КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

УДК 519.7

АЛГЕБРА ПРЕДИКАТОВ И ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

БОНДАРЕНКО М.Ф., ДУДАРЬ З.В., ПРОЦАЙ Н.Т., ЧЕРКАШИН В.В., ЧИКИНА В.А., ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО Ю.П.

Алгебра предикатов и предикатных операций рекомендуется в качестве базового аналитического языка информатики. Предикаты можно содержательно интерпретировать как мысли, а предикатные операции – как действия над мыслями.

1. Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными и практическими заданиями

Быстро прогрессирующие компьютеризация и информатизация требуют постоянного повышения производительности электронных вычислительных машин. Однако делать это становится все труднее. Резервы увеличения быстродействия решающих элементов ЭВМ исчерпываются. Остается путь наращивания числа одновременно работающих элементов в процессоре компьютера. Уже сейчас имеется практическая возможность, опираясь на успехи микроминиатюризации и удешевления электронных элементов и на достижения в области автоматизации проектирования и изготовления ЭВМ, строить компьютеры с числом элементов до 10^{15}. Однако применительно к нынешним ЭВМ последовательного действия, работающим по принципу программного управления Дж. фон Неймана, делать это не имеет смысла, поскольку в них в каждый момент времени одновременно находится в работе лишь небольшое число элементов. Попытки же перехода к машинам параллельного действия пока не дают ожидаемого роста их производительности. Так, производительность многопроцессорных ЭВМ растет не пропорционально числу имеющихся в ней процессоров, как казалось бы должно быть, а гораздо медленнее. Возникают существенные трудности и при попытках создания высокопроизводительных нейрокомпьютеров, которые строятся в виде сетей из формальных нейронов.

Между тем, существует “вычислительная машина”, созданная природой, а именно – мозг человека, для которой проблема полноценного распараллеливания обработки информации полностью решена. Почему же специалисты по нейрокомпьютерам до сих пор не смогли построить мозгоподобную ЭВМ с указанной выше производительностью, несмотря на то, что занимаются они этой проблемой уже около полувека? Попытку ответа на этот вопрос можно найти в книге Д.Хьюбела “Глаз, мозг, зрение” – нобелевского лауреата, одного из крупнейших в мире специалистов в области анатомии и физиологии нейронных сетей головного мозга человека. Он утверждает, что технические нейронные сети – это не совсем то, а вернее – совсем не то, чем являются их биологические прототипы. Однако к такому положению привело не нежелание инженеров знакомиться с биологическими нейронными сетями, а вынужденное незнание ими принципов их функционирования. В то время как анатомия (т.е. строение) нейроструктур на микроскопическом уровне в настоящее время хорошо изучена (выявление и классификация их основных типов были в основном завершены в начале XX века), исследование физиологии (т.е. функции) этих структур, несмотря на отдельные достижения, до сих пор буксует. Поэтому инженерам приходится на свой страх и риск самим строить произвольные гипотезы о принципах действия нейронных структур.

На протяжении последних 40 лет разрабатывается научное направление – теория интеллекта, в рамках которого предпринята попытка сдвинуть с мертвой точки решение обсуждаемой здесь проблемы. Суть подхода состоит в том, что интеллект человека рассматривается как логика в действии, как некоторое материальное воплощение механизма логики. Были выполнены работы по алгебраизации логики. В результате разработан специальный математический аппарат для формульного представления отношений и действий над ними, которые называются алгебро-логическими структурами. Отношения интерпретируются как мысли интеллекта, а действия над ними – как мышление.

Прежде всего интересует вопрос: какова глубинная природа интеллекта? Размышления над этим вопросом привели к задаче алгебраизации логики, к понятию универсальной логической алгебры. Эта алгебра представляется в виде двухэтажной конструкции: на первом этаже – мысли, на втором – действия над ними. Носитель универсальной логической алгебры представляет собой множество всех мыслей. В нем выделены особо некоторые мысли, играющие роль базисных элементов. Над множеством всех мыслей заданы базисные операции. Они должны быть выбраны с таким расчетом, чтобы с помощью суперпозиции базисных операций, примененных к базисным элементам, можно было выразить любую мысль. В этом случае логическая алгебра будет универсальной. Таким образом, интеллект отождествляется с действующим устройством, реализующим алгебру предикатов и предикатных операций

2. Цель. Постановка задачи

Целью данной работы является построение и исследование алгебры предикатов и предикатных операций на основе уже имеющихся и ранее изученных алгебры предикатов и алгебры предикатных операций путем расширения базисов элементов и операций этих алгебр.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи: построить алгебру предикатов, алгебру предикатных операций, найти их связь и на основании полученных результатов построить алгебру предикатов и предикатных операций.

