

СВЯЗЬ ПАРАМЕТРОВ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИИ ЦЕПИ.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В работе [1] получены соотношения, связывающие начальные значения временных характеристик и их производных для электрических цепей второго порядка с коэффициентами a_i и b_j операторной функции $T(p)$, которая в общем случае имеет вид

$$T(p) = \frac{\sum_{i=0}^2 a_i p^i}{\sum_{j=0}^2 b_j p^j}. \quad (1)$$

Цель настоящей статьи - определить, используя полученные [1] аналитические выражения, постоянные интегрирования, которые входят в формулы переходной и импульсных характеристик.

Если корни знаменателя $T(p)$ - комплексно-сопряженные: $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св}$ ($\delta = b_1 / 2b_2$, $\omega_0^2 = b_0 / b_2$, $\omega_{св}^2 = \omega_0^2 - \delta^2$), то временные характеристики цепи имеют вид [2]:

$$h(t) = A_1 e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t + \Theta_1) + h(\infty), \quad g(t) = A_2 e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t + \Theta_2) + h(0)\delta(t), \quad (2)$$

если корни - вещественные ($p_{1,2} = -\delta \pm \omega_{св}$), то

$$h(t) = B_1 e^{p_1 t} + C_1 e^{p_2 t} + h(\infty), \quad g(t) = B_2 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + h(0)\delta(t), \quad (3)$$

где $A_1(A_2)$, $\Theta_1(\Theta_2)$, $B_1(B_2)$, $C_1(C_2)$ - постоянные интегрирования; $h(\infty) = T(0)$; $\delta(t)$ - дельта-функция.

Установим связь коэффициентов A и Θ с коэффициентами a_i и b_j операторной функции (1) для различных типов звеньев второго порядка. Вначале рассмотрим переходную характеристику.

Для фильтра нижних частот (ФНЧ) $T(0) = a_0 / b_0$, тогда

$$h(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t + \Theta) + a_0 / b_0. \quad (4)$$

Для определения коэффициентов A и Θ составим систему уравнений с учетом начальных значений $h(0) = h'(0) = 0$ [1]:

$$\begin{cases} h(0) = A \cos \Theta + \frac{a_0}{b_0} = 0 \\ h'(0) = -A\delta \cos \Theta - A\omega_{св} \sin \Theta = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A \cos \Theta = -\frac{a_0}{b_0} \\ A \sin \Theta = \frac{\delta a_0}{\omega_{св} b_0} \end{cases}$$

откуда, предполагая $A > 0$, получаем

$$\Theta = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\omega_{св}}; \quad A = \frac{a_0}{b_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega_{св}}\right)^2} = \frac{a_0 \omega_0}{b_0 \omega_{св}}.$$

Таким образом,

$$h(t) = \frac{a_0}{b_0} \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_{св}} e^{-\delta t} \cos \left(\omega_{св} t - \arctg \frac{\delta}{\omega_{св}} \right) \right].$$

Для полосового фильтра (ПФ) $T(0) = 0$, тогда

$$h(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t + \Theta). \quad (5)$$

С учетом начальных значений $h(0)$, $h'(0)$ [1] составим систему

$$\begin{cases} h(0) = A \cos \Theta = 0 \\ h'(0) = -A\delta \cos \Theta - A\omega_{св} \sin \Theta = \frac{a_1}{b_2}. \end{cases}$$

Так как $A \neq 0$, из первого уравнения находим $\cos \Theta = 0$, $\Theta = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$. Из второго уравнения для

$\Theta = \frac{\pi}{2}$ получаем $A = -\frac{a_1}{b_2 \omega_{св}}$; для $\Theta = \frac{3\pi}{2}$, $A = \frac{a_1}{b_2 \omega_{св}}$, что приводит к одинаковому результату:

$$h(t) = -\frac{a_1}{b_2 \omega_{св}} e^{-\delta t} \cos \left(\omega_{св} t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{a_1}{b_2 \omega_{св}} e^{-\delta t} \sin \omega_{св} t. \quad (6)$$

