

З.В. ДУДАРЬ, С.А. ПОСЛАВСКИЙ,  
А.В. ПРОНЮК, С.Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

## ПРЕДИКАТЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ЗАДАЧАХ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

При компараторной идентификации в качестве математической модели идентифицируемого объекта часто используется предикат эквивалентности. В настоящей работе вводится общий вид этой модели, рассматриваются вопросы ее изоморфизмов и практической применимости.

Пусть  $E(x, y)$  - предикат, заданный на декартовом квадрате непустого множества  $M$ . Будем писать  $xEy$ , если  $E(x, y)=1$ , и  $x\bar{E}y$ , если  $E(x, y)=0$ . Предикат  $E$  называется *рефлексивным*, если  $xEx$  для всех  $x \in M$ , *симметричным*, если для всех  $x, y \in M$  из  $xEy$  следует  $yEx$ , и *транзитивным*, если для всех  $x, y, z \in M$  из  $xEy$  и  $yEz$  следует  $xEz$ . Любой рефлексивный, симметричный и транзитивный предикат называется *предикатом эквивалентности* [1]. Пусть  $N$  - непустое множество;  $F$  - функция, отображающая множество  $M$  на множество  $N$ ;  $D$  - предикат равенства, заданный на  $N \times N$ . Будем писать  $uDv$ , если  $D(u, v)=1$ , и  $u\bar{D}v$ , если  $D(u, v)=0$ .

**Теорема 1.** *Любой предикат  $E$ , заданный на  $M \times M$  и выражающийся при любых  $x, y \in M$  в виде*

$$E(x, y) = D(F(x), F(y)), \quad (1)$$

*есть предикат эквивалентности.*

Функция  $F$ , фигурирующая в (1), называется *характеристической функцией* предиката эквивалентности.

**Доказательство.** Рефлексивность, симметричность и транзитивность предиката  $E$  непосредственно следуют из (1) и из рефлексивности, симметричности и транзитивности предиката равенства  $D$ .

**Теорема 2.** *Для любого предиката эквивалентности  $E$ , заданного на  $M \times M$ , найдутся непустое множество  $N$  и функция  $F: M \rightarrow N$ , такие что при любых  $x, y \in M$  будет выполняться (1).*

**Доказательство.** Для каждого  $x \in M$  существует единственное множество  $S_x$  всех  $y$  таких, что  $xEy$ . В роли множества  $N$  принимаем систему всех множеств  $S_x$ . Множество  $N$  не пусто. В роли  $F$  принимаем функцию, которая ставит в соответствие каждому элементу  $x \in M$  множество  $S_x$ , так что  $F(x) = S_x$ . Докажем, что при таком выборе функции  $F$  равенство (1) выполняется при любых  $x, y \in M$ . Рассмотрим случай, когда  $x$  и  $y$  таковы, что  $xEy$ . Чтобы убедиться в том, что в данном случае  $F(x)DF(y)$ , достаточно доказать, что  $S_x = S_y$ . Докажем это. Пусть  $z \in S_x$ , тогда