3. Анализ последних исследований и публикаций, посвященных данной проблеме, выделение нерешенных частей общей проблемы, которым посвящена данная статья

На сегодняшний день разными авторами и в разных работах, посвященных вопросам формализации интеллекта, рассмотрены различные алгебры: алгебра предикатов, алгебра предикатных операций и их разновидности, определены их структура и свойства. Однако должного внимания не было уделено алгебре предикатов и предикатных операций. Это новый тип алгебры, которая является синтезом двух предыдущих алгебр.

Для начала рассмотрим общее понятие алгебры. Алгеброй Ω над множеством A называется любая система формульного выражения элементов множества A. Множество A называется носителем алгебры Ω. Любая алгебра Ω над A характеризуется множеством базисных операций (одноместных или многоместных), отображающих множество A в себя, и множеством базисных элементов, выбираемых из A. Множество всех базисных операций алгебры Ω называется базисом операций алгебры Ω, множество всех базисных элементов алгебры Ω называется её базисом элементов. Базис операций и базис элементов, вместе взятые, образуют базис алгебры Ω. Формулой алгебры Ω называется выражение, представляющее какую-нибудь суперпозицию базисных операций алгебры Ω, примененную к ее базисным элементам. Алгебра над A называется полной, если ее формулами можно выразить любой элемент множества A. Базис алгебры называется полным, если эта алгебра полна. Две алгебры Ω и Δ называются равносильными, если любой объект, выразимый формулами алгебры Ω, можно выразить также формулами алгебры Δ, и наоборот. Базис алгебры называется несократимым, если исключение из него любой операции или элемента делает его неполным.

Формулы алгебры, выражающие один и тот же элемент её носителя, называются тождественными. Тождеством алгебры называется выражение, указывающее какую-либо пару её тождественных формул. Если две разные алгебры равносильны, то можно говорить и о тождестве формул разных алгебр. Схемой тождеств алгебры Ω называется запись, указывающая целое семейство однотипных тождеств алгебры Ω. Схемы тождеств алгебры Ω называются законами этой алгебры. Система законов алгебры называется полной, если из неё можно вывести любое тождество этой алгебры. Система законов алгебры называется несократимой, если ни один из этих законов невозможно логически вывести из совокупности остальных.

Консервативным расширением алгебры Ω называется такое расширение базиса этой алгебры, которое не увеличивает её выразительные возможности, т.е. не расширяет множество описываемых ею объектов. Любое подмножество B носителя A алгебры Ω называется замкнутым в алгебре Ω, если результат каждой базисной операции алгебры Ω, выполненной над произвольными элементами множества B, снова принадлежит множеству B. В этом случае говорят, что множество B замкнуто относительно каждой из базисных операций алгебры Ω. Если множество B замкнуто, то оно, вместе с базисными операциями (действие которых теперь ограничено только множеством B) и базисными элементами алгебры Ω (только теми, которые содержатся в множестве B), тоже образует алгебру. Так, построенная алгебра Δ называется подалгеброй алгебры Ω.

4. Основной материал

Далее рассмотрим понятие алгебры предикатов. Возьмем какое-нибудь непустое множество U, элементы которого будем называть предметами. Само же множество U называется универсумом предметов. Возьмем, далее, m каких-нибудь непустых, необязательно различных подмножеств $A_1, A_2, ..., A_m$ универсума U. Декартово произведение $S = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ множеств $A_1, A_2, ..., A_m$ называется предметным пространством S с координатными предметными осями $A_1, A_2, ..., A_m$ над универсумом U. Число осей m выбирается произвольно и называется размерностью пространства S. Вводим множество $V = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ различных переменных $x_1, x_2, ..., x_m$, которые называются предметными переменными пространства S. Множество V называется универсумом переменных пространства S. Значениями переменной x_i $(i = \overline{1, m})$ служат элементы множества A_i, так что $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$. Множества $A_1, A_2, ..., A_m$ называются областями изменения переменных $x_1, x_2, ..., x_m$.