Для фильтра верхних частот (ФВЧ), как и в случае ПФ, $h(\infty) = T(0) = 0$, поэтому $h(t)$ описывается выражением (5). С учетом начальных значений $h(0)$, $h'(0)$ [1] аналогично получаем

$$\Theta = \arctg \frac{\delta}{\omega_{св}}, \quad A = \frac{a_2}{b_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega_{св}} \right)^2} = \frac{a_2 \omega_0}{b_2 \omega_{св}}. \quad (7)$$

Для режекторного фильтра (РФ) $h(\infty) = T(0) = a_0 / b_0$, следовательно, $h(t)$ имеет вид (4). Учтывая начальные значения $h(0)$, $h'(0)$ [1], составляем систему

$$\begin{cases} h(0) = A \cos \Theta + \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_2}{b_2} \\ h'(0) = -A\delta \cos \Theta - A\omega_{св} \sin \Theta = -2\delta \frac{a_2}{b_2}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} A \cos \Theta = \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_0}{b_0} \\ A \sin \Theta = \frac{\delta}{\omega_{св}} \left(\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_0}{b_0} \right), \end{cases} \quad A = \sqrt{\left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_0}{b_0} \right)^2 + \frac{\delta^2}{\omega_{св}^2} \left(\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_0}{b_0} \right)^2}.$$

При определении значения Θ рассмотрим три варианта:

1. $a_2 / b_2 < a_0 / b_0$, что характерно для режекторного фильтра (РФ_{нч}), у которого частота максимума АЧХ ω_{\max} меньше частоты нуля передачи ω_{\min} [1]. Поскольку $A > 0$, $\cos \Theta < 0$, $\sin \Theta > 0$, то угол Θ соответствует второму квадранту:

$$\Theta = \pi - \arctg \frac{\delta(a_2 b_0 + a_0 b_2)}{\omega_{св}(a_0 b_2 - a_2 b_0)}.$$

2. $a_2/b_2 > a_0/b_0$, что соответствует режекторному фильтру (РФвч), у которого $\omega_{\max} > \omega_{\min}$. Поскольку $A > 0$, $\cos \Theta > 0$, $\sin \Theta > 0$, угол находится в первом квадранте:

$$\Theta = \arctg \frac{\delta(a_2b_0 + a_0b_2)}{\omega_{св}(a_2b_0 - a_0b_2)}$$

3. $a_2/b_2 = a_0/b_0$, что характеризует собственно режекторный фильтр (РФ), АЧХ которого имеет единственный экстремум – минимум на частоте $\omega_0 = \omega_{\min}$. Тогда

$$A = 2 \frac{a_2}{b_2} \frac{\delta}{\omega_{св}}; \quad \Theta = \frac{\pi}{2}.$$

Коэффициенты A и Θ импульсной характеристики $g(t)$ определяются аналогично.

Все полученные выше значения коэффициентов A , Θ временных характеристик вида (2) сведены в табл. 1. Здесь же приведены приближенные значения A , Θ для высокочастотных цепей, когда $\delta \ll \omega_{св}$.

