Про Одну Задачу Оптимального Керування Вимушеними Коливаннями Однорідної Пластинки

Надія Гибкіна
кафедра прикладної математики
Харківський національний університет
радіоелектроніки)
Харків, Україна
nadiia.gybkina@nure.ua

Максим Сидоров
кафедра прикладної математики
Харківський національний університет
радіоелектроніки)
Харків, Україна
maxim.sidorov@nure.ua

On one optimal control problem of forced oscillations of a homogeneous plate

Nadiia Gybkina
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University
of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
nadiia.gybkina@nure.ua

Maxim Sidorov
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University
of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
maxim.sidorov@nure.ua

***Анотація*—Розглядається задача оптимального керування вимушеними коливаннями прямокутної однорідної пластинки. Математичною моделлю процесу коливань є неоднорідне двовимірне хвильове рівняння з заданими початковими та крайовими умовами. Необхідно підібрати таку зовнішню силу, під дією якої у кінцевий момент часу пластинка набуде положення, якомога близького до бажаного.**

***Abstract*—The optimal control problem of forced oscillations of a rectangular homogeneous plate is considered. A mathematical model of the oscillation process is an inhomogeneous two-dimensional wave equation with given initial and boundary conditions. It is necessary to find such external force, under the action of which at the final moment of time the plate will take a position, as close as possible to the desired.**

Ключові слова—хвильове рівняння; оптимальне керування; однорідна пластинка; вимушувальна сила; керуючий вплив

Keywords—wave equation; optimal control; homogeneous plate; driving force; control influence

I. Вступ

Актуальність дослідження. Великий клас фізичних процесів, пов'язаних з коливальними системами, моделюється диференціальними рівняннями у частинних похідних, зокрема, хвильовим рівнянням. На практиці часто виникають задачі керування, у яких, наприклад, потрібно згенерувати коливання потрібної частоти, зменшити амплітуду коливань, стабілізувати коливання або повністю заспокоїти систему. Керовані коливальні системи широко розповсюджені у промисловості, техніці, механіці та інших галузях науки та виробництва [1].

Математичне моделювання керованих коливальних процесів призводить до задач оптимального керування гіперболічними двовимірними системами. Важливий клас теорії оптимального керування складають задачі мінімізації термінального квадратичного функціоналу на розв'язках лінійного двовимірного хвильового рівняння. Дослідженню задач оптимального керування коливальними системами присвячено багато робіт, зокрема [2, 4 – 9].

На цей час актуальною є розробка наближених аналітичних методів розв'язання задач оптимального керування, що дає можливість отримати прості і наочні формули, які можна застосовувати у практичних інженерних розрахунках.

Цілі та задачі дослідження. Метою роботи є розробка математичних методів оптимального керування процесом вимушених коливань однорідної пластинки з метою встановлення у кінцевий момент часу такого положення цієї пластинки, що є якомога близьким до заданої форми. Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [3].

II. Постановка задачі

Розглянемо закріплену на кінцях пластинку, що знаходиться під дією зовнішніх вимушувальних сил. Математична модель процесу вимушених коливань однорідної пластинки має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+ f(x,y,t)+g(x,y,t), \qquad (1)$$

$$0<x<l_1,\ 0<y<l_2,\ t>0,$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y),\ \ 0<x<l_1,\ 0<y<l_2, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y),\ \ 0<x<l_1,\ 0<y<l_2, \qquad (3)$$

$$u\big|_{x=0}=0,\ \ u\big|_{x=l_1}=0,\ \ u\big|_{y=0}=0,\ \ u\big|_{y=l_2}=0. \qquad (4)$$

де a^2, l_1, l_2 – задані константи, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ – задані функції з $L_2((0;l_1)\times(0;l_2))$, $g(x,y,t)$ – відома зовнішня вимушувальна сила, що діє на пластинку протягом часу, $f(x,y,t)$ – оптимальний вплив, що підлягає визначенню.

Функція $u=u(x,y,t)$ у (1) описує відхилення точки (x,y) пластинки від положення рівноваги у момент часу t.