Если $\quad x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$

и $\quad x_1 = a_1, x_2 = a_2, ..., x_m = a_m$,

то пишут $(a_1, a_2, ..., a_m) \in S$ и говорят, что предметный вектор $(a_1, a_2, ..., a_m)$ принадлежит пространству $S = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$.

Элементы $(a_1, a_2, ..., a_m) \in S$ вектора $(a_1, a_2, ..., a_m)$ называются его компонентами (первым, вторым, , m-м). Предметное пространство S можно рассматривать как совокупность всех векторов вида $(x_1, x_2, ..., x_m)$, компоненты которых удовлетворяют условию $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$. Любое подмножество Ð пространства S называется отношением, образованным в (или иначе: заданным на) пространстве S . Отношение имеет размерность m . Говорят, что оно m -местно. Отношения, заданные на одном и том же пространстве S , называются однотипными. Тип отношения определяется набором переменных $x_1, x_2, ..., x_m$ и набором множеств $A_1, A_2, ..., A_m$. Отношение $\varnothing$, не содержащее ни одного вектора, называется пустым, отношение S , в котором имеются всевозможные векторы, – полным.

Предикатом, заданным на декартовом произведении $A_1, A_2, ..., A_m$, называется любая функция $P(x_1, x_2, ..., x_m) = \xi$, отображающая декартово произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ множеств $A_1, A_2, ..., A_m$ в множество $\Sigma = \{0, 1\}$. Символы 0 и 1 называются булевыми элементами, Σ – множество всех булевых элементов. Переменная $\xi = \{0, 1\}$, являющаяся значением предиката P , называется булевой. Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ на $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ называется конечным, если все множества $A_1, A_2, ..., A_m$ конечны, и бесконечным – в противном случае. Эта же терминология переносится и на соответствующие предикатам отношения. Переменные $x_1, x_2, ..., x_m$ называются аргументами предиката Ð.

Пусть L – множество всех отношений на S , M – множество всех предикатов на S . Между всеми отношениями множества L и всеми предикатами множества M , заданными на S , существует взаимно-однозначное соответствие. Отношение Ð из L и предикат P из M называются соответствующими друг другу, если при любых

$$x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$$

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{cases} 1, \text{ åñëè } (x_1, x_2, ..., x_m) \in P, \\ 0, \text{ åñëè } (x_1, x_2, ..., x_m) \notin P. \end{cases}$$

Обратный переход от предиката P к отношению Ð осуществляется по правилу:

если $P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$, то $(x_1, x_2, ..., x_m) \in P$,

если $P(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$, то $(x_1, x_2, ..., x_m) \notin P$.

Множество всех векторов $(x_1, x_2, ..., x_m)$, удовлетворяющих уравнению $P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$, образует отношение Ð, которое называется областью истинности предиката P . Предикат $P \in M$ называется характеристической функцией отношения Ð $\in L$. Алгеброй предикатов называется любая алгебра, заданная над носителем M .

Над булевыми элементами можно выполнять операции дизъюнкции $\xi \vee \eta$ $(0 \vee 0 = 0, 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1)$, конъюнкции $\xi \wedge \eta = \xi \cdot \eta = \xi\eta$ $(0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1)$ и отрицания $\bar{\xi} = \neg\xi$ $(\bar{0} = 1, \bar{1} = 0)$. Эти операции над предикатами определяются следующими равенствами: для любых

$$x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$$

$$(P \vee Q)(x_1, x_2, ..., x_m) = P(x_1, x_2, ..., x_m) \vee$$
$$\vee Q(x_1, x_2, ..., x_m);$$

$$(P \wedge Q)(x_1, x_2, ..., x_m) = P(x_1, x_2, ..., x_m) \wedge$$
$$\wedge Q(x_1, x_2, ..., x_m);$$

$$(\neg P)(x_1, x_2, ..., x_m) = \neg(P(x_1, x_2, ..., x_m)) .$$

Символы $\vee, \wedge, \neg$, стоящие слева от знака равенства, означают операции над предикатами, справа – операции над значениями предикатов, т.е. над булевыми элементами. Предикат, обращающийся в 0 при любых значениях своих аргументов, называется тождественно ложным и обозначается символом 0 . Предикат, обращающийся в 1 при любых значениях своих аргументов, называется тождественно истинным и обозначается символом 1 . Тождественно ложному предикату соответствует пустое отношение, тождественно истинному – полное.

