξ2]];
                              натуральный логарифм

G2[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Log[1/r[x1, x2, ξ1, ξ2]] - q[x1, x2, ξ1, ξ2];
                          натуральный логарифм

K1[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] = -1/(2 π) (D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ1, 2}] + D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ2, 2}]);
                                  дифференцировать                 дифференцировать

(*Початкове наближення*)

u[x1_, x2_] = 1.;

(*Матриця системи Гальоркіна*)
m = Table[NIntegrate[Φx[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω] - NIntegrate[K1[x1, x2, ξ1, ξ2] Φξ[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω], {j, n}, {i, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование          квадратурное интегрирование

MatrixForm[m]
матричная форма
```

0.00161991	0.0000468394	-0.000674937	0.000833391	-2.64889×10^{-7}	-0.000133502
-0.0000289973	0.000180265	7.95571×10^{-6}	-0.000038883	0.000087546	-0.0000338376
-0.00056358	-0.000035113	0.000306471	-0.00029211	-0.0000155553	0.0000438096
0.000795515	-9.34231×10^{-7}	-0.000331958	0.000454556	-0.0000136403	1.86409×10^{-6}
-0.000041198	0.0000851871	8.32795×10^{-6}	-0.00003527	0.00004661	-0.0000195712
-0.000162577	-0.0000417156	0.0000676392	-0.0000180272	-0.0000224009	0.000115562

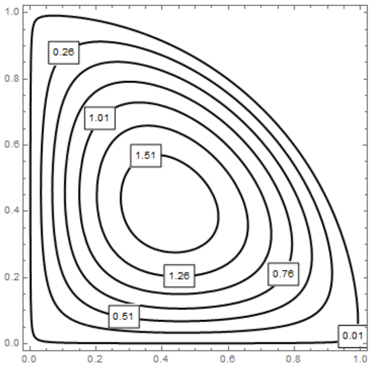
```
(*Побудова першого наближення*)

b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование                                                         требуемая абсол. точность

c = Chop[LinearSolve[m, b]];
    отс··· решить линейные уравнения

(*Перше наближення*)

u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
        численная··· абсолютное значение

k = 1;

Print["  k = ", k, "   Похибка = ", error];
печатать
```

```
(*Ітераційний процес*)
While[error > ϵ, {
|цикл-пока

  u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];
  b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
      |табл··· |квадратурное интегрирование                                                |требуемая абсол. точность

  c = Chop[LinearSolve[m, b]];
      |отс··· |решить линейные уравнения

  u1[x1_, x2_] = ∑_{k=1}^{n} c[[k]] Φx[[k]];

  error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
          |численная··· |абсолютное значение
  k++;
  Print["  k = ", k, "   Похибка = ", error];};]
  |печатать

 k = 1   Похибка = 1.
 k = 2   Похибка = 0.102301
 k = 3   Похибка = 0.0245649
 k = 4   Похибка = 0.00876673
 k = 5   Похибка = 0.00309486
 k = 6   Похибка = 0.0012158
 k = 7   Похибка = 0.000531807

u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];
```

```
(*Побудова поверхні та ліній рівня наближеного розв'язку*)

Plot3D[u[x1, x2], {x1, 0, 1}, {x2, 0, 1}, RegionFunction → Function[{x, y, z}, √(x^2 + y^2) < 1], PlotRange → Full]
|график функции 2-х переменных                   |региональная функ··· |функция              |отображае··· |в полни
```



```
ContourPlot[u[x1, x2], {x1, 0, 1}, {x2, 0, 1}, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, √(x^2 + y^2) < 1], PlotRange → Full,
|контурный график                               |аспектное отн··· |автоматич··· |региональная функ··· |функция          |отображае··· |в полном объеме
 Contours → Function[{min, max}, Range[0.01, 2.0, 0.25]], ContourLabels → (Text[Framed[#3], {#1, #2}, Background → White] &), ContourStyle → {{Black, Thick}},
 |контуры   |функция            |диапазон                 |контурные метки  |текст |обрамлённый    |фон        |белый        |контурный стиль |чёрный |жирный
 ContourShading → None]
 |оцвечивание конт··· |ни одного/отсутствует
```



