

О ПОСТРОЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗВЕНЬЕВ В КОНТУРЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Г. А. Буров

Рига

Высокая точность и универсальность ЦВМ позволяет успешно применять их в системах управления (СУ) летательных аппаратов. При этом малогабаритная универсальная вычислительная машина служит вычислительным и управляющим элементом. Гибкость цифрового оборудования позволяет использовать один и тот же тип вычислительной машины для решения большого класса задач.

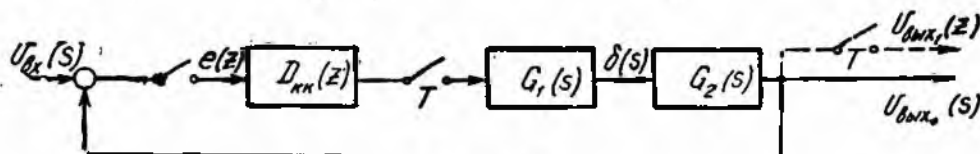


Рис. 1.

Одной из таких задач является испытание и подготовка к эксплуатации системы управления. Наиболее существенные затруднения в автоматизации проверок связаны с определением динамических характеристик системы. С точки зрения простоты автоматизации и сокращения времени проверок наиболее целесообразным следует считать контроль по временной характеристике. Динамический контроль по замкнутой схеме с моделью объекта позволяет имитировать реальные условия эксплуатации и получить достаточно полную информацию о работе системы управления [4].

Это делает актуальной постановку вопроса об использовании ЦВМ для моделирования отдельных непрерывных звеньев в контуре СУ.

Блок-схема СУ представлена на рис. 1. В общем случае СУ состоит из дискретной $D_{кк}(z)$ и непрерывной части $G_1(s)$, а $G_2(s)$ является оператором объекта. Из условий постановки задачи требуется аппроксимировать непрерывное звено $G_2(s)$ дискретным звеном, моделью $G_m(z)$, которая затем может быть реализована в виде программы для ЦВМ (рис. 2).

Аппроксимация непрерывного звена дискретным производится из условий совпадения процессов в дискретные моменты времени. Поэтому исследование вопроса производится с использованием теории z -преобразования при допущении, что импульсы, действующие в системе, обладают нулевой длительностью [1, 2, 3].

Динамический контроль системы можно производить, используя информацию о выходной величине $U_{вых}(s)$ или об ошибке на входе системы $e(s)$. Очевидно, что при выполнении условий теоремы Котельникова контроль непрерывного процесса может быть осуществлен без потери информации по дискретным значениям его в моменты съема,

Импульсные передаточные функции для исходной схемы (см. рис. 1), соответственно имеют вид:

$$\frac{V_{\text{вых}}(z)}{V_{\text{вх}}(z)} = \frac{D_{\text{кк}}(z) G_1 G_2(z)}{1 + D_{\text{кк}}(z) G_1 G_2(z)}; \quad (1)$$

$$\frac{e(z)}{V_{\text{вх}}(z)} = \frac{1}{1 + D_{\text{кк}}(z) G_1 G_2(z)}, \quad (2)$$

где

$$G_1 G_2(z) = z \{G_1(s) G_2(s)\}.$$

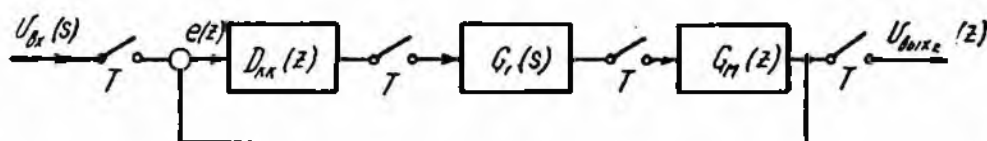


Рис. 2.

Для эквивалентной схемы с дискретной моделью (рис. 2) соответственно имеем:

$$\frac{V_{\text{вых } 2}(z)}{V_{\text{вх}}(z)} = \frac{D_{\text{кк}}(z) G_1(z) G_{\text{м}}(z)}{1 + D_{\text{кк}}(z) G_1(z) G_{\text{м}}(z)}; \quad (3)$$

$$\frac{e(z)}{V_{\text{вх}}(z)} = \frac{1}{1 + D_{\text{кк}}(z) G_1(z) G_{\text{м}}(z)}. \quad (4)$$