$x\bar{E}z$ . По свойству симметричности предиката  $E$  из  $x\bar{E}y$  выводим  $y\bar{E}x$ . По свойству транзитивности предиката  $E$  из  $y\bar{E}x$  и  $x\bar{E}z$  выводим  $y\bar{E}z$ . Отсюда следует, что  $z \in S_y$ . Итак, мы получили, что  $S_x \subseteq S_y$ . Предположим теперь, что  $z \in S_y$ . Тогда  $y\bar{E}z$ . По свойству транзитивности из  $x\bar{E}y$  и  $y\bar{E}z$  выводим  $x\bar{E}z$ . Отсюда следует, что  $z \in S_x$ . Итак, мы получили, что  $S_y \subseteq S_x$ . Вместе взятые, эти два включения дают равенство  $S_x = S_y$ . Рассмотрим оставшийся случай, при котором  $x$  и  $y$  таковы, что  $x\bar{E}y$ . Чтобы убедиться в том, что теперь  $F(x)\bar{D}F(y)$ , достаточно доказать, что  $S_x \neq S_y$ . Докажем это. Из  $x\bar{E}y$  следует  $y \notin S_x$ . По свойству рефлексивности предиката  $E$  имеем  $y\bar{E}y$ , отсюда выводим  $y \in S_y$ . Следовательно,  $S_x \neq S_y$ . Мы доказали, что значения предикатов  $E(x, y)$  и  $D(F(x), F(y))$  совпадают при любых  $x, y \in M$ . Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 непосредственно следует, что *любые предикаты эквивалентности и только они могут быть представлены в виде (1) при подходящем выборе множества  $N$  и функции  $F$* . Таким образом, правая часть равенства (1) представляет собой общий вид предиката эквивалентности. С математической точки зрения полученный результат тривиален, однако он весьма важен для теории компараторной идентификации, поскольку указывает систему необходимых и достаточных признаков, с помощью которых всегда можно установить, допускает ли объект, реализующий предикат  $E$ , идентификацию компараторным методом. Если система, имеющая два входа  $x, y$  и один выход  $t$ , реализует предикат  $t = E(x, y)$ , и этот предикат удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности, то ее можно идентифицировать компараторным методом. Если же хотя бы одно из этих трех условий не выполняется, то компараторный метод для такого объекта неприменим. Получаемые здесь результаты по компараторной идентификации могут быть применены к любым физическим объектам, удовлетворяющим только что перечисленным условиям.

В применении к зрительной системе человека элементы  $x, y \in M$  интерпретируются как световые излучения, предъявляемые испытуемому для восприятия,  $M$  - это множество всех таких излучений. Элементы множества  $N$   $u = F(x)$  и  $v = F(y)$  интерпретируются как цвета, возбуждаемые в сознании испытуемого излучениями  $x$  и  $y$ . Устанавливая совпадение или различие цветов  $u$  и  $v$ , испытуемый реализует предикат  $D(u, v)$ . Реагируя на излучения  $x$  и  $y$ , испытуемый реализует предикат  $E(x, y) = D(F(x), F(y))$ . Значение предиката  $D(u, v) = 1$  соответствует реакции испытуемого, выражающей равенство цветов  $u$  и  $v$ . Значение предиката  $D(u, v) = 0$  соответствует реакции испытуемого, выражающей несовпадение цветов  $u$  и  $v$ . Множество  $N$  представляет собой совокупность всех цветов, которые могут быть возбуждены в сознании испытуемого излучениями из множества  $M$ . Функцию  $F$  содержательно интерпретируем как

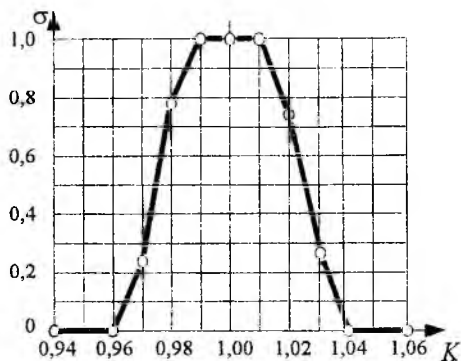
преобразование светового излучения в цвет, реализуемое зрительной системой испытуемого. Требование, что  $E$  есть предикат, означает: двоичный ответ испытуемого существует и единственен для каждой пары световых излучений множества  $M$ . Рефлексивность предиката  $E$  означает, что одинаковым световым излучениям соответствуют одинаковые цвета. Симметричность предиката  $E$  означает, что изменение порядка предъявления излучений испытуемому не влияет на его реакцию. Транзитивность предиката  $E$  означает: если для некоторого испытуемого излучения  $x, y$  и  $y, z$  одноцветны, то для того же испытуемого будут одноцветными также и излучения  $x, z$ .