Таблица 1

Тип звена		A	Θ	$\delta \ll \omega_{св}$	
				A	Θ
ФНЧ	$h(t)$	$\frac{a_0 \omega_0}{b_0 \omega_{св}}$	$\pi - \arctg \frac{\delta}{\omega_{св}}$	$\frac{a_0}{b_0}$	π
	$g(t)$	$-\frac{a_0}{b_2 \omega_{св}}$	$\frac{\pi}{2}$	–	–
ФВЧ	$h(t)$	$\frac{a_2 \omega_0}{b_2 \omega_{св}}$	$\arctg \frac{\delta}{\omega_{св}}$	$\frac{a_2}{b_2}$	0
	$g(t)$	$\frac{a_2 \omega_0^2}{b_2 \omega_{св}}$	$\pi - \arctg \frac{\omega_{\max}^2}{2\delta\omega_{св}}$	$\frac{a_2}{b_2} \omega_0$	$\frac{\pi}{2}$
ПФ	$h(t)$	$-\frac{a_1}{b_2 \omega_{св}}$	$\frac{\pi}{2}$	–	–
	$g(t)$	$\frac{a_1 \omega_0}{b_2 \omega_{св}}$	$\arctg \frac{\delta}{\omega_{св}}$	$\frac{a_1}{b_2}$	0
РФнч	$h(t)$	$\sqrt{\left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_0}{b_0}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\omega_{св}^2} \left(\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_0}{b_0}\right)^2}$	$\pi - \arctg \frac{\delta(a_2b_0 + a_0b_2)}{\omega_{св}(a_0b_2 - a_2b_0)}$	$\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_0}{b_0}$	0
РФвч			$\arctg \frac{\delta(a_2b_0 + a_0b_2)}{\omega_{св}(a_2b_0 - a_0b_2)}$		
РФ			$2 \frac{a_2}{b_2} \frac{\delta}{\omega_{св}}$	$\frac{\pi}{2}$	–
РФнч	$g(t)$	$\frac{a_2}{b_2} \sqrt{\frac{(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)^2}{\omega_{св}^2} + 4\delta^2}$	$\pi + \arctg \frac{\omega_{\min}^2 - \omega_{\max}^2}{2\delta\omega_{св}}$	$\frac{a_2}{b_2} \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{\omega_0}$	$\frac{3\pi}{2}$
РФвч			$\pi - \arctg \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2\delta\omega_{св}}$		$\frac{\pi}{2}$
РФ			$2 \frac{a_2}{b_2} \frac{\delta\omega_0}{\omega_{св}}$	$\pi + \arctg \frac{\delta}{\omega_{св}}$	$2\delta \frac{a_2}{b_2}$

В качестве примера определим временные характеристики активных RC – фильтров второго порядка, реализованных с помощью нескольких операционных усилителей. Для обеспечения большей наглядности графиков $h(t)$ и $g(t)$ значения элементов R и C подобраны таким образом, чтобы схемы обладали малой добротностью q (1,2 – 2,5) [3]. Значения полиномиальных коэффициентов операторного коэффициента передачи по напряжению $T(p)$, рассчитанные для данных схем методом узловых напряжений, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Тип фильтра	a_2	a_1	$a_0 \times 10^{10}$	$b_2 = q$	$b_1 = \omega_{\max}$	$b_0 \times 10^{10}$
ФНЧ	–	–	15,28	1,5869565	265111,34	11,153769
ПФ	–	682929	–	2,0972	213749,3	9,5818327
ФВЧ	1,3636	–	–	1,1818181	11223,344	0,014886589
РФ _{НЧ}	1,9016	–	0,188	1,9016	28297,567	0,15227
РФ _{ВЧ}	1,8026354	–	0,12627722	1,8026354	31472,788	0,1785576
РФ	2,5	–	10,85	2,5	208333,33	10,85

Используя приведенную выше методику определения коэффициентов временных характеристик, по данным табл.2 можно получить выражения $h(t)$ и $g(t)$. Например,

для ФНЧ:

$$h(t) = 1,4434573 e^{-83528t} \cos(251608,94t + 2,821) + 1,37;$$

$$g(t) = -382676,91 e^{-83528t} \cos(251608,94t + \pi/2), c^{-1};$$

для ФВЧ:

$$h(t) = 1,2734 e^{-4748,3t} \cos(10169t + 0,4368);$$

$$g(t) = 14291,756 e^{-4748,3t} \cos(10169,4t + 2,444) + 1,1538 \delta(t), c^{-1};$$

для РФ:

$$h(t) = 0,4082483 e^{-41666,7t} \cos(204124t + \pi/2) + 1;$$

$$g(t) = 85049 e^{-41666,7t} \cos(204124t + 3,34295) + \delta(t), c^{-1}.$$

На рис. 1-4 изображены графики временных характеристик, соответствующие звеньям различных типов, параметры которых приведены в табл. 2 (кривая 1 – ФНЧ, 2 – РФ, 3 – ПФ, 4 – РФ_{НЧ}, 5 – РФ_{ВЧ}, 6 – ФВЧ). Анализ графиков позволяет сделать следующие, общие для рассматриваемых звеньев выводы:

