

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОГРАНИЧЕННЫМ ПЛОСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ, ДВИЖУЩИМСЯ НАД ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКОЙ

А. И. Цвык, О. А. Третьяков

1. Рассмотрим плоский электронный пучок ширины $2b$, движущийся с постоянной скоростью $\vec{v} = j\beta c$ вдоль оси Oy над бесконечной ленточной металлической решеткой (рис. 1). Переменная составляющая плотности потока определяется выражением

$$\rho = \rho_0 f(x) \delta(z) e^{i(xy - \omega t)}.$$

Здесь

ρ_0 — амплитуда модуляции потока;

c — скорость света;

ω — частота модуляции;

$k = \frac{\omega}{v}$ — волновое число вдоль оси Oy ;

$\delta(z)$ — дельта-функция Дирака;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты прямоугольной системы координат;

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < b \\ 0 & |x| > b. \end{cases}$$

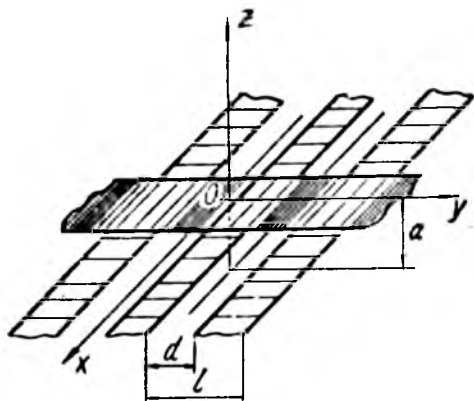


Рис. 1.

Введем следующие обозначения: l — период решетки, d — ширина щелей, a — расстояние между решеткой и щелью.

Векторный и скалярный потенциал находятся из решения уравнений

$$\Delta \vec{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}; \quad (2)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho, \quad (3)$$

где $\vec{J} = j\beta \rho c$ — плотность тока электронного пучка.

Воспользовавшись интегральным представлением функции

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin hb}{h} e^{ihx} dh, \quad (4)$$

решение уравнений (2) и (3) будем искать в виде

$$\vec{a} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}_h(x, y, z, h, \omega, t) dh; \quad (5)$$

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_h(x, y, z, h, \omega, t) dh, \quad (6)$$

где h — волновое число вдоль оси Ox .

После подстановки (5) и (6) в (2) и (3) получим уравнения относительно компонент Фурье

$$\Delta \bar{A}_h - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}_h}{\partial t^2} = 4j\beta\rho_0\delta(z) \frac{\sin hb}{h} e^{i(hx+ky-\omega t)}; \quad (7)$$

$$\Delta \Phi_h - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial t^2} = 4\rho_0\delta(z) \frac{\sin hb}{h} e^{i(hx+ky-\omega t)}. \quad (8)$$

Таким образом, уравнения (2) и (3) для монохроматического пучка конечной ширины свелись к уравнениям (7) и (8) для бесконечно протяженного плоского электронного потока, гармонического вдоль осей Ox и Oy . Решение уравнений можно получить таким же путем, как и для электронного потока, монохроматического только вдоль оси Oy (см., например, работу [2]).

Для верхнего полупространства $|z| > -a$ решение (7), (8) для фиксированного значения h имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{A}_h &= j2\rho_0\beta \frac{\sin hb}{hq} e^{-q|z|} e^{i(hx+ky)} + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i\vec{a}_{nx} + j\vec{a}_{ny} + \vec{k}a_{nz}] e^{iq_n(z+a)} e^{ihx} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y}; \quad (9) \\ \Phi_h &= 2\rho_0 \frac{\sin hb}{hq} e^{-q|z|} e^{i(hx+ky)}. \end{aligned}$$

Для нижнего полупространства $|z| < -a$ векторный и скалярный потенциалы равны

$$\begin{aligned} \bar{B}_h &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i\vec{b}_{nx} + j\vec{b}_{ny} + \vec{k}b_{nz}] e^{-iq_n(z+a)} e^{ihx} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y}; \\ \Psi_h &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} q &= k \sqrt{1 - \beta^2 + \left(\frac{h}{k}\right)^2}; \\ q_n &= k\Theta_n = k \sqrt{\beta^2 - \left[\left(1 + n\frac{\beta}{x}\right)^2 + \left(\frac{h}{k}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

и имеется связь между коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_{ny} &= -\frac{\frac{h}{k}}{1 + n\frac{\beta}{x}} a_{nx} - \frac{\Theta_n}{1 + n\frac{\beta}{x}} a_{nz}; \\ b_{ny} &= -\frac{\frac{h}{k}}{1 + n\frac{\beta}{x}} b_{nx} + \frac{\Theta_n}{1 + n\frac{\beta}{x}} b_{nz}. \end{aligned}$$

Зависимость от времени в виде $e^{-i\omega t}$ подразумевается.