Булевой алгеброй называется фиксированное множество B , в состав которого входят хотя бы какие-нибудь два элемента 0 и 1 , с заданными на нём какими-либо операциями $P \vee Q$, PQ и $\bar{P}$, подчиняющимися следующим основным законам: для любых $P, Q, R \in M$

$$P \vee P = P ,\ PP = P ;\ P \vee Q = Q \vee P ,\ (PQ)R = P(QR) ,$$
$$PQ = QP ;\ (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R) ,$$
$$(P \vee Q)R = PR \vee QR ,\ PQ \vee R = (P \vee R)(Q \vee R) ;$$
$$P \vee PQ = P ,\ P(P \vee Q) = P ;\ \overline{P \vee Q} = \bar{P}\bar{Q} ,$$
$$\overline{PQ} = \bar{P} \vee \bar{Q} ;\ \bar{\bar{P}} = P ;\ P \vee \bar{P} = 1 ,\ P\bar{P} = 0 ;\ P \vee 0 = P ,$$
$$P \cdot 1 = P ;\ P \cdot 0 = 0 ,\ P \vee 1 = 1 .$$

Понимая под B множество $\Sigma = \{0, 1\}$ булевых элементов, а под операциями $\vee, \wedge, \neg$ – дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание булевых элементов, получаем булеву алгебру булевых элементов.

Функции, отображающие Σ^n в Σ , называются n-местными булевыми функциями. Понимая под B множество всех таких функций, под 0 и 1 – булевы функции, тождественно равные 0 и 1 , а под операциями $\vee, \wedge, \neg$ – их дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание, получаем булеву алгебру n-местных булевых функций.

Если под множеством B понимать систему всех подмножеств какого-нибудь фиксированного множества U, под 0 – множество $\varnothing$, под 1 – множество U, а под операциями $\vee, \wedge, \neg$ – объединение, пересечение и дополнение этих подмножеств, то получаем булеву алгебру множеств. Если под множеством B понимать множество L всех отношений какого-нибудь типа, под знаками 0 и 1 – пустое и полное отношения, а под знаками $\vee, \wedge, \neg$ – объединение, пересечение и дополнение отношений, то приходим к булевой алгебре отношений. Понимая же под B множество M всех предикатов некоторого типа, под знаками 0 и 1 – тождественно-ложный и тождественно-истинный предикаты, а под знаками $\vee, \wedge, \neg$ – дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание предикатов, приходим к булевой алгебре предикатов. При формализации естественного языка булева алгебра играет исключительно важную роль, она описывает самые глубинные механизмы интеллекта, его первооснову. Можно сказать и иначе: булева алгебра – это тот каркас, который скрепляет в единое целое все здание интеллекта.

Предикаты любого типа можно записывать в виде формул. Тип конечных предикатов задаем, указывая множества $V = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ и $A_i = \{a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{k_i i}\}$, $i = \overline{1, m}$, k_i – число элементов в множестве A_i. Над носителем M вводим дизъюнктивно-конъюнктивную алгебру предикатов. В роли базисных элементов этой алгебры используем предикаты 0 и 1, а также предикаты x_i^a узнавания предмета a по переменной x_i, $i = \overline{1, m}$, $a \in A_i$, $x_i^a = \begin{cases} 1, \text{если } x_i = a, \\ 0, \text{если } x_i \neq a. \end{cases}$

Символ a в записи предиката x_i^a называется его показателем. В роли базисных операций в дизъюнктивно-конъюнктивной алгебре предикатов используются дизъюнкция и конъюнкция предикатов. Любой предикат $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ в этой алгебре можно записать формулой в виде его совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ):

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = \bigvee_{(a_1, a_2, ..., a_m) \in P} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}.$$

Выражения вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}$ называются конституэнтами единицы предиката P. Запись $(a_1, a_2, ..., a_m) \in Đ$ под знаком $\vee$ означает, что берётся дизъюнкция всех конституэнт единицы $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}$, показатели сомножителей которой удовлетворяют условию $(a_1, a_2, ..., a_m) \in Đ$, где P – отношение, соответствующее предикату $P(x_1, x_2, ..., x_m)$. Это означает, что дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов полна, т.е. что формулами этой алгебры можно записать любой предикат, а следовательно, можно выразить аналитически любое отношение произвольного типа. Базис дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов даже избыточен: из него всегда можно исключить 1, а при числе предметов в множестве A_i ($i = \overline{1, m}$), не меньшем двух, – также и 0 без потери этой алгеброй свойства полноты. После такого исключения её базис становится несократимым. Исключаемые из базиса элементы выражаются через оставшиеся в нём операции и элементы с помощью законов истинности $\bigvee_{a \in Ai} x_i^a = 1$ и ложности $x_i^a x_i^b = 0$ $(a \neq b)$.