Розглянемо одну з можливих задач оптимального керування вимушеними коливаннями однорідної пластинки: необхідно шляхом підбору зовнішньої сили $f(x,y,t)$, яка діє на тіло пластинки протягом часу $t\in[0,T]$, досягнути у заданий момент часу $T>0$ такого положення пластинки, що буде якомога близьким до заданого бажаного положення $z(x,y)$, $0<x<l_1$, $0<y<l_2$. Витрати на реалізацію керування можна врахувати за допомогою так званих енергетичних обмежень. Формально наведені вище умови можна записати у вигляді функціоналу якості:

$$J(f)=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(u(x,y,T;\,f)-z(x,y)\right)^2 dxdy+\beta\int_0^{T}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f^2(x,y,t)dtdxdy. \qquad (5)$$

де $u(x,y,t)=u(x,y,t;\,f)$ є розв'язком початково-крайової задачі (1) – (4), β – певний ваговий коефіцієнт, $\beta>0$.

Далі вважатимемо, що $f=f(x,y,t)$ – керування з множини

$$\mathrm{F}=\{f(x,y,t)\in L_2((0;l_1)\times(0;l_2)\times(0,T)),$$
$$f^{\min}\le f(x,y,t)\le f^{\max} \qquad (6)$$
майже всюди на $[0;l_1]\times[0;l_2]\times[0,T]$,

де $f^{\min}<f^{\max}$.

До обмежень (6) на функцію f можна також додавати й інші обмеження, які визначаються постановкою конкретної задачі та умовами перебігу реальних процесів, що в ній моделюються.

III. Розв'язання задачі оптимального керування

Наведемо алгоритм розв'язання задачі оптимального керування (1) – (6). Для цього необхідно визначити $u=u(x,y,t)$ як розв'язок задачі (1) - (4) у припущенні відомого зовнішнього впливу $f(x,y,t)$.

Розв'язуючи задачу (1) - (4) методом відокремлення змінних Фур'є, дістанемо наступне співвідношення для функції $u=u(x,y,t)$:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg[\varphi_{nm}\cos\left(a\sqrt{\lambda_{nm}}t\right)+\frac{\psi_{nm}}{a\sqrt{\lambda_{nm}}}\sin\left(a\sqrt{\lambda_{nm}}t\right)+$$
$$+\frac{1}{a\sqrt{\lambda_{nm}}}\int_0^t\left(f_{nm}(\tau)+g_{nm}(\tau)\right)\sin\left(a\sqrt{\lambda_{nm}}(\tau-t)\right)d\tau\Bigg]\Phi_{nm}(x,y), \qquad (7)$$

де $\lambda_{nm}=\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2$, $n,m=1,2,\ldots$, – власні значення задачі (1) – (4);

$$\Phi_{nm}(x,y)=\sin\frac{\pi k x}{l_1}\sin\frac{\pi n y}{l_2},\ n,m=1,2,\ldots, \qquad (8)$$

– відповідні їм власні функції;

$$\varphi_{nm}=\frac{\left(\varphi,\Phi_{nm}\right)_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))}}{\left\|\Phi_{nm}\right\|^2_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))}},\quad \psi_{nm}=\frac{\left(\psi,\Phi_{nm}\right)_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))}}{\left\|\Phi_{nm}\right\|^2_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))}},$$
$$f_{nm}(t)=\frac{\left(f,\Phi_{nm}\right)_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))}}{\left\|\Phi_{nm}\right\|^2_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))}},\quad g_{nm}(t)=\frac{\left(g,\Phi_{nm}\right)_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))}}{\left\|\Phi_{nm}\right\|^2_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))}},$$
$$n,m=1,2,\ldots,$$

– коефіцієнти розкладання функцій $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $f(x,y,t)$, $g(x,y,t)$ у ряди за системою власних функцій (9).