1) вид функций $h(t)$ и $g(t)$ каждого из рассмотренных типов фильтров имеет свои характерные особенности;

2) наглядно подтверждается выполнение предельных соотношений между частотными и временными характеристиками цепи. Так, например, для ФНЧ $h(0) = T(\infty) = 0$, $h(\infty) = T(0) = 1$; для РФ $h(0) = T(\infty) = 1$, $h(\infty) = T(0) = 1$ и т. д;

3) иллюстрируется связь переходной и импульсной характеристик. Так, импульсные характеристики ПФ и ФВЧ содержат дельта-функцию, поскольку переходные характеристики этих звеньев имеют ненулевое начальное значение $h(0)$. Или $h(t)$, для ФВЧ и РФ уменьшаются вблизи точки $t = 0$ при $t > 0$, соответственно, $g(t)$ для этих же значений t отрицательна.

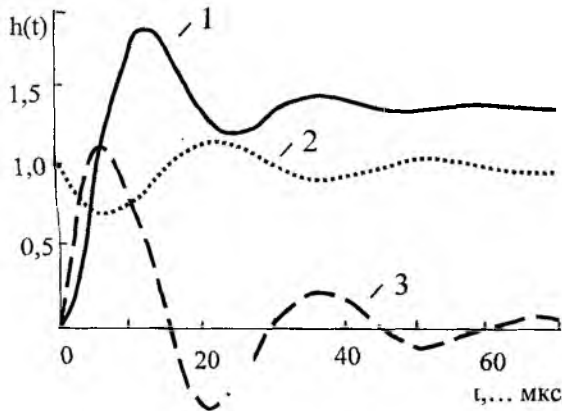


Рис. 1

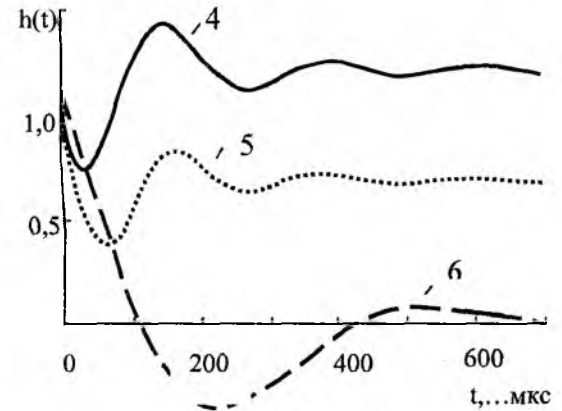


Рис. 2

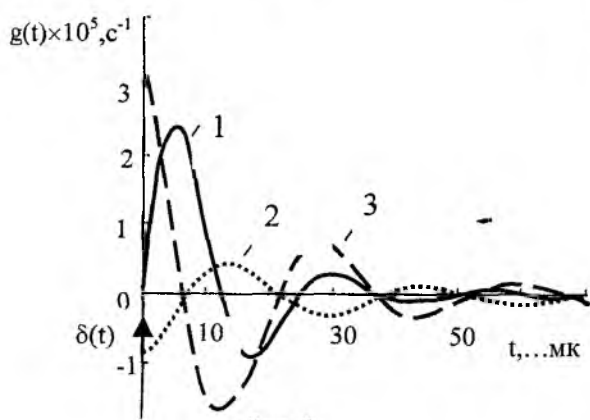


Рис. 3

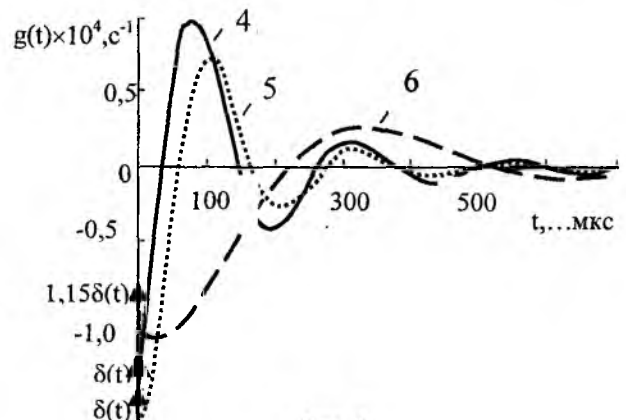


Рис. 4

Определение коэффициентов B и C в случае вещественных корней для временных характеристик вида (3) производится аналогичным образом. В результате получены значения, приведенные в табл.3.

Таблица 3

Тип звена		B	C
ФНЧ	$h(t)$	$-\frac{a_0 p_2}{b_0(p_2 - p_1)}$	$\frac{a_0 p_1}{b_0(p_2 - p_1)}$
	$g(t)$	$-\frac{a_0}{b_2(p_2 - p_1)}$	$\frac{a_0}{b_2(p_2 - p_1)}$
ФВЧ	$h(t)$	$\frac{a_2(b_1 + b_2 p_2)}{b_2^2(p_2 - p_1)}$	$-\frac{a_2(b_1 + b_2 p_1)}{b_2^2(p_2 - p_1)}$
	$g(t)$	$-\frac{a_2}{b_2} \left[\left(\frac{b_1^2}{b_2^2} - \frac{b_0}{b_2} + \frac{b_1}{b_2} p_1 \right) \frac{1}{p_2 - p_1} + \frac{b_1}{b_2} \right]$	$\frac{a_2}{b_2} \left[\left(\frac{b_1^2}{b_2^2} - \frac{b_0}{b_2} + \frac{b_1}{b_2} p_1 \right) \frac{1}{p_2 - p_1} \right]$
ПФ	$h(t)$	$-\frac{a_1}{b_2(p_2 - p_1)}$	$\frac{a_1}{b_2(p_2 - p_1)}$