```
(*Аналітичний вигляд наближеного розв'язку*)
u[x1, x2]
```

$$25.3868\,x1\,x2\,(1 - x1^2 - x2^2) - 23.1482\,x1^2\,x2\,(1 - x1^2 - x2^2) + 2.98969\,x1\,(-1 + 3\,x1^2)\,x2\,(1 - x1^2 - x2^2) - 10.6215\,x1\,x2\,(-1 + 2\,x2)\,(1 - x1^2 - x2^2) + 7.10895\,x1^2\,x2\,(-1 + 2\,x2)\,(1 - x1^2 - x2^2) + 1.36068\,x1\,x2\,(1 - x1^2 - x2^2)\,(1 - 6\,x2 + 6\,x2^2)$$

```
u[x, y]
```

$$25.3868\,x\,y\,(1 - x^2 - y^2) - 23.1482\,x^2\,y\,(1 - x^2 - y^2) + 2.98969\,x\,(-1 + 3\,x^2)\,y\,(1 - x^2 - y^2) - 10.6215\,x\,y\,(-1 + 2\,y)\,(1 - x^2 - y^2) + 7.10895\,x^2\,y\,(-1 + 2\,y)\,(1 - x^2 - y^2) + 1.36068\,x\,y\,(1 - x^2 - y^2)\,(1 - 6\,y + 6\,y^2)$$

Файл МКГ_Lambda=10_Половина еліпса.nb

```
(*Метод квазіфункцій Гріна*)

(*Задання початкових даних*)

Off[NIntegrate::slwcon];
 в···  квадратурное интегрирова

Off[NIntegrate::eincr];
 в···  квадратурное интегриров

Off[General::stop];
 в···  общий
```

$\lambda = 10.;\ a1 = 0.3;\ b1 = 1.;$

$l = 2;\ \epsilon = 10^{-3};$

`x[x1_, x2_] := {x1, x2}; ξ[ξ1_, ξ2_] := {ξ1, ξ2};`

`P[i_, var_] := LegendreP[i, var];`
 P–функция Лежандра первого рода

$r[x1\_, x2\_, \xi 1\_, \xi 2\_] := \sqrt{(x1 - \xi 1)^2 + (x2 - \xi 2)^2};$

$\omega[x1\_, x2\_] := x2\left(1 - \frac{x1^2}{a1^2} - \frac{x2^2}{b1^2}\right);$

$\Omega = \text{ImplicitRegion}\left[\left\{\frac{x^2}{a1^2} + \frac{y^2}{b1^2} \le 1,\ y \ge 0\right\},\ \{x, y\}\right];$
 неявно заданная область

```
(*Побудова системи координатних функцій*)
```

`φk[i_, j_] := ω[x1, x2] P[i, x1] P[j, 2 x2 - 1];`

$n = \frac{(l + 1)\ (l + 2)}{2};$

```
Φx = {};
For[i = 0, i ≤ l, i++, For[j = 0, j ≤ l - i, j++, {AppendTo[Φx, φk[i, j]]}]];
 цикл ДЛЯ              цикл ДЛЯ                  добавить в конец к
Φξ = Φx /. {x1 → ξ1, x2 → ξ2};
```

```
(*Задання функцій, що входять до інтегрального рівняння*)

q[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := -1/2 Log[r[x1, x2, ξ1, ξ2]^2 + 4 ω[x1, x2] ω[ξ1, ξ2]];
                             натуральный логарифм

G2[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] := Log[1/r[x1, x2, ξ1, ξ2]] - q[x1, x2, ξ1, ξ2];
                          натуральный логарифм

K1[x1_, x2_, ξ1_, ξ2_] = -1/(2 π) (D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ1, 2}] + D[q[x1, x2, ξ1, ξ2], {ξ2, 2}]);
                                   дифференцировать                 дифференцировать