Постулат о том, что испытуемый в опытах со сравнением цветов световых излучений реализует вполне определенный предикат  $E$ , не будет выполняться, если во время проведения опытов менять фон, на котором предъявляется каждое из излучений. Это вызвано эффектом цветовой индукции [2], заключающейся в том, что цвет тест-поля зависит от цвета окружающего его фона. Таким образом, стабильность фона является необходимым условием корректности компараторной идентификации цветового зрения человека. Но и при достижении стабильности фона реакцию испытуемого на пару световых излучений можно считать однозначной только с определенной степенью приближения. Дело в том, что ответы испытуемого при определенных условиях наблюдения носят вероятностный характер. Когда цвета излучений оказываются на границе равенства и неравенства, испытуемый ощущает неуверенность, которая выражается в нестабильности его ответа.

Сказанное проиллюстрируем следующим экспериментом. При помощи диска Максвелла [3] испытуемому предъявлялась на одном поле сравнения цветная поверхность (темно-красная), имеющая трехцветные координаты МКО [4]  $x_1=0,483, y_1=0,308, \rho_1=0,13$ . На втором поле сравнения предъявлялась цветная поверхность, излучающая свет того же спектрального состава, но несколько иной интенсивности, отличающейся в  $K$  раз ( $x_2=x_1, y_2=y_1, \rho_2=K\rho_1$ ). Отношение интенсивности излучения второго поля к интенсивности первого равно  $K=\rho_2/\rho_1$ . Трехцветные координаты поверхностей определялись с помощью атласа цветов Рабкина [4]. Значение коэффициента  $K$  регулировалось углом раствора полей на диске Максвелла. Во время опытов диск Максвелла освещался зеркальной лампой типа ЗК220-500-2 мощностью 500 Вт с расстояния 2 м под углом  $45^\circ$ . В опытах использовались следующие численные значения коэффициента  $K$ : 0,96; 0,97; 0,98; 0,99; 1,00; 1,01; 1,02; 1,03; 1,04. При каждом значении  $K$  опыт повторялся 100 раз и для него вычислялось среднее арифметическое  $\sigma$  из ответов испытуемого. При этом ответу "цвета равны" приписывалось численное значение 1, ответу "цвета не

равны" - численное значение 0. Испытуемый заранее не знал, при каком значении  $K$  проводится каждый опыт.

На рисунке изображен полученный график. Графики такого рода называют *пороговыми кривыми* [5]. По оси абсцисс отложено значение коэффициента  $K$ , характеризующего интенсивность излучения второго поля, по оси ординат - значение параметра  $\sigma$ , характеризующего частоту формирования испытуемым ответа "цвета равны".



Как видно из рисунка, однозначность ответа испытуемого нарушается в двух зонах при  $K=0,96-0,99$  и  $K=1,01-1,04$ . За пределами этих зон ответ испытуемого детерминирован и однозначно определяется предъявленными ему излучениями. Таким образом, постулат о существовании предиката  $E$  нарушается в довольно узких зонах изменения интенсивности излучения в пределах 3% ее величины. Следует учесть, что диск Максвелла является довольно грубым измерительным прибором. Проводя эти же опыты на оптическом субъективном колориметре (например, на колориметре Демкиной [6]), можно было бы зону нестабильности ответа испытуемого существенно сузить.

С помощью опытов только что описанного типа можно оценить степень выполнения закона рефлексивности для цветового зрения человека. После того, как получена пороговая кривая, определяется ее ось симметрии (на рисунке - это вертикальная линия  $K=1,00$ ). Величина отклонения оси симметрии от положения  $K=1,00$  характеризует степень нарушения закона рефлексивности. Специально поставленные опыты показали, что это отклонение составляет величину порядка  $\pm 0,1\%$  от величины  $K$ . Таким образом, можно утверждать, что для цветового зрения человека закон рефлексивности выполняется по крайней мере с той точностью, с которой осуществляется в эксперименте дозирование величины  $K$ . По аналогичной методике были выполнены опыты по проверке законов симметричности и транзитивности. Они показали, что и эти законы выполняются для цветового зрения человека практически точно. Таким образом, цветовое зрение человека можно идентифицировать компараторным методом, при этом точность такой идентификации лимитируется лишь величиной зоны нестабильности ответа испытуемого.