Переходим к рассмотрению алгебры предикатных операций. Пусть U – универсум предметов; $A_1, A_2, ..., A_m$ – его подмножества; $S = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ – предметное пространство; $x_1, x_2, ..., x_m$ – предметные переменные с областями изменения $A_1, A_2, ..., A_m$; M – множество всех предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ на пространстве S, называемое универсумом предикатов; $B_1, B_2, ..., B_n$ – его непустые подмножества; $\grave{O} = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ – предикатное пространство размерности n; $X_1, X_2, ..., X_n$ – предикатные переменные с областями изменения $B_1, B_2, ..., B_n$. Элементы множества $\grave{O}$ называются предикатными векторами. Любая функция $F(X_1, X_2, ..., X_n) = Y$, $F: S \to B_j$ $(j = \overline{1, n})$ называется предикатной операцией. Ее тип определяется набором переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ и набором множеств $B_1, B_2, ..., B_n$. Образуем множество N всех предикатных операций заданного типа.

Алгеброй предикатных операций над N называется любая алгебра, заданная на носителе N. Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания над предикатными операциями определяются следующими равенствами: для любых $X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, ..., X_n \in B_n$

$$(F \vee G)(X_1, X_2, ..., X_n) = F(X_1, X_2, ..., X_n) \vee$$
$$\vee G(X_1, X_2, ..., X_n);$$
$$(F \wedge G)(X_1, X_2, ..., X_n) = F(X_1, X_2, ..., X_n) \wedge$$
$$\wedge G(X_1, X_2, ..., X_n);$$
$$\neg F(X_1, X_2, ..., X_n) = \neg(F(X_1, X_2, ..., X_n)).$$

Символы $\vee, \wedge, \neg$, стоящие слева от знаков равенства, означают операции над предикатными операциями, справа – над предикатами. Включение $F \subseteq G$ предикатных операций F и G определяется следующим образом: $F \subseteq G \Leftrightarrow F \vee G = G$. Булевой алгеброй предикатных операций называется любая алгебра предикатных операций с базисом операций, состоящим из дизъюнкции $X \vee Y$, конъюнкции $X \wedge Y$ и отрицания $\neg X$ предикатных операций X и Y.

Тождественной предикатной операцией по переменной X_j $(j = \overline{1, n})$ называется операция со значениями $F(X_1, X_2, ..., X_j, ..., X_n) = X_j$ при любых значениях её аргументов

$X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, ..., X_n \in B_n$. Константной предикатной операцией называется операция со значением $F(X_1, X_2, ..., X_j, ..., X_n) = P$ при любых значениях её аргументов $X_1, X_2, ..., X_n$. Здесь P — предикат, произвольно выбираемый из $B_j \; (j = \overline{1, n})$.

Алгеброй предикатных операций с константами и переменными называется любая булева алгебра предикатных операций, у которой базисными элементами служат всевозможные тождественные и константные предикатные операции. Тождественные предикатные операции называются переменными алгебры предикатных операций. Константные предикатные операции называются константами этой алгебры.

Любая алгебра предикатных операций с константами и переменными неполна, если хотя бы в одном из её множеств $B_j \; (j = \overline{1, n})$ содержится более двух предикатов. В частности, в такой алгебре невозможно выразить предикатную операцию X_j^P из B_j в $B_j \; (P \neq 1, P \neq 0)$: $X_j^P = \begin{cases} 1, \text{ если } X_j = P; \\ 0, \text{ если } X_j \neq P, \end{cases}$ которая называется предикатом узнавания предиката P по переменной $X_j \quad (j = \overline{1, n})$. В частном случае, когда $B_j = \{0, 1\}$ при всех $(j = \overline{1, n})$, алгебра предикатных операций с константами и переменными превращается в алгебру n-местных булевых функций, которая при любом n полна.