(*Початкове наближення*)

u[x1_, x2_] = 1.;

(*Матриця системи Гальоркіна*)
m = Table[NIntegrate[Φx[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω] - NIntegrate[K1[x1, x2, ξ1, ξ2] Φξ[[i]] Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω], {j, n}, {i, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование                 квадратурное интегрирование

MatrixForm[m]
матричная форма
```

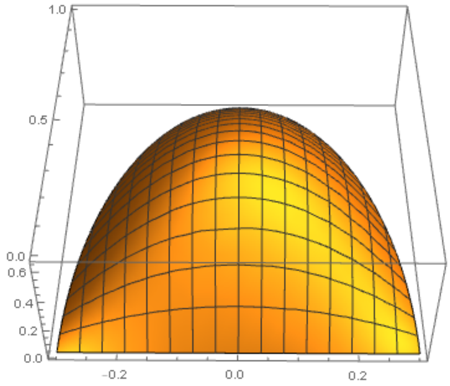
$$
\begin{pmatrix}
0.0481521 & 0.00737187 & -0.0122905 & -1.1845\times10^{-10} & 1.09028\times10^{-10} & -0.022853 \\
0.00363597 & 0.0045434 & 0.000138056 & -3.61746\times10^{-11} & 6.9508\times10^{-11} & -0.00175605 \\
-0.0143951 & -0.00160457 & 0.00516985 & -4.76697\times10^{-11} & 7.67288\times10^{-11} & 0.00679569 \\
-1.39143\times10^{-10} & 1.21282\times10^{-10} & 2.54231\times10^{-12} & 0.000334961 & 4.9963\times10^{-6} & 5.53003\times10^{-11} \\
2.64922\times10^{-10} & 1.36824\times10^{-11} & 4.4775\times10^{-11} & -5.2065\times10^{-6} & 0.00003085 & 1.18135\times10^{-10} \\
-0.0233883 & -0.00362101 & 0.00594572 & -1.03447\times10^{-10} & -9.52584\times10^{-11} & 0.0111076
\end{pmatrix}
$$

```
(*Побудова першого наближення*)
b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
    табл··· квадратурное интегрирование                                                        требуемая абсол. точность

c = Chop[LinearSolve[m, b]];
    отс··· решить линейные уравнения
(*Перше наближення*)

u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
        численная··· абсолютное значение
k = 1;

Print["  k = ", k, "    Похибка  = ", error];
печатать

(*Ітераційний процес*)
While[error > ε, {
цикл-пока

  u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];

  b = Table[NIntegrate[G2[x1, x2, ξ1, ξ2] (λ * (1/5 + 1/4 * u[ξ1, ξ2]^(3/4))) Φx[[j]], {x1, x2} ∈ Ω, {ξ1, ξ2} ∈ Ω, AccuracyGoal → 6], {j, n}];
      табл··· квадратурное интегрирование                                                        требуемая абсол. точность

  c = Chop[LinearSolve[m, b]];
      отс··· решить линейные уравнения

  u1[x1_, x2_] = Sum[c[[k]] Φx[[k]], {k, 1, n}];

  error = NMaximize[Abs[u[x1, x2] - u1[x1, x2]], {x1, x2} ∈ Ω][[1]];
          численная··· абсолютное значение
  k++;
  Print["  k = ", k, "    Похибка  = ", error];}]
  печатать
```

```
k = 1   Похибка = 1.
k = 2   Похибка = 0.148867
k = 3   Похибка = 0.0361003
k = 4   Похибка = 0.012227
k = 5   Похибка = 0.00310121
k = 6   Похибка = 0.000897491
```

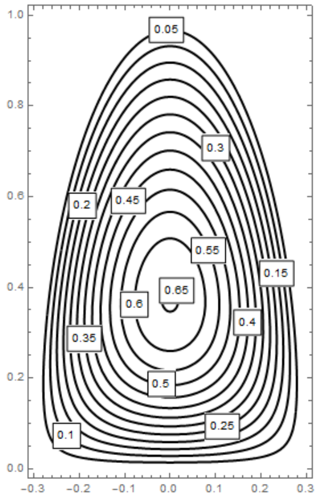
```
u[x1_, x2_] = u1[x1, x2];