Электромагнитное поле определяется через потенциалы (9), (10) для каждого полупространства следующим образом:

$$\vec{E}_h^I = \left[-\vec{i} \frac{ih}{q} - \vec{j} \frac{i}{\Theta} (1 - \beta^2) + \vec{k} \frac{d|z|}{dz} \right] P \exp [i (hx + ky) - q|z|] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\vec{i} \mu - \vec{j} \frac{\mu^2 + 1}{1 + n \frac{\beta}{x}} \Theta_n + \vec{k} \right] A_n \exp \left\{ i \left[hx + \left(k + 2\pi \frac{n}{l} \right) y + q_n (z + a) \right] \right\} \quad (11)$$

$$\vec{H}_h^I = \left[\vec{i} \frac{d|z|}{dz} + \vec{k} \frac{ih}{q} \right] \beta P \exp [i (hx + ky) - q|z|] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\vec{i} \frac{\beta}{1 + n \frac{\beta}{x}} - \vec{k} \frac{\mu\beta}{1 + n \frac{\beta}{x}} \right] A_n \exp \left\{ i \left[hx + \left(k + 2\pi \frac{n}{l} \right) y + q_n (z + a) \right] \right\} \quad (12)$$

$$\vec{E}_h^{II} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\vec{i} \mu + \vec{j} \frac{\mu^2 + 1}{1 + n \frac{\beta}{x}} \Theta_n + \vec{k} \right] B_n \exp \left\{ i \left[hx + \left(k + 2\pi \frac{n}{l} \right) y + q_n (z + a) \right] \right\} \quad (13)$$

$$\vec{H}_h^{II} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\vec{i} \frac{\beta}{1 + n \frac{\beta}{x}} + \vec{k} \frac{\mu\beta}{1 + n \frac{\beta}{x}} \right] B_n \exp \left\{ i \left[hx + \left(k + 2\pi \frac{n}{l} \right) y - q_n (z + a) \right] \right\}, \quad (14)$$

где $P = 2\rho_0 \frac{\sin hb}{h}$; $A_n = ik\beta a_{nx}$; $B_n = ik\beta b_{nx}$; $\mu = \frac{h}{q_n}$, а связь между коэффициентами

$$a_{nx} = \mu a_{nz}; \quad b_{nx} = -\mu b_{nz}$$

определяется из условия $H_y = 0$, которое следует из соображений симметрии.

Часть электромагнитного поля (11) — (14), представленная в виде ряда Фурье, обусловлена наличием решетки вблизи траектории электронного потока. Легко видеть, что излучение электромагнитного поля возникает лишь при условии, что q_n вещественно, т. е.

$$\beta^2 > \left(1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2 + \left(\frac{h}{k} \right)^2. \quad (15)$$

Это возможно только для $n < 0$; условие излучения (15) для ограниченного пучка при $h = 0$ переходит в ранее полученное в [1] для неограниченного электронного потока. Для $h \neq 0$ излучение возникает при больших значениях скорости β , если величина $n \frac{\beta}{x}$ остается постоянной. Для фиксированных значений x , β , n излучение будет наблюдаться в следующем интервале значений:

$$\left(\frac{h}{k} \right)^2 < \beta^2 - \left(1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2. \quad (15a)$$

Чтобы установить энергетические характеристики излучения, необходимо определить коэффициенты Фурье поля A_n и B_n . Для этого подчиним поле (11) — (14) граничным условиям на поверхности решетки при $z = -a$:

$$\begin{aligned} E_t^I &= E_t^{II} = 0 && (\text{металл}); \\ E_t^I &= E_t^{II}; H_t^I &= H_t^{II} && (\text{шель}). \end{aligned}$$

После некоторых преобразований получим систему уравнений относительно коэффициентов Фурье A_n

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{1+n\frac{\beta}{x}} e^{i(k+2n\frac{\pi}{l})y} &= 0, \quad \frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2} \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Theta_n}{1+n\frac{\beta}{x}} A_n e^{i(k+2n\frac{\pi}{l})y} &= -i\varepsilon, \quad |y| < \frac{d}{2} \end{aligned} \right. \quad (17)$$

и связь между коэффициентами A_n и B_n

$$\varepsilon_0 + A_0 = -B_0, \quad (18)$$

$$A_n = -B_n, \quad (19)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{1-\beta^2}{\mu}$; $\varepsilon_0 = Pe^{-qa}$.

Значит, задача свелась к системе уравнений, аналогичных [1] — [5].

Воспользовавшись полученными там результатами, запишем решение (16) — (17) в виде бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} 2CR_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{|n|}{n} \chi_n V_n^0 &= \varepsilon V_0^0; \end{aligned} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} 2CR_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left(\frac{|n|}{n} \chi_n V_m^n - \delta_{mn} \right) &= \varepsilon V_m^0, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

где $m = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3, \dots$

$$\chi_n = 1 + iG_n; \quad G_n = \frac{|n|}{n} \sqrt{\frac{\beta^2 - \left(\frac{h}{k}\right)^2}{\left(1+n\frac{\beta}{x}\right)^2} - 1}; \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n, \end{cases}$$

а величины $R_0; R_m; V_n^0; V_m^n$ те же, что и в работах [1] — [3].

