УДК 621.372.8:621.372.853(084)

Н. Г. ЗУЕВ, канд. физ.-мат. наук, Н. И. ПЯТАК,
В. С. ЧУМАЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, С. В. ЧУМАЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ. ЧАСТЬ 1

Введение

Известно, что цилиндрические периодические структуры широко и успешно применяются в физике и технике сверхвысоких частот, ускорителях заряженных частиц и антенной технике [1–4] .

Математически строгая постановка задачи о распространении волн в цилиндрических периодических волноводах такова. Требуется найти нетривиальное решение однородной системы уравнений Максвелла, которое должно удовлетворять периодическим граничным условиям на идеально проводящей поверхности волновода; быть регулярным во всей области пространства, дополнительной к элементам периодического волновода; удовлетворять условию излучения (для открытых структур) и условию конечности энергии для любой области пространства.

Обычно для расчетов периодических волноводов применяются как аналитические, так и численные методы, позволяющие получить большой объем физической информации с помощью ЭВМ. Данное направление является достаточно перспективным в теории периодических волноводов. Таким путем можно, в принципе, вычислить дисперсионные характеристики и рассчитать структуру поля в периодическом волноводе с высокой, заранее заданной точностью, используя современные супер-ЭВМ.

Однако, развитие численных методов и алгоритмов для ЭВМ не только не исключает, но и предполагает параллельное развитие обоснованных аналитических методов исследования для такого рода задач. При этом допускаются некоторые ограничения на параметры задачи, которые приводят к аналитическим решениям.

Исходная краевая электродинамическая задача для уравнений Максвелла с периодическими граничными условиями формулируется в общепринятой в теории электромагнетизма строгой постановке. В такой постановке искомое поле представлено в виде разложений в ряды Фурье по полным системам функций, задача сводится к отысканию последовательностей коэффициентов разложения.

Для вычисления коэффициентов Фурье в работе использован метод переразложения системы функций, полной на одном интервале, по системе функций, полной на другом интервале. Заметим, что наиболее удобной формой для анализа процессов распространения волн в цилиндрических периодических волноводах является такая модификация метода переразложения, которая приводит к системам линейных алгебраических уравнений второго рода.

Важным фактом является то, что результирующая бесконечная система линейных алгебраических уравнений, с одной стороны, позволяет получить решение численными методами с высокой степенью точности, а с другой, – допускает аналитическое решение для частных случаев волноводов с узкими щелями. Последнее удается найти, если в исходной системе уравнений разложить коэффициенты при неизвестных в ряд по степеням отношения ширины щели к периоду, и в виде аналогичного разложения в степенной ряд, находить решение бесконечной системы алгебраических уравнений с точностью до квадратичных (или кубических) членов этого ряда. Такое решение может быть использовано в качестве начального приближения для разработки численного алгоритма решения исходной точной системы уравнений. Оно также имеет и самостоятельное значение, так как соответствует часто встречающимся ситуациям на практике. Существенно, что приближенное решение получается путем решения в явном виде бесконечной системы с упрощенными коэффициентами при неизвестных, а не в результате сведения исходной алгебраической системы бесконечного порядка путем произвольного усечения.

Постановка задачи

При решении задач о распространении электромагнитных волн в цилиндрических периодических структурах существенным образом используется теорема Флокэ. Действительно, во многих случаях векторную электродинамическую задачу обычно удается свести к одной (или двум) скалярным задачам и разделить переменные в волновом уравнении, после чего применяется теорема Флокэ. Она имеет ясный физический смысл: электромагнитное поле в любой точке периодической структуры при изменении продольной координаты на один пространственный период может отличаться от поля в исходной точке только экспоненциальным множителем, учитывающим в общем случае изменение амплитуды и фазы поля.