	$g(t)$	$\frac{a_1(b_1 + b_2 p_2)}{b_2^2(p_2 - p_1)}$	$-\frac{a_1(b_1 + b_2 p_1)}{b_2^2(p_2 - p_1)}$

Тип звена		<i>B</i>	<i>C</i>
РФ	$h(t)$	$\left[\frac{a_2 b_1}{b_2^2} + p_2 \left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_0}{b_0} \right) \right] \frac{1}{p_2 - p_1}$	$-\left[\frac{a_2 b_1}{b_2^2} + p_1 \left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_0}{b_0} \right) \right] \frac{1}{p_2 - p_1}$
	$g(t)$	$-\frac{a_2}{b_2} \left[\left(\frac{b_1^2}{b_2^2} - \frac{b_0}{b_2} + \frac{a_0}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} p_1 \right) \frac{1}{p_2 - p_1} + \frac{b_1}{b_2} \right]$	$\frac{a_2}{b_2} \left[\left(\frac{b_1^2}{b_2^2} - \frac{b_0}{b_2} + \frac{a_0}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} p_1 \right) \frac{1}{p_2 - p_1} \right]$

Выводы.

1. Полученные в работе расчетные соотношения позволяют определять аналитические выражения временных характеристик $h(t)$ и $g(t)$ для звеньев второго порядка по известным полиномиальным коэффициентам операторной функции.

2. Методика и результаты проведенных исследований могут быть полезны как для студентов, так и для преподавателей в процессе курсового проектирования по курсам ОТЦ и ТЭЦ.

Список литературы: [1] Гринченко Л.В., Милютченко И.А. Связь параметров временных характеристик с коэффициентами операторной функции цепи. 1. Определение начальных значений - См. статью в настоящем сборнике. [2] Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. - М.: Радио и связь, 1986. - 544 с. [3] Мошиц Г., Хорн П. Проектирование активных фильтров. - М.: Мир, 1984. - 320 с.

Харьковский государственный технический
университет радиотехники

Поступила в редколлегию 2.09.2000