Дизъюнктивно-конъюнктивной называется любая алгебра предикатных операций, у которой базисными операциями служат дизъюнкция $X \vee Y$ и конъюнкция $X \wedge Y$ произвольных предикатных операций X и Y, а базисными элементами — всевозможные константы $P \in B_j \; (j = \overline{1, n})$ и предикаты узнавания предиката X_j^P. При любом носителе N дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатных операций полна. Любая предикатная операция в ней выражается формулой

$$F(X_1, X_2, ..., X_n) = \bigvee_{P_i \in B_i, i=1,...n} F(P_1, P_2, ..., P_n) X_1^{P_1} X_2^{P_2} ... X_n^{P_n},$$

называемой СДНФ предикатной операции.

Фундаментальной называется любая алгебра предикатных операций, у которой базисными операциями служат дизъюнкция $X \vee Y$ и конъюнкция $X \wedge Y$ всевозможных предикатных операций X и Y, а базисными элементами — предикаты 0 и 1, всевозможные предикаты узнавания предмета $x_i^a \; (i = \overline{1, m}; x_i, a \in A_i)$ и всевозможные предикаты узнавания предиката $X_j^P \;\; (j = \overline{1, n}; X_j, P \in B_j)$. При любом носителе N фундаментальная алгебра предикатных операций полна. Дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов на носителе M является подалгеброй фундаментальной алгебры предикатных операций на носителе N. Если из базиса фундаментальной алгебры исключить все предикаты узнавания предиката $X_j^P \;\; (j = \overline{1, n}; X_j, P \in B_j)$, то она превратится в дизъюнктивно-конъюнктивную алгебру предикатов. Алгебра предикатных операций вместе с ее подалгеброй, являющейся алгеброй предикатов, называется алгеброй предикатов и предикатных операций.

Расширяем фундаментальную алгебру консервативно за счет введения в ее базис операции отрицания $\neg X$. В этой алгебре в роли основных законов используются все основные законы булевой алгебры и, кроме того, закон отрицания для предикатов узнавания предмета $\overline{x_i^a} = \bigvee_{b \in A_i, b \neq a} x_i^b$ и узнавания предиката $\overline{X_j^P} = \bigvee_{Q \in B_j, Q \neq P} X_j^Q$; закон истинности для предикатов узнавания предмета $\bigvee_{a \in A_i} x_i^a = 1$ и узнавания предиката $\bigvee_{P \in B_j} X_j^P = 1$; закон ложности для предиката узнавания предмета $x_i^a x_i^b = 0$, если $a \neq b$, и узнавания предиката $X_j^P X_j^Q = 0$, если $P \neq Q$. Перечисленные законы справедливы для всех $i = \overline{1, m} \; (j = \overline{1, n})$ $a, b \in A_i$; $P, Q \in B_j$. Они образуют полную систему законов фундаментальной алгебры.

Кванторной алгеброй называется любая алгебра предикатных операций с базисом операций, состоящим из дизъюнкции $X \vee Y$, конъюнкции $X \wedge Y$ и отрицания $\neg X$, кванторов существования $\exists x_i \in A_i(X)$ и общности $\forall x_i \in A_i(X)$, замен переменных $x_i / x_k(X)$, их перестановок $x_i | x_k(X)$ и подстановок $x_i / a(X)$, и с базисом элементов, состоящим из предикатов 0 и 1, предикатов узнавания предмета x_i^a и переменных $X_j \; (X, Y \in N; i, k = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; a \in A_i)$. Кванторная алгебра при любом носителе N полна, ее базис даже избыточен. Исключение из него отрицания, замен, перестановок, подстановок и предикатов $0, 1$ делает базис кванторной алгебры несократимым при сохранении им свойства полноты.

Отрицание исключается из формул кванторной алгебры в два этапа. На первом этапе знаки отрицания последовательным применением законов

$$\overline{\exists x_i \in A_i(X)} = \forall x_i \in A_i(\overline{X});$$

$$\overline{\forall x_i \in A_i(X)} = \exists x_i \in A_i(\overline{X});$$

$$\overline{x_i / x_k(X)} = x_i / x_k(\overline{X}); \;\; \overline{x_i | x_k(X)} = x_i | x_k(\overline{X});$$

$$\overline{x_i / a(X)} = x_i / a(\overline{X});$$

$$\overline{X \vee Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y};\ \overline{X \wedge Y} = \overline{X} \vee \overline{Y};\ \overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q};$$
$$\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$$

перемещаются непосредственно на предикаты узнавания предмета. На втором этапе с помощью законов: $\overline{\overline{P}} = P$ и $\overline{x_i^a} = \bigvee_{b \in A_i, b \neq a} x_i^b$ знаки отрицания из формулы вовсе исключаются.