Выше было показано, что пара  $(N, F)$ , состоящая из множества  $N$  и функции  $F: M \rightarrow N$ , определяет единственный предикат эквивалентности  $E(x, y) = D(F(x), F(y))$ , заданный на множестве  $M \times M$ . Но справедливо ли обратное утверждение? Будет ли каждый предикат эквивалентности  $E$  единственным образом определять пару  $(N, F)$ ? Оказывается, нет. Существуют такие различные пары  $(N, F)$  и  $(N', F')$ , которые задают один и тот же предикат  $E$ . Формулируемая ниже теорема указывает необходимое и достаточное условие, при выполнении которого две пары  $(N, F)$  и  $(N', F')$  определяют один и тот же предикат эквивалентности  $E$ .

**Теорема 3.** Для того чтобы две пары  $(N, F)$  и  $(N', F')$  определяли один и тот же предикат эквивалентности  $E$ , заданный на декартовом квадрате множества  $M$ , необходимо и достаточно, чтобы существовала биекция  $T$  с областью определения  $N$  и областью значений  $N'$  такая, что для всех  $x \in M$   $F'(x) = T(F(x))$ .

**Доказательство.** *Достаточность.* Предположим, что существует биекция  $T: N \rightarrow N'$  такая, что для всех  $x \in M$   $F'(x) = T(F(x))$ . Докажем, что в этом случае значения предикатов  $E(x, y) = D(F(x), F(y))$  и  $E'(x, y) = D'(F'(x), F'(y))$  совпадают при любых  $x, y \in M$ . Пусть  $x$  и  $y$  таковы, что  $x \bar{E} y$ . Тогда  $F(x) \bar{D} F(y)$ ,  $T(F(x)) \bar{D}' T(F(y))$ ,  $F'(x) \bar{D}' F'(y)$ ,  $x \bar{E}' y$ . Если же  $x \bar{E}' y$ , то  $F'(x) \bar{D}' F'(y)$ ,  $T(F(x)) \bar{D}' T(F(y))$ ,  $F(x) \bar{D} F(y)$ ,  $x \bar{E} y$ . Следовательно, для любых  $x, y \in M$   $E(x, y) = E'(x, y)$ . *Необходимость.* Пусть  $E(x, y) = E'(x, y)$  для любых  $x, y \in M$ . Докажем, что в этом случае найдется биекция  $T: N \rightarrow N'$  такая, что  $F'(x) = T(F(x))$  для любого  $x \in M$ . Рассмотрим отношение  $T \subseteq N \times N'$ , представляющее собой множество всех пар вида  $(F(x), F'(x))$ , где  $x$  - произвольный элемент множества  $M$ . Покажем, что  $T$  есть взаимно-однозначная функция. Пусть  $x$  и  $y$  таковы, что  $F(x) \bar{D} F(y)$ . Тогда  $x \bar{E} y$ ,  $x \bar{E}' y$ ,  $F'(x) \bar{D}' F'(y)$ . Если же  $F'(x) \bar{D}' F'(y)$ , то  $x \bar{E}' y$ ,  $x \bar{E} y$ ,  $F(x) \bar{D} F(y)$ . Таким образом, отношение  $T$  есть взаимно-однозначная функция, причем  $F'(x) = T(F(x))$  для любого  $x \in M$ . Областью определения функции  $T$  служит область значений функции  $F$ , т.е. множество  $N$ . Областью значений функции  $T$  служит область значений функции  $F'$ , т.е. множество  $N'$ . Отсюда, а также из определения понятия биекции [7] следует, что функция  $T$  - это биекция, отображающая все множество  $N$  на множество  $N'$ . Теорема доказана.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает, что если при любых  $x, y \in M$  предикат  $E(x, y)$  можно представить в виде (1), то его также можно представить в виде

$$E(x, y) = D(T(F(x)), T(F(y))), \quad (2)$$

где  $T$  - произвольно выбранная биекция. Из теоремы 3 также следует, что если предикат  $E$  представлен двумя различными способами  $E(x, y) = D(F(x), F(y)) = D(F'(x), F'(y))$ , то всегда найдется такая биекция  $T$ ,

которая связывает функции  $F$  и  $F'$  зависимостью  $F'(x)=T(F(x))$ , справедливой при любом  $x \in M$ . Следовательно, получается, что нельзя указать единственно возможную характеристическую функцию  $F$  для предиката эквивалентности  $E$ .