(*Побудова поверхні та ліній рівня наближеного розв'язку*)

Plot3D[u[x1, x2], {x1, -a1, a1}, {x2, 0, b1}, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2/a1^2 + y^2/b1^2 < 1], PlotRange → Full]
```

график функции 2-х переменных · аспектное отн··· · автоматич··· · региональная функ··· · функция · отображае··· · в полно




```
ContourPlot[u[x1, x2], {x1, -a1, a1}, {x2, 0, b1}, AspectRatio → Automatic, RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2/a1^2 + y^2/b1^2 < 1], PlotRange → Full,
 Contours → Function[{min, max}, Range[0.05, 5, 0.05]], ContourLabels → (Text[Framed[#3], {#1, #2}, Background → White] &), ContourStyle → {{Black, Thick}},
 ContourShading → None]
```

контурный график · аспектное отн··· · автоматич··· · региональная функ··· · функция · отображае··· · в полном объеме · контуры · функция · диапазон · контурные метки · текст · обрамлённый · фон · белый · контурный стиль · чёрный · жирный · оцвечивание конт··· · ни одного/отсутствует




```
(*Аналітичний вигляд наближеного розв'язку*)

u[x1, x2]
```

$$1.3671\,x2\left(1-11.1111\,x1^2-1.\,x2^2\right)+1.37281\times10^{-6}\,x1\,x2\left(1-11.1111\,x1^2-1.\,x2^2\right)-0.464688\left(-1+3\,x1^2\right)x2\left(1-11.1111\,x1^2-1.\,x2^2\right)-1.4833\,x2\,(-1+2\,x2)\left(1-11.1111\,x1^2-1.\,x2^2\right)-7.88542\times10^{-6}\,x1\,x2\,(-1+2\,x2)\left(1-11.1111\,x1^2-1.\,x2^2\right)+0.432294\,x2\left(1-11.1111\,x1^2-1.\,x2^2\right)\left(1-6\,x2+6\,x2^2\right)$$

```
u[x, y]
```

$$1.3671\,y\left(1-11.1111\,x^2-1.\,y^2\right)+1.37281\times10^{-6}\,x\,y\left(1-11.1111\,x^2-1.\,y^2\right)-0.464688\left(-1+3\,x^2\right)y\left(1-11.1111\,x^2-1.\,y^2\right)-1.4833\,y\,(-1+2\,y)\left(1-11.1111\,x^2-1.\,y^2\right)-7.88542\times10^{-6}\,x\,y\,(-1+2\,y)\left(1-11.1111\,x^2-1.\,y^2\right)+0.432294\,y\left(1-11.1111\,x^2-1.\,y^2\right)\left(1-6\,y+6\,y^2\right)$$

ВІДОМІСТЬ АТЕСТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Позначення	Найменування	Дод. відомості
	Текстові документи	
1	Пояснювальна записка	86 с.
2	Презентаційний матеріал	40 с.
	Інші документи	
3	Роздруківки програм	25 с.
4	Рецензія	2 с.
5	Відгук керівника	1 с.

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6" rowspan="3">Метод квазіфункцій Гріна в застосуванні до розв’язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь в областях складної геометрії</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Змін</td><td>Арк.</td><td>Номер докум.</td><td>Підп.</td><td>Дата</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розроб.</td><td>Чернишов Б.С.</td><td></td><td></td><td rowspan="4">(Тема роботи)
Відомість
атестаційної роботи</td><td colspan="3"></td><td>Аркуш</td><td>Аркушів</td></tr>
<tr><td colspan="2">Перевір.</td><td>Колосова С.В.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Н. контр.</td><td>Сидоров М.В.</td><td></td><td></td><td colspan="5" rowspan="2">ХНУРЕ
кафедра ПМ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Затв.</td><td>Тевяшев А.Д.</td><td></td><td></td></tr>
</table>