Характеристические уравнения передаточных функций по выходной величине и по ошибке совпадают для обоих случаев. Для совпадения реакций исходной системы и системы с моделью в моменты съема необходимо, чтобы z -преобразования их совпадали. Сравнивая соответственно выражения (1) и (3), (2) и (4), получаем:

$$D_{\text{кк}}(z) G_1 G_2(z) = D_{\text{кк}}(z) G_1(z) G_{\text{м}}(z), \quad (5)$$

откуда:

$$G_{\text{м}}(z) = \frac{G_1 G_2(z)}{G_1(z)}. \quad (6)$$

Из данного выражения следует, что параметры модели не зависят от параметров дискретной части регулятора, чего нельзя сказать в отношении непрерывной его части. Действительно,

$$G_1 G_2(z) \neq G_1(z) G_2(z), \quad (7)$$

и импульсная передаточная функция непрерывной части регулятора не выделяется в явном виде в числителе выражения (6). Поэтому параметры дискретной модели выражаются через параметры непрерывной части регулятора и параметры моделируемого объекта. Вследствие этого при вариациях параметров регулятора изменяется достоверность моделирования, т. е. данная дискретная модель не при всех условиях является инвариантной к вариациям параметров непрерывной части $G_1(s)$.

Рассмотрим структурную схему (рис. 3). Непрерывная часть $G_1(s)$ состоит из восстанавливающего устройства, которое может выполнять функции усилительного звена, и сервопривода с передаточной функцией инерционного звена, т. е.

$$G_1(s) = k_1 \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s + a}. \quad (8)$$

Пусть объект представлен инерционным звеном:

$$G_2(s) = k_2 \frac{1}{s+b}. \quad (9)$$

Импульсная передаточная функция дискретной модели, определяемая по выражению (6) с учетом (8) и (9), имеет вид

$$G_m(z) = k \frac{\lambda_1 z + \lambda_0}{z - e^{-bT}}; \quad (10)$$

где

$$k = \frac{k_2}{(1 - e^{-aT})(a-b)b};$$

$$\lambda_1 = a(1 - e^{-bT}) + b(e^{-aT} - 1);$$

$$\lambda_0 = e^{-aT}e^{-bT}(a-b) + e^{-bT} \cdot b - e^{-aT} \cdot a.$$

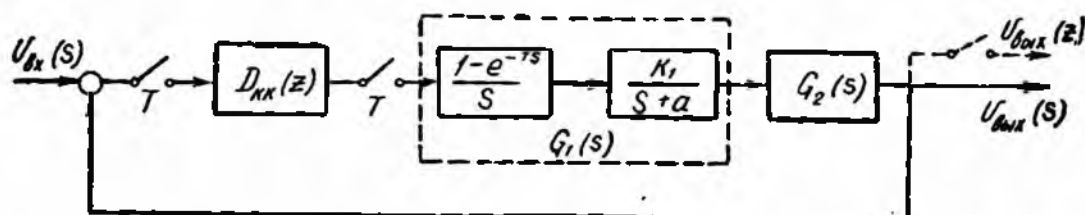


Рис. 3.

В случае, если объект представляет собой колебательное звено, т. е.

$$G_2(s) = \frac{k_2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad (11)$$

импульсная передаточная функция дискретной модели согласно выражению (6) имеет вид:

$$G_m(z) = k \frac{\sigma_2 z^2 + \sigma_1 z + \sigma_0}{z^2 - 2ze^{-bT} \cos cT + e^{-2bT}}, \quad (12)$$

где

$$k = \frac{k_2}{(1 - e^{-aT})(b^2 + c^2)[(a-b)^2 + c^2]};$$

$$\sigma_2 = e^{-bT} (2ab - a^2) \cos cT - e^{-aT} (b^2 + c^2) + e^{-bT} \frac{a}{c} \times$$

$$\times (b^2 - c^2 - ab) \sin cT + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab);$$

$$\sigma_1 = e^{-bT} [e^{-aT} (2b^2 + 2c^2 + a^2 - 2ab) + 2ba -$$

$$- 2b^2 - 2c^2 - a^2] \cos cT - e^{-bT} (1 + e^{-aT}) \frac{a}{c} (b^2 - c^2 - ab) \sin cT +$$

$$+ (2ba - a^2) (e^{-aT} - e^{-2bT});$$

$$\sigma_0 = e^{-2bT} [b^2 + c^2 - e^{-aT} (b^2 + a^2 + c^2 - 2ab)] +$$

$$+ e^{-aT} e^{-bT} \left[\frac{a}{c} (b^2 - c^2 - ab) \sin cT - (2ba - a^2) \cos cT \right];$$

$$b = \xi\omega_0; c = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}.$$

В случае, если объект представляет собой консервативное звено, т. е.