Для розв'язання задачі оптимального керування необхідно вибрати апроксимуючий вираз для зовнішнього керуючого впливу $f(x,y,t)$. З огляду на те, що функція $f(x,y,t)$ розкладається у ряд Фур'є за системою власних функцій $\Phi_{nm}(x,y)$, $n,m=1,2,\ldots$, задачі Штурма-Ліувілля:

$$f(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(t)\Phi_{nm}(x,y)\ , \qquad (9)$$

шукатимемо апроксимацію цієї функції у вигляді часткової суми ряду (9):

$$f(x,y,t)=\sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M} f_{nm}(t)\Phi_{nm}(x,y)\ , \qquad (10)$$

коефіцієнти якого наближатимемо тригонометричними поліномами вигляду:

$$f_{nm}(t) \approx r_0^{nm} + \sum_{j=1}^{S}\left(r_j^{nm} \sin\frac{\pi i t}{T} + q_j^{nm} \cos\frac{\pi j t}{T}\right),\ n,m = 1, 2, \ldots . (11)$$

Тоді задача пошуку оптимального керуючого впливу (11) зводиться до визначення коефіцієнтів r_0^{nm}, r_j^{nm}, q_j^{nm}, $j = 1,2,...,S$, у (11). Для визначення цих параметрів використовується функціонал якості (5).

Вважаючи функцію $f(x,y,t)$ невідомою і такою, що має структуру вигляду (10), (11), та підставляючи у формулу (7), яка дає положення пластинки у момент часу t, співвідношення (11) при $t = T$, дістанемо

$$u(x,y,T) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\varphi_{nm}\cos\left(a\sqrt{\lambda_{nm}}T\right) + \frac{\psi_{nm}}{a\sqrt{\lambda_{nm}}}\sin\left(a\sqrt{\lambda_{nm}}T\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{nm}}}\int_0^T \left\{ r_0^{nm} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(r_j^{nm}\sin\frac{\pi i\tau}{T} + q_j^{nm}\cos\frac{\pi j\tau}{T}\right) + \right.$$
$$\left. \left. + g_{nm}(\tau)\right\}\sin\left(a\sqrt{\lambda_{nm}}(\tau - T)\right)d\tau\right]\cdot\Phi_{nm}(x,y).$$

Повертаючись до позначень, зроблених у (5), дістанемо, що $u(x,y,T)$ є функцією від $\{r_0^{nm}\},\{r_j^{nm}\},\{q_j^{nm}\}$. Тоді задача оптимального керування (1) – (6) зводиться до задачі оптимізації:

$$J(\{r_0^{nm}\},\{r_j^{nm}\},\{q_j^{nm}\}) =$$
$$= \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(u(x,T;\{r_0^{nm}\},\{r_j^{nm}\},\{q_j^{nm}\}) - z(x,y)\right)^2 dxdy + \quad (12)$$
$$+\beta\int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f^2(x,y,\{r_0^{nm}\},\{r_j^{nm}\},\{q_j^{nm}\})dtdxdy \to \min_{\substack{r_0^{nm},r_j^{nm},q_j^{nm},\\ j=1,2,...,S;\\ n,m=1,2,...,M}}.$$

за умов (6).

IV. Обчислювальні експерименти

Наведемо результати обчислювальних експериментів, що демонструють запропонований метод оптимального керування вимушеними коливаннями пластинки (1) – (6). У всіх проведених експериментах було використано наступні параметри $l_1 = 1$, $l_2 = 1$, $T = 1$, $a = 1$. Положення і швидкість точок пластинки у початковий момент часу $t = 0$ зафіксовано $\varphi(x,y) = 0$, $\psi(x,y) = 0$. Відома вимушувальна сила та бажаний режим у кінцевий момент часу $T = 1$ задані функціями

$$g(x,y,t) = 500xy(x-l_1)^2(y-l_2)^2 e^{T-t},$$
$$z(x,y) = xy(x-l_1)(y-l_2)x^2 y.$$

Графіки функцій $z(x,y)$ та $g(x,y,t)$ при $t = T$ наведено на рис. 1 та 2.

Оберемо $\beta = 0,00005$. Обмежившись відрізком ряду Фур'є (11) довжини $S = 2$ та дев'ятьма доданками ($M = 3$) у сумі (10), дістанемо оптимальний зовнішній керуючий вплив на пластинку $f(x,y,t)$ з розв'язання задачі мінімізації (12) за наведених вище умов. Графіки цієї функції у різні моменти часу наведено на рис. 3 – 7.