2. Определим среднее значение вектора Умова — Пойнтинга \vec{S} на единичной площадке произвольной плоскости $z = \xi$. Запишем среднюю величину \vec{S}_h для электромагнитного поля (11) — (14) на участке $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}; -\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}$:

$$\vec{S}_h^I = \frac{c}{8\pi} \beta \sum_{n=-1}^{-N} \left[\vec{i} \frac{\mu^2 + 1}{\left(1+n\frac{\beta}{x}\right)^2} \cdot \frac{h}{k} + \vec{j} \frac{\mu^2 + 1}{1+n\frac{\beta}{x}} + \vec{k} \frac{\mu^2 + 1}{\left(1+n\frac{\beta}{x}\right)^2} \Theta_n \right] |A_n|^2; \quad (22)$$

$$\vec{S}_h^{II} = \frac{c}{8\pi} \beta \sum_{n=-1}^{-N} \left[\vec{i} \frac{\mu^2 + 1}{\left(1+n\frac{\beta}{x}\right)^2} \cdot \frac{h}{k} + \vec{j} \frac{\mu^2 + 1}{1+n\frac{\beta}{x}} - \vec{k} \frac{\mu^2 + 1}{\left(1+n\frac{\beta}{x}\right)^2} \Theta_n \right] |A_n|^2;$$

Индекс n принимает все значения, при которых выполняется условие излучения (15).

Направление излучения образует дискретный спектр, аналогичный дифракционному спектру, каждая гармоника излучения характеризуется амплитудой A_n , которая определяется из системы уравнений (20) — (21). Из формул (22) можно определить направление излучения относительно осей Ox и Oy :

$$\gamma_{nx} = \pm \operatorname{arctg} \frac{k}{h} \sqrt{\beta^2 - \left| \left(1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2 + \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right|}; \quad (23)$$

$$\gamma_{ny} = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\beta^2 - \left| \left(1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2 + \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right|}}{1 + n \frac{\beta}{x}}. \quad (24)$$

Таким образом, электронный поток при своем движении над дифракционной решеткой излучает электромагнитные волны под углами γ_{nx} и γ_{ny} к оси Ox и Oy . В соотношениях (23) — (24) знак «+» соответствует верхнему полупространству, а знак «-» — нижнему. Из формулы (24) легко находится длина волны излучения

$$\lambda = \frac{c}{\omega} \left\{ \cos \gamma_{ny} \left[1 + \left(\frac{h}{k\beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\beta} \right\}. \quad (25)$$

Следует заметить, что (23) — (25) при $h = 0$ переходит в соотношения для неограниченного плоского потока, монохроматического вдоль оси Oy [1].

Чтобы получить всю излучаемую потоком энергию, необходимо формулы (22) для фиксированного значения h проинтегрировать по всем возможным величинам h .

Следует учесть, что условие (15) выполняется в интервале значений h (15а) для составляющих \vec{S}_y и \vec{S}_z и в интервале

$$0 < h < k \sqrt{\beta^2 - \left(1 + n \frac{\beta}{x} \right)^2}$$

для значения \vec{S}_x .

3. Рассмотрим частный случай, когда условие излучения выполняется только для 1-й гармоники. Амплитуда A_{-1} определяется из решения системы уравнений второго порядка

$$\left. \begin{aligned} 2CR_\sigma - A_{-1}\chi_{-1}V_\sigma^{-1} &= \epsilon V_\sigma^0 \\ 2CR_{-1} - A_{-1}(\chi_{-1}V_{-1}^{-1} - 1) &= \epsilon V_{-1}^0 \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

Легко убедиться, что

$$A_{-1} = \frac{\zeta \left[\zeta \left(1 + u \right) \ln \frac{1+u}{2} + u - 1 \right]}{4 \left[\zeta \ln \frac{1+u}{2} \left(\frac{1}{2} \zeta \chi_{-1} - 1 \right) - 1 \right]} \epsilon, \quad (28)$$

где ζ — малая добавка $\frac{x}{z} = 1 + \zeta$, относительно которой раскладываются в ряд Тейлора функции Лежандра, входящие в уравнение (27). В этом случае, когда $\zeta = 0$, движущийся пучок излучает энергию

строго по нормали к решетке. Интегральная мощность излучения минус первой гармоники в этом случае вычисляется по формуле

$$\vec{S}_2 = \pm \vec{k} \frac{c}{32\pi} \frac{z^2 \rho_0^2}{\beta} (u-1)(1-\beta^2)^2 \left[\beta^2 - \left(1 - \frac{\beta}{z}\right)^2 \right] \int_{\frac{1}{z}}^1 \left(\frac{\sin hb}{h}\right)^2 \times \\ \times \frac{e^{-2qa}}{\sqrt{\beta^2 - \left[\left(1 - \frac{\beta}{z}\right)^2 + \left(\frac{h}{k}\right)^2\right]}} dh,$$

где $\zeta \ln \frac{1+u}{2} \ll u-1$; $u = \cos \frac{\pi d}{l}$, а пределы интегрирования определяются условием (15а).

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопапов «Радиотехника и электроника», 10, 7 1965.
2. О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопапов (см. настоящий сборник).
3. О. А. Третьяков. «Радиотехника и электроника», 10, 7, 1965.
4. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 32, 4, 1962.