$$G_2(s) = \frac{k_2}{s^2 + \omega_0^2}, \quad (13)$$

имеем:

$$G_M(z) = k \frac{q_2 z^2 + q_1 z + q_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}, \quad (14)$$

где

$$k = \frac{k_2}{(1 - e^{-aT})(a^2 + \omega_0^2)\omega_0^2};$$

$$q_2 = a^2 + \omega_0^2 - e^{-aT} \cdot \omega_0^2 - a\omega_0 \sin \omega_0 T - a^2 \cos \omega_0 T;$$

$$q_1 = a\omega_0 (1 + e^{-aT}) \sin \omega_0 T + [e^{-aT} (2\omega_0^2 + a^2) - 2\omega_0^2 - a^2] \times \cos \omega_0 T - a^2 (e^{-aT} - 1);$$

$$q_0 = \omega_0^2 - e^{-aT} (a^2 + \omega_0^2) + e^{-aT} (a^2 \cos \omega_0 T - a\omega_0 \sin \omega_0 T).$$

Из выражений (10), (12) и (14) следует, что:

а) во всех рассмотренных случаях для импульсных передаточных функций модели соблюдаются условия физической реализуемости, т. е. степень числителя по z не выше степени знаменателя $G_M(z)$;

б) параметры дискретной модели не зависят от коэффициента усиления регулятора, а зависят от параметров моделируемого звена и постоянных времени непрерывной части регулятора;

в) степень знаменателя $G_M(z)$ равна степени знаменателя передаточной функции моделируемого непрерывного звена. Это не приводит к усложнению программы для ЦВМ;

г) при некоторых целочисленных соотношениях собственной частоты моделируемого звена и частоты прерывания могут быть случаи вырождения $G_M(z)$ в нуль; при других соотношениях могут упрощаться выражения для коэффициентов $G_M(z)$.

Однако так как в большинстве систем управления непрерывная часть $G_1(s)$ является низкочастотным фильтром, то выбором основной частоты прерывания ω_s указанная зависимость коэффициентов $G_M(z)$ от параметров $G_1(s)$ может быть в значительной степени ослаблена. Действительно, при выборе частоты прерывания по условию

$$\omega_s \geq 2\omega_{\text{пр}}, \quad (15)$$

где $\omega_{\text{пр}}$ — наивысшая частота пропускания непрерывной части $G_1(s)$, выражение $G_1 G_2(z)$ может быть аппроксимировано по методу Скланского [3].

$$G_1 G_2(z) = G_1(z) G_2(s). \quad (16)$$

Тогда

$$G_M(z) = \frac{G_1 G_2(z)}{G_1(z)} = G_2(s), \quad (17)$$

так как

$$s = \frac{1}{T} \ln z,$$

то

$$G_2(s) = G_2\left(\frac{1}{T} \ln z\right). \quad (18)$$

Выражение (18) является трансцендентным относительно z . Приближенное рациональное выражение для $\ln z$ можно представить в таком виде [2]:

$$\ln z = 2 \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1}{3} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^5 + \dots \right], \quad (19)$$

откуда

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{\ln z} = \frac{T/2}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + \frac{1}{3} (u)^3 + \frac{1}{5} (u)^5 + \dots}, \quad (20)$$

где

$$u = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

или

$$s^{-k} = \frac{N_k(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^k} = F_k(z^{-1}). \quad (21)$$

Выражение $F_k(z^{-1})$ называется z -формой от s^{-k} .

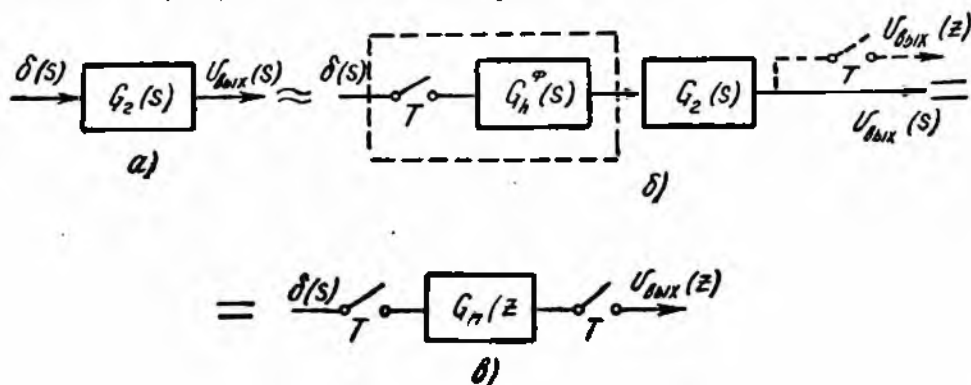


Рис. 4.