Будем рассматривать чаще всего использующиеся в практических устройствах азимутально-однородные Е–волны. Решение задачи удобно получить, если воспользоваться представлением электромагнитного поля с помощью однокомпонентного вектора Герца:

$$\vec{\Pi} = \vec{z}_0 \Pi(r,z) e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Временной множитель $e^{-i\omega t}$ далее везде опускаем. Скалярная функция $\Pi(r,z)$ должна являться решением уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\Pi(r,z) + k^2\Pi(r,z) = 0. \quad (2)$$

Электромагнитное поле с помощью вектора Герца $\vec{\Pi}$ определяем по известным формулам:

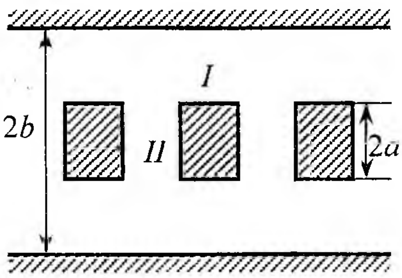
$$\vec{E} = graddiv\vec{\Pi} + k^2\vec{\Pi},\ \vec{H} = -ikrot\vec{\Pi}. \quad (3)$$

Решение задача заключается в отыскании электромагнитного поля (3), которое удовлетворяет следующим требованиям: а) является решением однородного уравнения (2); б) подчиняется граничным условиям на идеально проводящих поверхностях $\bar{E}_{\tan g} = 0$ и непрерывно всюду в дополнительной области пространства; в) удовлетворяет условию излучения для открытых систем;

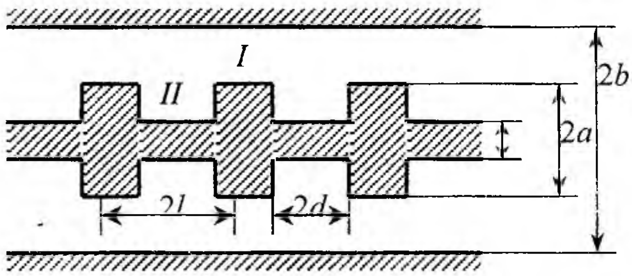
г) удовлетворяет условию конечности энергии в произвольной области пространства. Эти условия являются необходимыми и достаточными для доказательства единственности решения неоднородной задачи, а решения однородных задач определяются при этих условиях с точностью до постоянного множителя.

Решение задачи

Будем считать, что на периодической границе раздела $(r = a)$ участки $d < |z + 2Nl| \le l$ соответствуют идеально проводящим элементам волновода, а остальная часть ее $|z + 2Nl| \le d$ – щелям между ними (см. рис.).



а



б

Скалярные функции $\Pi(r,z)$, определяющие потенциалы Герца, представим соответственно для области распространения и внутренней области волновода в следующем виде:

$$\Pi^{(1)}(r,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n R_n(r) e^{ih_n z}, \quad (4,\text{ а})$$

$$\Pi^{(2)}(r,z) = E(N) \sum_{m=0}^{\infty} a_m Q_m(r) \cos\Psi_m(z), \quad (4,\text{ б})$$

где A_n, a_m – неизвестные коэффициенты разложения; $E(N) = \exp(ika2Nl)$; $h_n = ka + \frac{\pi n}{l}$;

$\Psi_m(z) = \frac{\pi m}{2d}(z + d + 2Nl)$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Достаточно указать, что $R_n(r)$ и $Q_m(r)$ находятся из условия подчинения поля (4) уравнению Гельмгольца и граничным условиям на поверхностях $r = const$ или же из условия регулярности этого решения при $r = 0$.

Для области распространения и внутренней области рассматриваемой периодической структуры компоненты электромагнитного поля соответственно таковы:

$$\left.\begin{aligned} E_z^{(1)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n^2 A_n R_n(r) e^{ih_n z}, \\ E_r^{(1)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} ih_n p_n R_n'(r) e^{ih_n z}, \\ H_\varphi^{(1)} &= ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n A_n R_n'(r) e^{ih_n z}; \end{aligned}\right\} \qquad (5, а)$$

$$\left.\begin{aligned} E_z^{(2)} &= E(N) \sum_{m=0}^{\infty} a_m q_m^2 Q_m(r) \cos\Psi_m(z), \\ E_r^{(2)} &= -E(N) \sum_{m=0}^{\infty} a_m q_m \frac{\pi m}{2d} Q_m'(r) \sin\Psi_m(z), \\ H_\varphi^{(2)} &= ikE(N) \sum_{m=0}^{\infty} a_m q_m Q_m'(r) \cos\Psi_m(z), \end{aligned}\right\} \qquad (5, б)$$

где $q_m^2 = k^2 - (\pi m)^2 (2d)^{-2}$; $p_n^2 = k^2 - h_n^2$.

