ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

УДК. 621.373.072.9

В. В. Рапин, канд. техн. наук

НПФ "Газтест", г. Харьков

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

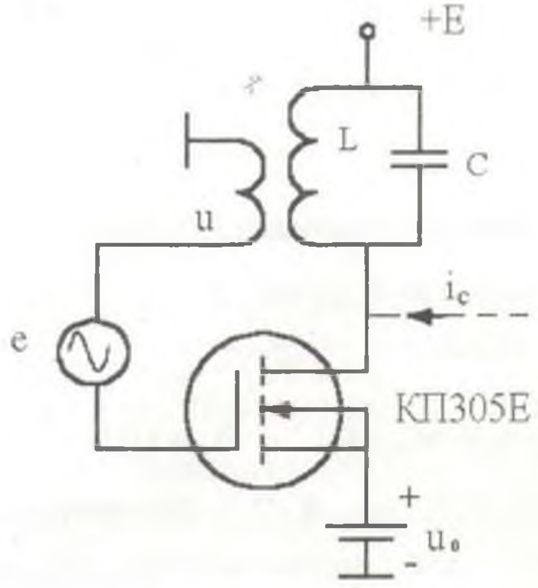
Рассмотрена неавтономная система синхронизированных одноконтурных автогенераторов, работающих в режимах умножения и деления частоты, а также синхронизации на основном тоне. Получены математические модели таких автогенераторов при полиномиальной аппроксимации нелинейной характеристики усилительного элемента и обобщенная математическая модель системы.

Введение. Для моделирования достаточно широкого класса систем синхронизированных автогенераторов, которые имели бы как прикладное техническое воплощение, так и использовались бы при анализе гидродинамических, химических и биологических аналогов в общем случае оказывается наиболее подходящей объемная структура, в которой каждый из автогенераторов может быть связан с остальными взаимными или однонаправленными связями.

Целью данной статьи является разработка обобщенной математической модели системы автогенераторов, позволяющей в рамках единого подхода разработать прикладную теорию широкого класса неавтономных систем синхронизированных автогенераторов.

В работе рассматривается широко распространенный класс автогенераторов, колебательные системы которых могут быть представлены одноконтурной моделью. Исходя из характера решаемых задач, достаточно ограничиться при аппроксимации нелинейной характеристики усилительного элемента полиномом четвертой степени, который подходит для автогенераторов, работающих в режиме колебаний первого и второго рода.

При разработке математической модели сделан ряд допущений, позволяющих выделить интересующее явление и упростить процесс исследования. Считаем, что автогенераторы системы одинаковы и имеют контуры с высокой добротностью, усилительные элементы автогенераторов являются нелинейными и безынерционными, входное сопротивление их велико, и его влия-



Принципиальная схема синхронизированного автогенератора

нием можно пренебречь, смещение фиксированное, амплитуда сигнала синхронизации постоянна. Сигналы синхронизации предполагаются малыми, их введение не приводит к существенному изменению амплитуды колебаний.

В данной работе использована достаточно общая модель автогенератора с внешним воздействием. Это схема, в которой в режиме умножения и деления частоты напряжение внешнего воздействия e складывается с напряжением обратной связи на входе активного элемента, как это показано для автогенератора с трансформаторной обратной связью на рисунке. При синхронизации на основном тоне сигнал синхронизации в виде тока подается в контур автогенератора, что показано пунктиром на том же рисунке.

Математическая модель автогенератора, синхронизированного на основном тоне Рассмотрим вначале те автогенераторы системы, которые синхронизированы на основном тоне. Нелинейные характеристики их усилительных элементов аппроксимируются полиномом $i = a_{0j} + a_{1j}u_{yj} + a_{2j}u_{yj}^2 + a_{3j}u_{yj}^3 + a_{4j}u_{yj}^4$ (для режима колебаний второго рода с помощью метода, предложенного в [1]), где $u_{yj} = u_j + u_{0j}$ – управляющее напряжение; u_{0j} - фиксированное смещение; а u_j-напряжение положительной обратной связи на входе усилительного элемента, оно же является сигналом автогенератора; $i_{cj} = I_{cj}\cos(\omega_c t + \psi_j)$ непосредственный сигнал синхронизации, в данном случае в виде тока. Тогда на основании законов Кирхгофа можно получить уравнения, описывающие одноконтурные квазигармонические автогенераторы системы, синхронизированные на основном тоне