Таким образом, если найдена некоторая функция  $F$ , математически описывающая объект идентификации, то на роль описания этого объекта с тем же правом может претендовать также целое семейство других функций. Поэтому при выборе функции  $F$  имеется большой произвол. В значительной мере произволен и выбор области значений функции  $F$ . Иными словами, выходные сигналы объекта компараторной идентификации также допускают различные варианты математического описания. Такая множественность представления объекта может привести к мысли о неполноте его описания методом компараторной идентификации и, следовательно, об ущербности этого метода по сравнению с классическими методами прямой идентификации. На самом деле степень полноты описания объекта при этих двух способах идентификации абсолютно одинакова. Дело в том, что при прямой идентификации описание объекта получается единственным лишь по той причине, что способ описания его выходных сигналов был выбран еще до начала идентификации. При компараторной же идентификации способ описания выходных сигналов выбирается в самом процессе идентификации, именно это и приводит к множественности описаний объекта.

Точно такая же множественность описаний объекта может возникнуть и при его прямой идентификации. Дело в том, что и при прямой идентификации выходные сигналы объекта могут описываться самыми различными способами. Так, компоненты вектора выходного сигнала можно нумеровать по-разному. Численные значения каждого из компонентов изменяются, если перейти к новой шкале при их измерении. Шкалу эту не обязательно брать линейной. Для каждого компонента можно брать свою собственную шкалу. Изменение же способа описания выходных сигналов объекта автоматически влечет за собой также и изменение описания самого объекта. После такого изменения описания линейный объект может даже превратиться в нелинейный. Таким образом, и при прямой идентификации математическое описание объекта может оказаться многовариантным. Это означает, что математическое описание объекта всегда получается лишь с точностью до произвольного биективного отображения. Требовать от компараторной или некомпараторной идентификации, чтобы она давала единственно возможное описание объекта, - это значит считать, что имеется единственная истинная система обозначений его выходных сигналов, что, конечно, неверно.

Нижеследующее утверждение доказывает, что методом компараторной идентификации объект описывается с точностью до изоморфизма.

Содержательно это означает, что компараторная идентификация (так же, как и прямая) дает с точностью до обозначений единственное описание объекта. Рассмотрим два предиката эквивалентности  $E(x, y)$  и  $E'(x', y')$ . Первый из них задан на декартовом квадрате множества  $M$ , второй - на декартовом квадрате множества  $M'$ . Выразим предикаты  $E$  и  $E'$  в виде

$$E(x, y) = D(F(x), F(y)), \quad (3)$$

$$E'(x', y') = D'(F'(x'), F'(y')). \quad (4)$$

Согласно теореме 2, это всегда можно сделать. Здесь  $D$  - предикат равенства, заданный на декартовом квадрате множества  $N$ ;  $D'$  - предикат равенства, заданный на декартовом квадрате множества  $N'$ . Символами  $F$  и  $F'$  обозначены характеристические функции предикатов  $E$  и  $E'$ . Первая из них определена на множестве  $M$  и принимает значения на множестве  $N$ , вторая определена на  $M'$  и принимает значения на множестве  $N'$ .

**Теорема 4.** Если модели  $(M, E)$  и  $(M', E')$  изоморфны, то также изоморфны модели  $(N, D)$  и  $(N', D')$ .

**Доказательство.** Изоморфность моделей  $(M, E)$  и  $(M', E')$  означает [1], что существует биекция  $G: M \rightarrow M'$  такая, что