В [2] приведена таблица z -форм с учетом главной части и постоянного члена ряда Лорана выражения (19). Заменяя степени s^{-k} $G_2(s)$ соответствующими z -формами, можно определить импульсную передаточную функцию дискретной модели с учетом выражения (17). Однако так как z -формы были получены с учетом конечного числа членов ряда (19), то появляется ошибка аппроксимации, которую при использовании данного метода оценить невозможно. Поэтому нецелесообразно данный метод использовать для определения параметров дискретной модели. Формула (17) может лишь подтвердить правомочность определения оператора дискретной модели по параметрам моделируемого непрерывного звена, если выполнено условие (15).

При выполнении указанного условия определение оператора $G_m(z)$ наиболее рационально производить на основе метода аппроксимации по выходной характеристике моделируемого непрерывного звена. Чтобы применить его, необходимо ввести в структурную схему перед аппроксимируемым непрерывным звеном фиктивный импульсный элемент с восстанавливающим устройством $G_h^\phi(s)$, как показано на рис. 4, б. $G_m(z)$ определяется из условия равенства выходных реакций в моменты съема для схем, изображенных на рис. 4, б, в:

$$V_{\text{вых } 1}(z) = G_h^\phi G_2(z) \delta(z), \quad (22)$$

$$V_{\text{вых } 2}(z) = G_m(z) \delta(z). \quad (23)$$

Отсюда при

$$V_{\text{вых } 1}(z) = V_{\text{вых } 2}(z)$$

имеем:

$$G_m(z) = G_h^\phi G_2(z). \quad (24)$$

Очевидно, что ошибка $[V_{\text{вых } 1}(z) - V_{\text{вых } 2}(z)]$ (рис. 1 и 2) определяется главным образом динамическими свойствами фиктивного восстанавливающего устройства $G_h^\phi(s)$. Эта ошибка может быть учтена намного проще, чем при нахождении оператора дискретной модели по

методу z -форм. Для учета ее может быть использована известная амплитудно-фазовая характеристика восстанавливающего устройства (на рис. 5 она показана для $G_h(s)$ нулевого порядка). Анализ амплитудно-фазовой характеристики показывает, что ошибка в основном определяется фазовым искажением. Амплитудные искажения незначительны. Кроме того, с увеличением частоты прерывания на дискретную модель ошибка может быть сведена к необходимому минимуму.

При выборе основной частоты прерывания по условию (15) оператор дискретной модели $G_M(z)$ определяется по формуле (24).

В случае моделирования инерционного звена, когда $G_2(s)$ определяется выражением (9), имеем:

$$G_M(z) = \frac{k}{z - e^{-bT}}, \quad (25)$$

где

$$k = \frac{k_2}{b} (1 - e^{-bT}).$$

В случае колебательного звена (11)

$$G_M(z) = k \frac{\lambda'_1 z + \lambda'_0}{z^2 - 2ze^{-bT} \cos cT + e^{-2bT}}, \quad (26)$$

где

$$k = \frac{k_2}{\omega_0^2};$$

$$\lambda'_1 = 1 - e^{-bT} \left(\cos cT + \frac{b}{c} \sin cT \right);$$

$$\lambda'_0 = e^{-2bT} - e^{-bT} \cos cT + e^{-bT} \frac{b}{c} \sin cT;$$

$$b = \xi \omega_0; \quad c = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2};$$

в случае консервативного звена (13)

$$G_M(z) = k \frac{z + 1}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}, \quad (27)$$

где

$$k = \frac{k_2}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 T).$$

Из выражений (25), (26) и (27) следует, что:

- а) для $G_M(z)$ соблюдаются условия физической реализуемости;
- б) параметры дискретной модели зависят лишь от параметров моделируемого непрерывного звена;
- в) степень числителя $G_M(z)$ на единицу меньше, чем в выражениях (10), (12) и (14), т. е. программа для ЦВМ упрощается;
- г) выражения для коэффициентов программы также упрощаются;
- д) при дискретном моделировании консервативного звена также может иметь место случай вырождения $G_M(z)$ в нуль.