$$\frac{d^2u_j}{d\tau_j^2} - \varepsilon_j(1 - 2\beta_j u_j - 3\gamma_j u_j^2 - 4\delta_j^{'} u_j^3)\frac{du_j}{d\tau_j} + u_j = k_j R_j \delta_j \frac{di_{cj}}{d\tau_j},$$

$$1 \le j \le N_k$$

где $\varepsilon_j = \delta_j \alpha_j$-малый параметр; $\tau_j = \omega_{cj} t$-безразмерное время; $\alpha_j = (k_j R_j \alpha_{0j} - 1)$; $\beta_j = \beta_{0j} / \dot{\alpha}_{0j}$; $\gamma_j = \gamma_{0j} / \dot{\alpha}_{0j}$; $\delta_j^{'} = \delta_{j0} / \dot{\alpha}_{j0}$; $\delta_{0j} = a_{4j}$; $\alpha_{0j} = a_{1j} + 2a_{2j} u_{0j} + 3a_{3j} u_{0j}^2 + 4a_{4j} u_{0j}^3$; $\beta_{0j} = a_{2j} + 3a_{3j} u_{0j} + 6a_{4j} u_{0j}^2$; $\delta_j = 1/Q_j$ $\gamma_{0j} = a_{3j} + 4a_{4j} u_{0j}$; $\dot{\alpha}_{0j} = -\alpha_{0j} + 1/(k_j R_j)$; $\omega_{0j}, R_j Q_j$- резонансная частота контура автогенератора, его сопротивление и добротность, k_j-коэффициент положительной обратной связи, $|d\psi_j / d\tau| << 1$, N_k-количество автогенераторов системы, синхронизированных на основном тоне.

Учитывая высокую добротность контуров автогенераторов, считаем амплитуду и фазу колебаний медленно меняющимися функциями времени. Решение вышеуказанных уравнений, как известно, может быть найдено в виде $u_j = A_j \cos(\omega_{cj} t + \varphi_j)$. Тогда, используя метод усреднения, можно получить укороченные уравнения

$$\frac{dy_j}{d\tau_j} + \frac{\varepsilon_j}{2}(y_j^3 - y_j) = \frac{\varepsilon_j B_j}{2\alpha_j}\cos\theta_j,$$

$$\frac{d\theta_j}{d\tau_j} + \frac{\varepsilon_j B_j}{2\alpha_j y_j}\sin\theta_j = -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_j - \frac{d\psi_j}{d\tau_j},$$

$$1 \le j \le N_k$$

где $\theta_j = \varphi_j - \psi_j$-сдвиг фазы; $y_j = A_j / A_{0j}$-безразмерная амплитуда колебаний; $A_{0j} = \sqrt{4\dot{\alpha}_{0j} / (3\gamma_{0j})}$-амплитуда колебаний автогенератора в автономном режиме; A_j-амплитуда колебаний автогенератора в режиме синхронизации; $(\Delta\omega/\omega_0)_j = (\omega_{cj} - \omega_{0j})/\omega_{0j}$. Эти уравнения и будем считать математической моделью рассмотренных автогенераторов.

Математическая модель автогенератора в режиме умножения и деления частоты. При работе синхронизированных одноконтурных автогенераторов в режимах умножения или деления частоты их уравнения записываются следующим образом:

$$\frac{d^2u_j}{d\tau_j^2}+\frac{\omega_{0j}}{\omega_{zj}}k_jR_j\delta_j\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u_j}{k_jR_j}-i_j\right)+\frac{\omega_{0j}^2}{\omega_{zj}^2}u_j=0,$$

$$N_k+1\le j\le N$$

где $\tau_j=\omega_{zj}t$; u_j-напряжение положительной обратной связи (на входе усилительного элемента автогенератора); i_j- его ток; R_j,ω_{0j},δ_j-резонансные сопротивление, частота и затухание контура; k_j-коэффициент положительной обратной связи; $\omega_{zj}=m_j/n_j\omega_{cj}$-частота генерирования; m_j и n_j-небольшие неравные целые числа; N-общее количество автогенераторов в автоколебательной системе.