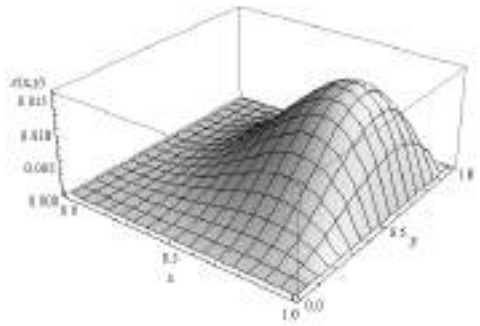

Рис. 1. Бажаний режим $z(x,y)$ при $t = T$

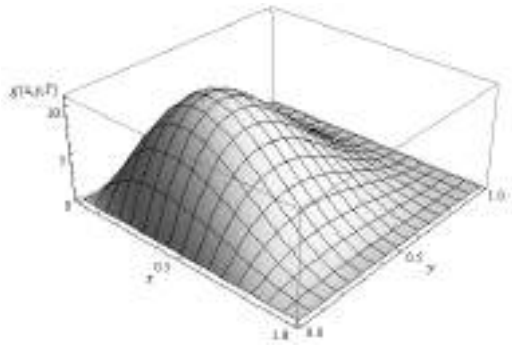

Рис. 2. Вимушувальна сила $g(x,y,t)$ при $t = T$

Графік відхилення між фактичним та бажаним положенням пластини у кінцевий момент часу $T = 1$ наведено на рис. 8. При цьому

$$\Delta = \left\| u(x,y,T) - z(x,y)\right\|_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))} = 0,78\cdot 10^{-3},$$
$$\delta = \frac{\left\| u(x,y,T) - z(x,y)\right\|_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))}}{\left\| z(x,y)\right\|_{L_2((0,l_1)\times(0,l_2))}} = 0,127 .$$

Змінюючи значення вагового коефіцієнта β, можна варіювати точність досягнення бажаного положення пластинкою у кінцевий момент часу T. У табл. 1 наведено результати обчислення мінімального значення функціоналу якості та пов'язаних з ним величин для різних значень β. Як видно, урахування другого доданка, що відповідає за так звані «енергетичні» витрати на керування, приводить до зниження точності керування.

V. Висновки

У роботі розв'язано одну з можливих постановок задач оптимального керування коливаннями однорідної пластинки, яка протягом часу дослідження знаходиться під дією зовнішньої вимушувальної сили. До переваг розглянутого методу розв'язання поставленої задачі відноситься те, що початково-крайова задача для

гіперболічного рівняння розв'язується аналітично, а оптимальний керуючий вплив також будується у аналітичному вигляді. Отримані результати можуть бути використані під час дослідження реальних коливальних систем та розрахунку програм їх оптимального функціонування.