Очевидно, что для уменьшения ошибки аппроксимации частота прерывания на модель должна выбираться с учетом частотных свойств моделируемого непрерывного звена. Верхний предел ее определяется быстродействием ЦВМ, включаемой в контур системы управления.

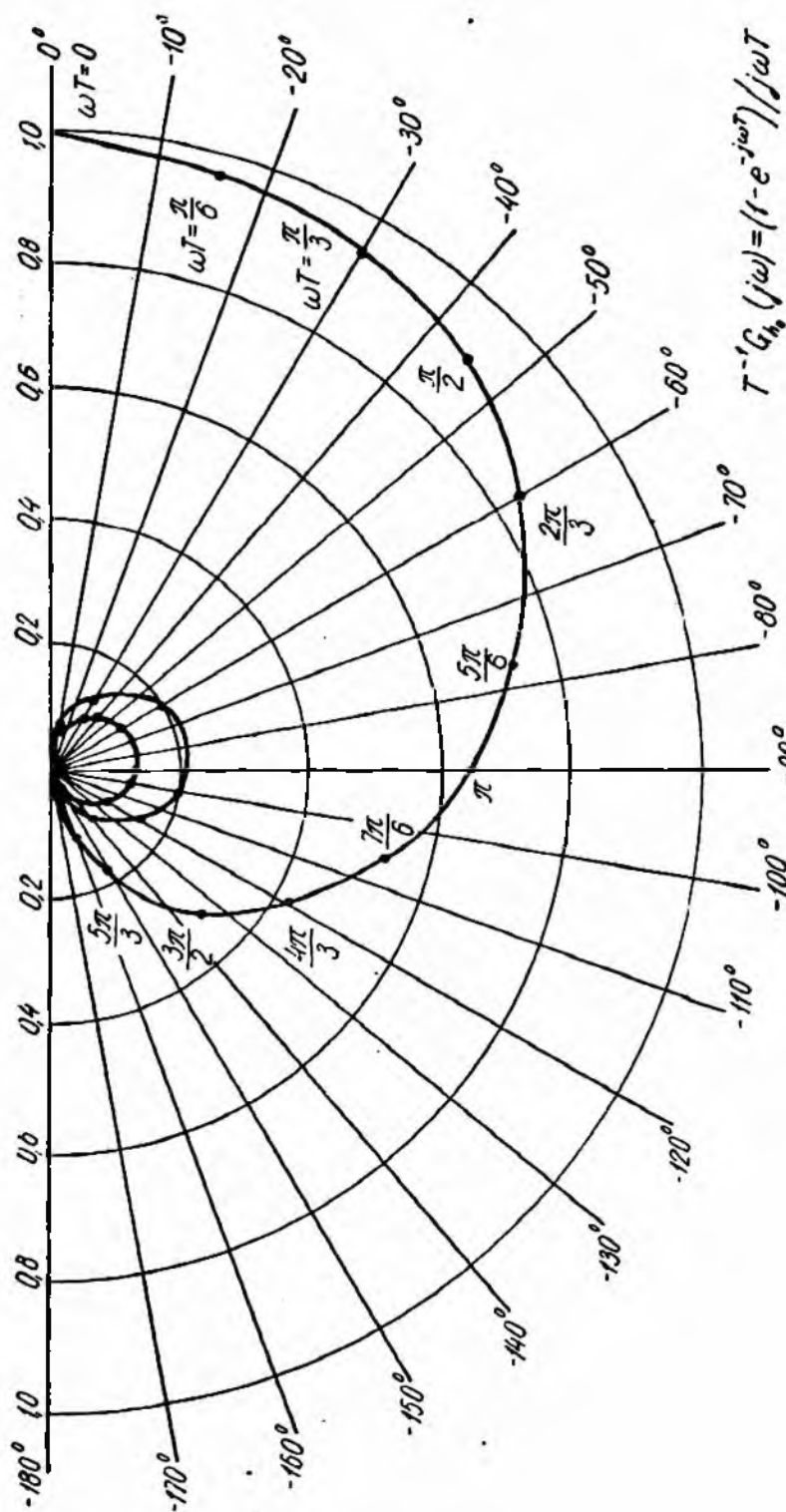


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Теория линейных импульсных систем. ФМ, М., 1963.
2. Э. Джури. Импульсные системы автоматического регулирования. ФМ, М., 1963.
3. Ю. Л. С. Т. Ту. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. М., 1964.
4. Автоматическая проверка оборудования самолетов и ракет. Сб. ст. под ред. В. / Боднера. Изд-во иностр. л-ры, М., 1962.