Так же, как и в предыдущем случае, нелинейную характеристику усилительного элемента автогенератора аппроксимируем полиномом четвертой степени

$$i_j=a_{0j}+a_{1j}u_{yj}+a_{2j}u_{yj}^2+a_{3j}u_{yj}^3+a_{4j}u_{yj}^4,$$

где $u_{yj}=u_j+e_j+u_{0j}$, u_{0j}-фиксированное смещение, $e_j=E_j\cos(\omega_{cj}t+\psi_j)$ - непосредственный сигнал синхронизации.

Поскольку автогенераторы предполагаются квазигармоническими, решение вышеприведенных уравнений также ищем в виде гармонических функций $u_j=A_j\cos(\omega_{zj}t+\varphi_j)$. Аналогично случаю синхронизации на основном тоне учитываем высокую добротность контуров автогенераторов, что позволяет обращаться с амплитудой и фазой колебаний автогенераторов как с медленно меняющимися функциями времени. Тогда, посредством метода усреднения, приходим к укороченным уравнениям синхронизированных автогенераторов, описывающих как режимы умножения частоты, так и деления

$$\begin{aligned}&\frac{dy_j}{d\tau_j}+\frac{\varepsilon}{2}(y_j^3-U_jy_j)=\frac{\varepsilon}{2}B_{1j}(y_j)\cos\theta_j,\\&\frac{d\theta_j}{d\tau_j}+n_j\frac{\varepsilon}{2}B_{2j}(y_j)\sin\theta_j=-n_j\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)_j-m_j\frac{d\psi_j}{d\tau_j},\end{aligned}\qquad(1)$$

$$N_k+1\le j\le N$$

где $\theta_j=n_j\varphi_j-m_j\psi_j$-сдвиг фазы; $y_j=A_j/A_{0j}$-безразмерная амплитуда колебаний; $A_{0j}=\sqrt{4\alpha_{0j}/(3\gamma_{0j})}$-амплитуда колебаний автогенератора в автономном режиме; A_j-амплитуда колебаний автогенератора в режиме синхронизации; $U_j=1-2E_j^2/A_{0j}^2$; $(\Delta\omega/\omega_0)_j=(m_j/n_j\omega_{cj}-\omega_{0j})/\omega_{0j}$.

Так как сигнал синхронизации предполагается малым, то $\left|B_{1j(y_j)}\right| << 1$, и $\left|B_{2j(y_j)}\right| << 1$. Эти коэффициенты описываются различными выражениями в зависимости от режима работы синхронизированного автогенератора.

Поскольку система синхронизированных автогенераторов предполагает наличие различного рода фазовых обратных связей, то в укороченных уравнениях фаза непосредственного сигнала синхронизации в общем случае может включать фазы сигналов обратной связи, сдвиги фаз этих сигналов и их производные [2].

Выражения для коэффициентов, входящих в полученные уравнения, существенным образом зависят от режима работы синхронизированного автогенератора. Уравнения (1) могут использоваться и для описания процесса синхронизации на основном тоне. При синхронизации на основном тоне $m_j = 1$, $n_j = 1$, $B_{1j(y_j)} = B_{1j}/\alpha_j$ где $B_{1j} = I_{cj}/I_{0j}$, а $B_{2j(y_j)} = B_{1j(y_j)}/y_j$, $U_j = 1$, $I_{0j} = A_{0j}/(R_j k_j)$, $(\Delta\omega/\omega_0)_j = (\omega_{cj} - \omega_{0j})/\omega_{0j}$.. Для всех других режимов синхронизации $U_j = 1 - 2E_j^2/A_{0j}^2$.