Электромагнитное поле (5) представлено в таком виде, что достаточно подчинить его граничным условиям только на одном периоде поверхности $r = a$ (например, при $N = 0$), чтобы на остальных периодах эти условия выполнялись автоматически. Остальным граничным условиям поле (6) удовлетворяет за счет надлежащего выбора решений уравнения Гельмгольца.

Итак, на периодической поверхности раздела $(r = a)$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$E_z^{(1)} = \begin{cases} 0, & d < |z| < l, \\ E_z^{(2)}, & |z| < d; \end{cases} \qquad (6)$$

$$H_\varphi^{(1)} = H_\varphi^{(2)}, |z| < d.$$

Из уравнений (5 и 6) следует система функциональных уравнений относительно Фурье-коэффициентов A_n и a_m:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p_n^2 R_n e^{i\frac{\pi n}{l}z} = \begin{cases} 0, d < |z| < l, \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m q_m^2 Q_m e^{-ixa\frac{\pi}{l}z} \cos\Psi_m(z), |z| < d; \end{cases} \qquad (7, а)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p_n R_n' e^{i\pi(xa+n)\frac{z}{l}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q_m Q_m' \cos\Psi_m(z), |z| < d, \qquad (7, б)$$

$$R_n \equiv R_n(a), R_n' \equiv R_n'(a), Q_m \equiv Q_m'(a), Q_m' \equiv Q_m'(a), x = \frac{kl}{\pi}.$$

Слева в выражении (7, а) записан ряд Фурье по системе функций $\exp(i\frac{\pi n}{l}z)$, полной на интервале (–l, l). Правую часть выражения (7, а) можно рассматривать как значение этой функции, заданной на интервале периодичности. В выражении (7, б) справа стоит ряд Фурье по системе функций $\cos\frac{\pi m}{2d}(z+d)$, полных на интервале $|z|\le d$.

Пользуясь полнотой функции на соответствующих интервалах, получим эквивалентную системе уравнений (7) систему алгебраических уравнений:

$$A_n p_n^2 R_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q_m^2 Q_m L_{mn}, |n| = 0,1,2,..., \tag{8, а}$$

$$a_m q_m Q'_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p_n R'_n K_{mn}, m = 0,1,2,..., \tag{8, б}$$

где $L_{mn} = \frac{2\theta^2(n+xa)}{2\theta(n+xa)+m} S_{mn} e^{im\frac{\pi}{2}}$; $K_{mn} = \varepsilon_m \frac{2\theta(n+xa)}{2\theta(n+xa)+m} S_{mn} e^{-im\frac{\pi}{2}}$;

$$S_{mn} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\left[2\theta(n+xa)-m\right]}{\frac{\pi}{2}\left[2\theta(n+xa)-m\right]},\ \varepsilon_m = \begin{cases}1, & m=0,\\ 2, & m\ne 0.\end{cases}$$

Определим из функции (9) a_m через A_n с одновременным переобозначением индекса суммирования

$$a_m = \frac{1}{q_m Q'_m} \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s p_s R'_s K_{ms}. \tag{9}$$

Подставив уравнение (9) в (8, а), исключим из последнего известные a_m и получим окончательную систему алгебраических уравнений относительно амплитуд A_n:

$$A_n - \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s \frac{p_s R'_s}{p_n^2 R_n} \sum_{m=0}^{\infty} q_m \frac{Q_m}{Q'_m} K_{ms} L_{ms} = 0, n = 0;\pm1;\pm2,... \tag{10}$$

Полученная таким образом бесконечная однородная СЛАУ второго рода для коэффициентов Фурье A_n является строгим решением рассматриваемой граничной электродинамической задачи.

Искомую постоянную распространения для симметричных Е–волн можно найти из условия равенства нулю определителя системы (11) численными методами, не накладывая никаких ограничений на геометрические размеры волновода.

Список литературы: 1. *Вальднер О. А., Власов А.Д., Шальнов А.В* Линейные ускорители. М.: Атомиздат, 1969. 2. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. Радио, 1957. 582 с. 3. *Уолтер К.* Антенны бегущей волны. М.: Энергия, 1970. 448с. 4. *Шестопалов В. П.* Дифракционная электроника. Харьков: Выща шк., 1976. 232с.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники
Харьковский научный физико-технический центр НАН Украины

Поступила в редколлегию 14.07.2000