$$E(x, y) = E'(G(x), G(y)) \quad (5)$$

при любых  $x, y \in M$ . Существование биективной функции  $G$  означает, что множества  $M$  и  $M'$  равномощны. Рассмотрим отношение  $H$ , заданное на декартовом произведении  $N \times N'$  и образованное всеми парами вида  $(F(x), F'(G(x)))$ . Покажем, что отношение  $H$  функционально. Возьмем какие-нибудь элементы  $x, y \in M$  и предположим, что  $F(x)DF(y)$ . Тогда в силу (3)  $xEy$ . Из (5) следует, что  $G(x)E'G(y)$ , откуда согласно (4) получаем  $F'(G(x))D'F'(G(y))$ . Итак, отношение  $H$  есть функция. Покажем, что функция  $H$  взаимно-однозначна. Пусть  $x, y \in M$  таковы, что  $F'(G(x))D'F'(G(y))$ . Тогда в силу (4)  $G(x)E'G(y)$ . Отсюда согласно (5) выводим  $xEy$ . Последнее соотношение в силу (3) влечет  $F(x)DF(y)$ . Итак,  $H$  - взаимно-однозначная функция. Область значений функции  $F$  совпадает с множеством  $N$ , поэтому функция  $H$  определена на всем множестве  $N$ . Поскольку область значений функции  $F'$  совпадает с множеством  $N'$ , то областью значений функции  $H$  служит все множество  $N'$ . Итак, отношение  $H$  есть биекция, заданная на множестве  $N$  со значениями на множестве  $N'$ . Она может быть представлена равенством

$$F'(G(x)) = H(F(x)), \quad (6)$$

справедливым для всех  $x \in M$ . Из биективности отношения  $H$  следует, что множества  $N$  и  $N'$  равномощны. Доказываем изоморфность предикатов  $D$  и  $D'$ . Для любых  $u, v \in N$  из  $uDv$  следует  $G(u)D'G(v)$ . Точно так же из  $uDv$

следует  $G(u)D'G(v)$ . Итак,

$$D(u, v) = D'(G(u), G(v)) \quad (7)$$

при любых  $u, v \in N$ . Теорема доказана.

Пусть  $u = F(x)$  - математическое описание объекта, заданного предикатом  $E(x, y)$ ;  $u' = F'(x')$  - описание того же объекта, заданного предикатом  $E'(x', y')$ . Функция  $F$  отображает множество  $M$  на множество  $N$ , а функция  $F'$  отображает множество  $M'$  на множество  $N'$ . Если множество  $M$  отличается от множества  $M'$ , а множество  $N$  от множества  $N'$ , то это может означать лишь то, что входные сигналы  $x, x'$  и выходные сигналы  $u, u'$  объекта описаны в различных системах обозначений. Поэтому должны существовать биекции  $G$  и  $H$  такие, что  $x' = G(x)$  и  $u' = H(u)$ . Они задают переход от одной системы обозначений сигналов объекта к другой. Пользуясь только что записанными соотношениями, можем равенство  $u' = F'(x')$  переписать в виде  $H(u) = F'(G(x))$ . Учитывая (6), имеем  $H(u) = H(F(x))$ . Так как отображение  $H$  биективно, то  $u = F(x)$ . Мы превратили описание  $F$  объекта в описание  $F'$ . Аналогичным способом можно превратить описание  $F'$  объекта в описание  $F$ . Полученный результат означает, что объект компараторной идентификации может иметь различные описания  $F$  и  $F'$  только за счет того, что его входные и выходные сигналы представлены в различных системах обозначений. Если потребовать, чтобы входные и выходные сигналы объекта всегда описывались в одной и той же системе отсчета (т.е. каким-то стандартным способом), то при компараторной идентификации, так же как и при прямой, описание объекта будет единственным.

**Список литературы:** 1. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с. 2. Кравков С.В. Цветовое зрение. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 175 с. 3. Нюберг Н.Д. Измерение цвета и цветовые стандарты. М.: Стандартизация и рационализация. 1933. 104 с. 4. Рабикин Е.Б. Атлас цветов. М.: Медгиз, 1956. 52 с. 5. Ивенса Р.М. Введение в теорию цвета. М.: Мир. 1964. 441 с. 6. Раутиан Г.Н. Колориметрические приборы. Справочная книга оптика-механика. Ч. 1. М.: ОНТИ. 1936. 281 с. 7. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука. 1975. 400 с.

Поступила в редакцию 05.10.98