При умножении частоты на 3/2 $B_{1j(y_j)} = B_{2j(y_j)} = -\delta_{0j}E_j/(2\alpha'_{0j})$, $m_j = 3$, $n_j = 2$, $(\Delta\omega/\omega_0)_j = (3\omega_{cj}/2 - \omega_{0j})/\omega_{0j}$

Для синхронизированного автогенератора в режиме умножения частоты на два $B_{1j(y_j)} = B_{1j} + 3B_{2j}y_j^2$,

$B_{2j(y_j)} = (B_1 + B_2 y_j^2)/y_j$, где $B_{1j} = -E_j^2(\delta_{0j}E_j^2 + \beta_{0j})/(2\alpha'_{0j}A_{0j})$, а

$B_{2j} = -(3\delta_{0j}A_{0j}E_j^2)/(4\alpha'_{0j})$, $m_j = 2$, $n_j = 1$,

$(\Delta\omega/\omega_0)_j = (2\omega_{cj} - \omega_{0j})/\omega_{0j}$

При умножения частоты на три $B_{1j(y_j)} = -E_j^3/(3A_{0j}^3)$, $B_{2j(y_j)} = B_{1j(y_j)}/y_j$, $m_j = 3$, $n_j = 1$, $(\Delta\omega/\omega_0)_j = (3\omega_{cj} - \omega_{0j})/\omega_{0j}$.

Рассмотрим теперь деление частоты. При делении частоты на 3/2 $B_{1j(y_j)} = B_{1j}y_j^2$, а $B_{2j(y_j)} = B_{1j}y_j$, где $B_{1j} = -3\delta_{0j}A_{0j}E_j^2/(4\alpha'_{0j})$, $m_j = 2$, $n_j = 3$, $(\Delta\omega/\omega_0)_j = (2\omega_{cj}/3 - \omega_{0j})/\omega_{0j}$.

Для режима деления частоты на два $B_{1j(y_j)} = (B_{1j} + B_{2j}y_j^2)y_j$, $B_{2j(y_j)} = (B_{1j} + B_{2j}y_j^2/2)$, где

$B_{1j} = -E_j(3\delta_{0j}E_j^2/2 + \beta_{0j})/\alpha_{0j}'$, а $B_{2j} = -2\delta_{0j}A_{0j}^2 E/\alpha_{0j}'$, $m_j = 1$, $n_j = 2$, $(\Delta\omega/\omega_0)_j = (\omega_{cj}/2 - \omega_{0j})/\omega_{0j}$.

При делении частоты на три $B_{1j(y_j)} = B_{1j}y_j^2$, $B_{2j(y_j)} = B_{1j}y_j$, где $B_{1j} = E_j/A_{0j}$ $m_j = 1$, $n_j = 2$, $(\Delta\omega/\omega_0)_j = (\omega_{cj}/3 - \omega_{0j})/\omega_{0j}$.

Заключение. Приведенные в данной работе укороченные уравнения (1) представляют обобщенную математическую модель неавтономной системы синхронизированных квазигармонических одноконтурных автогенераторов. Их единообразие позволяет получить основные соотношения в общем виде и в рамках единого подхода разработать прикладную теорию широкого класса вышеуказанных систем. Они хорошо описывают одноконтурные автогенераторы, работающие в режиме колебаний как первого, так и второго рода при синхронизации на основном тоне. При умножении и делении частоты эти уравнения предназначены для режима колебаний первого рода и с высокой точностью описывают амплитуду колебаний, ввиду присутствия большой асинхронной составляющей. Погрешность определения сдвига фазы определяется комбинационными составляющими и может быть как малой, так и значительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рапин В.В.* Аппроксимация проходных динамических характеристик усилительных элементов *LC* - автогенераторов// Изв. вузов. Радиоэлектроника. - 1988.- **31**, № 5.- С. 77-79.
2. *Рапин В.В.* Формирование фазовой обратной связи в неавтономных квазигармонических динамических системах// Радиотехника.- 2002.- Вып.130.- С.178-181.

Поступила в редакцию
20.01.04