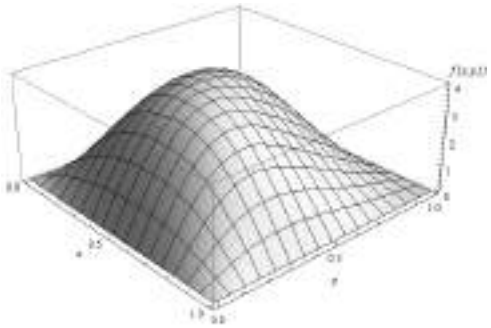

Рис. 3. Оптимальний керуючий вплив $f(x,y,t)$ при $t=0$

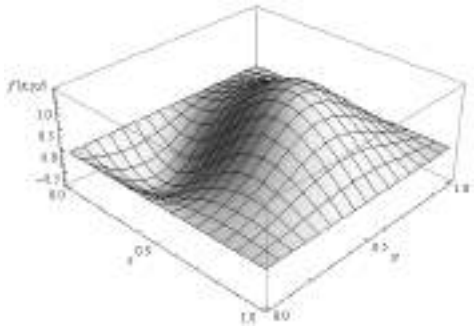

Рис. 4. Оптимальний керуючий вплив $f(x,y,t)$ при $t=0,25$

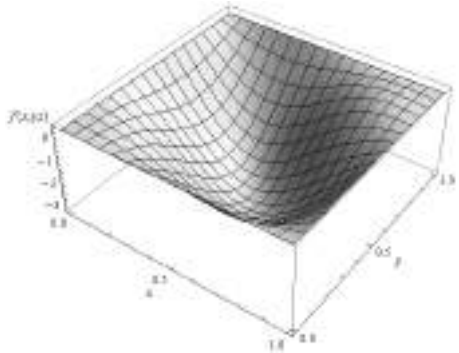

Рис. 5. Оптимальний керуючий вплив $f(x,y,t)$ при $t=0,5$

ТАБЛИЦЯ I. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

β	J	Δ	δ
0,0005	$0,11\cdot10^{-2}$	$0,52\cdot10^{-2}$	0,841
0,0001	$0,23\cdot10^{-3}$	$0,12\cdot10^{-2}$	0,195
0,00005	$0,11\cdot10^{-3}$	$0,78\cdot10^{-3}$	0,127
0,00001	$0,23\cdot10^{-4}$	$0,58\cdot10^{-3}$	0,095
0	$0,33\cdot10^{-6}$	$0,57\cdot10^{-3}$	0,093

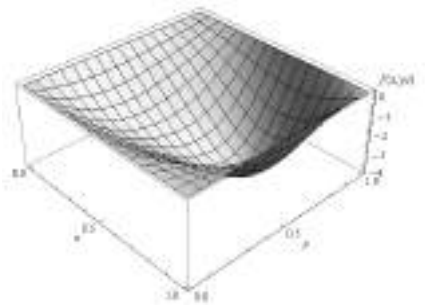

Рис. 6. Оптимальний керуючий вплив $f(x,y,t)$ при $t=0,75$

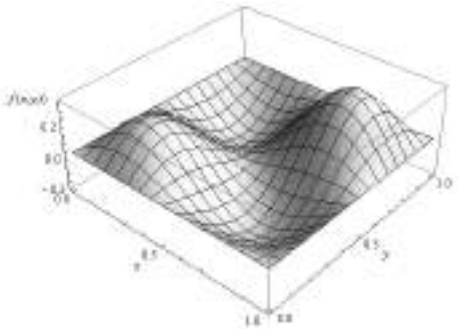

Рис. 7. Оптимальний керуючий вплив $f(x,y,t)$ при $t=1$

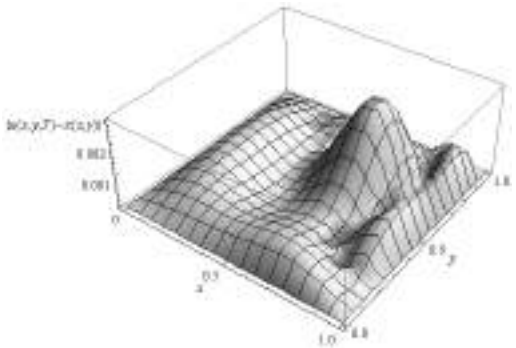

Рис. 8. Відхилення $|u(x,y,T)-z(x,y)|$

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 588 с.

[2] Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Разгулин А.В. "О методе Фурье для решения одной задачи управления колебанием струны," *Вестник МГУ*, сер. 15, вычисл. матем. и киберн, № 2, с. 3-8, 1993.

[3] Гибкина Н.В., Сидоров М.В., Стадникова А.В. "Оптимальное граничное управление колебаниями однородной струны," *Радиоэлектроника и информатика*, № 2 (73), с. 3-11, 2016.

[4] Егоров А.И. "Управление упругими колебаниями," *ДАН УССР*, сер. физ-мат. и техн. наук, № 5, с. 60-63, 1986.

[5] Ильин В.А., Моисеев Е.И. "Оптимизация граничных управлений колебаниями струны," *УМН*, Т. 60, вып. 6 (366), с. 89-114, 2005.

[6] Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975.

[7] Копец М.М. "Оптимальное управление колебаниями прямоугольной мембраны," *Кибернетика и вычисл. техника*, Вып. 177, с. 28-42, 2014.

[8] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с.

[9] Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.