Замены, перестановки и подстановки исключаются из формул кванторной алгебры посредством следующих тождеств:

$$x_i / x_k (X) = \exists x_i \in A_i ((\bigvee_{a \in A_i} x_i^a x_k^a) \wedge X);$$
$$x_i \big| x_k (X) = x_l / x_k (x_k / x_i (x_i / x_l (X)));$$
$$x_i / a(X) = \exists x_i \in A_i (x_i^a \wedge X).$$

Предикаты 0 и 1 исключаются с помощью законов ложности и истинности, упоминавшихся ранее. Если в каждом из множеств A_i, $i = \overline{1, m}$ содержится в точности по одному элементу, то исключить 0 из базиса кванторной алгебры не удается без потери им свойства полноты. Несократимый базис кванторной алгебры в данном случае состоит из операций дизъюнкции и конъюнкции, из m кванторов существования и m кванторов общности, из $\sum_{i=1}^{m} k_i$ предикатов узнавания предмета, где k_i – число предметов в множестве A_i, $i = \overline{1, m}$, из n предикатных переменных и константы 0. Дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов является подалгеброй кванторной алгебры, поскольку в базисе последней имеются дизъюнкция, конъюнкция и предикаты узнавания предмета, а также предикаты 0 и 1.

Фундаментальная и кванторная алгебры предикатных операций равносильны, поскольку возможен перевод описаний любых предикатных операций с языка фундаментальной алгебры на язык кванторной алгебры и обратно. Для перевода формул фундаментальной алгебры на язык формул кванторной алгебры достаточно базисные операции и элементы фундаментальной алгебры выразить на языке кванторной алгебры. Базисными операциями в фундаментальной алгебре служат дизъюнкция и конъюнкция, которые присутствуют также и в базисе кванторной алгебры. Базисными элементами в ней являются элементы 0 и 1, а также предикаты узнавания предмета x_i^a и предиката X_j^P. Элементы 0, 1 и x_i^a в базисе кванторной алгебры также имеются. Осталось выразить элементы X_j^P. Это можно сделать посредством зависимостей:

$$X_j^P = \forall x_1 \in A_1 (\forall x_2 \in A_2 ... (\forall x_m \in A_m$$
$$(X(x_1, x_2, ..., x_m) \sim P(x_1, x_2, ..., x_m))...);$$
$$X \sim P = \overline{X}\overline{P} \vee XP.$$

Постоянные предикаты P выражаем на языке дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов, которая, как было сказано выше, является подалгеброй кванторной алгебры.

Для перевода формул кванторной алгебры на язык формул фундаментальной алгебры достаточно операции и элементы несократимого базиса кванторной алгебры выразить на языке фундаментальной алгебры. Операциями в несократимом базисе кванторной алгебры, как было сказано выше, служат дизъюнкция и конъюнкция, которые присутствуют и в базисе фундаментальной алгебры, а также кванторы существования и общности. Кванторы существования и общности выражаются через дизъюнкцию, конъюнкцию и подстановки по формулам:

$$\exists x_i \in A_i (X) = \bigvee_{a \in A_i} x_i / a(X);$$
$$\forall x_i \in A_i (X) \bigwedge_{a \in A_i} x_i / a(X).$$

Операции $x_i / a(X)$ $(i = \overline{1, m})$ последовательным применением законов

$$x_i / a(P \vee Q) = x_i / a(P) \vee x_i / a(Q);$$
$$x_i / a(P \wedge Q) = x_i / a(P) \wedge x_i / a(Q);$$
$$x_i / a(\neg P) = \neg(x_i / a(P))$$

перемещаются непосредственно на предикаты $0, 1$ и x_k^b $(i = \overline{1, m}, \underline{b \in A_k})$ и на предикатные переменные X_j $(j = \overline{1, n})$, а затем исключаются вовсе с помощью зависимостей:

$$x_i / a(0) = 0;\ x_i / a(1) = 1;$$
$$x_i / a(x_k^b) = x_k^b, \text{ если } i \neq k;$$
$$x_i / a(x_i^b) = \begin{cases} 1, \text{ если } b=a; \\ 0, \text{ если } b \neq a; \end{cases}$$
$$x_i / a(X_j) = \bigvee_{P \in B_j} P(x_1, x_2, ..., a, ..., x_m),$$
$$X_j^{P(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_m)}.$$

Элементами в несократимом базисе произвольной кванторной алгебры служат предикаты 0 и x_i^a $(i = \overline{1, m})$, которые присутствуют и в базисе фундаментальной алгебры, а также предикатные переменные X_j $(j = \overline{1, n})$. Последние выражаются по формуле

$$X_j = \bigvee_{P \in B_j} P(x_1, x_2, ..., x_m) X_j^{P(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_m)}$$

через дизъюнкцию, конъюнкцию, предикаты узнавания предиката и постоянные предикаты.

5. Выводы и перспективы дальнейших исследований в данном направлении

С точки зрения практического значения исследованная в статье алгебра предикатов и предикатных операций рекомендуется для формального описания механизма естественного языка и мышления, совершенствования баз данных и знаний, экспертных систем, для разработки высокопроизводительных мозгоподобных ЭВМ параллельного действия.

Как было сказано выше, отправным пунктом для создания алгебры предикатов и предикатных операций были разработка и исследование алгебры предикатов и алгебры предикатных операций.

Научная новизна данной работы состоит в построении алгебры, основанной на синтезе этих хорошо разработанных и исследованных алгебр. Алгебра предикатов - основная алгебра для теории интеллекта. С помощью предикатов описываются отношения. На языке формул алгебры предикатов в теории интеллекта описывается поведение испытуемого и многие другие объекты, в частности, структура мыслей и выражающих их предложений естественного языка. На языке алгебры предикатов описываются понятия.

Алгебра предикатных операций используется в теории интеллекта для формульной записи свойств (законов) поведения испытуемого и для многого другого. В частности, – для описания структуры предложения, текста. Схемы машин описываются предикатами, а эволюция этих систем, изменения во времени – алгеброй предикатных операций. Последнюю можно рассматривать как алгебру предикатов, у которой переменные заданы на своих областях.

Алгебра предикатов и предикатных операций – это соединение алгебры предикатов и алгебры предикатных операций. Алгебра предикатов становится частным случаем алгебры предикатных операций. Это происходит из-за их аналогичности. Сравнение этих алгебр показывает, что алгебра предикатов и предикатных операций имеет более экономный базис, чем ее предшественицы, но, тем не менее, – это тоже полная алгебра. Это является достоинством данной алгебры как с практической, так и с теоретической точки зрения.

Литература: **1.** *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. Х.: Вища шк., 1984. 142 с. **2.** *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Технические средства. Х.: Вища шк., 1986. 134 с. **3.** *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. Х.: Вища шк., 1987. 159 с. **4.** *Дударь З.В.*, *Мельникова Р.В.*, *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Отношения как объекты формульного описания // Радиоэлектроника и информатика. 1997. № 1. С. 115-119. **5.** *Дударь З.В., Кравец Н.С., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О фундаментальной алгебре предикатных операций // Проблемы бионики. 1998. Вып. 49. С. 68-77. **6.** *Дударь З.В., Кравец Н.С., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О прикладной алгебре предикатных операций // Проблемы бионики, 1998. Вып. 49. С. 78-87. **7.** *Баталин А.В., Тевяшев А.Д., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О системном анализе информационных процессов // Радиоэлектроника и информатика. 1998. № 3. С. 102–110.

Поступила в редколлегию 03.08.2004

Рецензент: д-р техн. наук Левыкин В.М.

Бондаренко Михаил Федорович, д-р техн. наук, профессор, ректор ХНУРЭ. Научные интересы: информатика, мозгоподобные ЭВМ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 43-30-53.

Дударь Зоя Владимировна, канд. техн. наук., профессор кафедры программного обеспечения ЭВМ ХНУРЭ. Научные интересы: алгебраическая логика, модели языка. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-46.

Процай Наталья Тимофеевна, аспирантка кафедры программного обеспечения ЭВМ ХНУРЭ. Научные интересы: модели языка. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-46.

Черкашин Валерий Викторович, аспирант кафедры программного обеспечения ЭВМ ХНУРЭ. Научные интересы: теория баз данных. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-46.

Чикина Валентина Алексеевна, ведущий научный сотрудник кафедры ПО ЭВМ ХНУРЭ. Научные интересы: модели языка. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-46.

Шабанов-Кушнаренко Юрий Петрович, д-р техн. наук, профессор кафедры программного обеспечения ЭВМ ХНУРЭ. Научные интересы: теория информатизации. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-46.