УДК 510.62 : 681.51.015

В. В. ШЛЯХОВ, канд. техн. наук,
Ю. В. НАТАЛУХА, канд. техн. наук,
С. Н. ГЕРАСИН, Н. Н. САРНАВСКАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДИКАТЫ НА ВЫПУКЛОМ ТЕЛЕ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

При построении различных моделей цветового зрения очень важно адекватно описать множество входных сигналов. В данной статье делается попытка описывать входные сигналы как выпуклое тело V в некотором линейном пространстве со скалярным произведением [1].

Определение. *Пусть* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ *тогда, если любые две точки* $x, y \in Y$ *и отрезок* $[x, y] = \{z \mid \lambda x + (1-\lambda) y\}$ *также принадлежит* V, *то* V — *выпуклое тело* [2].

Определим на $V \otimes V$ бинарный предикат $\Phi(x, y)$, заданный следующим образом: $\Phi(x, y) = (F(x), F(y))$, где $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ — линейные линейно независимые функционалы.

Рассмотрим, какими свойствами обладает предикат $\Phi(x, y)$.

1. *Рефлексивность.* $\Phi(y, y) = 1$.
2. *Симметричность.* $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$.
3. *Транзитивность.* Если $\Phi(x, y) = \Phi(y, z) = 1$, то $\Phi(x, z) = 1$.
4. *Выпуклая аддитивность.* Пусть числа $\alpha, \beta > 0$ удовлетворяют условию $\alpha + \beta = 1$ и $\Phi(x, y) = \Phi(x', y') = 1$, тогда $\Phi(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = 1$.
5. *n-мерность.* Выберем в V систему линейно независимых векторов $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$, тогда для любого $x \in V$ найдутся такое множество индексов $I(x) \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$ и числа $\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_{n+1}(x)$, выбираемые единственным образом так, что выполняется условие

$$\Phi\left(\alpha_0(x)\, x + \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x)\, e_i,\ \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x)\, e_i\right) = 1,$$

причем $\alpha_0(x) = \left(\sum_{i \in I(x)} \beta_i(x)\right)^{-1} > 0$, $\alpha_i(x) = \alpha_0 \beta_i > 0$, $i \in I(x)$. $\alpha_i = \alpha_0 \beta_i \geqslant 0$, $i \in \bar{I}(x)$, $\alpha_0 + \sum_{i \in I(x)} \alpha_i = 1$, $\sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i = 1$. Обозначим

$\sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x)\, e_i = x_1$, $\sum_{i\in \overline{I}(x)} \alpha_i(x)\, e_i = x_2$, свойство n-мерности тогда можно записать $\Phi(\alpha_0(x)\, x + x_1,\ x_2) = 1$.

6. *Непрерывность.* Функционалы $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ непрерывны в V.

7. *Выпуклая полуаддитивность.* Если $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ и $\Phi(\gamma x + (1-\gamma)\, t,\ \gamma y + (1-\gamma)\, t) = 1$, то $\Phi(x,\ y) = 1$.

8. *Выпуклая однородность.* Пусть элементы $\{x,\ y,\ \lambda x + t,\ \lambda y + t\} \in V$ и $\Phi(\lambda x + t,\ \lambda y + t) = 1$, то $\Phi(x,\ y) = 1$. Все элементы из выпуклого тела будем обозначать и в дальнейшем строчными латинскими буквами, а греческими числа из R^1. Некоторые из указанных свойств можно усилить. Покажем это.

Лемма 1. *Если предикат* $\Phi(x,\ y)$ *удовлетворяет свойствам* $(1-8)$, *то*:

а) *для* $\forall \{x_i,\ y_i\}_{i=1}^{r}$ и $\forall \{\alpha_i\}_{i=1}^{r} \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$ *выполняется импликация*

$$\Phi(x_i,\ y_i) = 1 \supset \Phi\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i,\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i\right) = 1;$$

б) *для* $\forall x,\ y,\ \{z_1, \ldots, z_r\} \in V$ *и* $\forall \alpha,\ \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\} \geqslant 0$, $\alpha + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r = 1$ *верно условие*

$$\Phi\left(\alpha x + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i z_i,\ \alpha y + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i z_i\right) = 1 \supset \Phi(x,\ y) = 1.$$

Доказательство. Первое утверждение докажем индукцией по Φ. Из свойства выпуклой аддитивности следует его справедливость при $r=2$, т. е. фиксирована база индукции. Пусть теперь условие 1 справедливо для r от 2 до d. Докажем его для $r=d+1$. Для этого рассмотрим

$$\{x_i,\ y_i\}_{i=1}^{d+1} \in V,\ \{\alpha_i\}_{i=1}^{d+1} \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1,\ \Phi(x_i,\ y_i) = 1,\ i = 1, \ldots, d+1.$$

Введем набор чисел $\gamma_{d+1} = 1 - \alpha_{d+1}$, $\gamma_i = \dfrac{\alpha_i}{\gamma_{d+1}}$, $i = \overline{1, d}$, без ограничения общности можно считать $\alpha_{d+2} \neq 1$, т. е. $\gamma_{d+1} \neq 0$. Тогда $\gamma_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, d+1$ и

$$\sum_{i=1}^{d} \gamma_i = \frac{1}{\gamma_{d+1}} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i = \frac{1}{1-\alpha_{d+1}} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i = \frac{1-\alpha_{d+1}}{1-\alpha_{d+1}} = 1,$$

отсюда по предположению индукции имеем

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{d} \gamma_i x_i,\ \sum_{i=1}^{d} \gamma_i y_i\right) = 1.$$

Обозначим $z_1=\sum\gamma_i x_i$, $z_2=\sum\gamma_i y_i$ в этом случае $\Phi(z_1, z_2)=1$, $\Phi(x_{d+1}, y_{d+1})=1$ и из выпуклой аддитивности можно записать $\Phi(\gamma_{d+1}z_1+(1-\gamma_{d+1})x_{d+1},\ \gamma_{d+1}z_2+(1-\gamma_{d+1})y_{d+1})=1$, но $\gamma_{d+1}z_1=\gamma_{d+1}\sum\gamma_i x_i=\sum\alpha_i x_i$, $i=1, \ldots, d$, $\gamma_{d+1}z_2=\gamma_{d+1}\sum\gamma_i y_i=\sum\alpha_i y_i$, $i=1, \ldots, d$. В силу этого $\Phi(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_{d+1}x_{d+1}, \alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_{d+1}y_{d+1})=1$.

Первое утверждение доказано. Перейдем к доказательству второго утверждения леммы. Воспользуемся аналогичными индуктивными рассуждениями, при $r=1$ утверждение (б) совпадает с выпуклой полуаддитивностью. Пусть при $r=t$ утверждение верно, покажем, что оно верно и для $r=t+1$. Рассмотрим

$$\xi_{t+1}=1-\gamma_{t+1},\ \alpha'=\frac{\alpha}{\xi_{t+1}},\ \xi_i=\frac{1}{\xi_{t+1}}\gamma_i,\ i=1, 2, \ldots, r.$$

Тогда

$$\alpha'+\sum_{i=1}^{t}\xi_i=1,\ \alpha x+\sum_{i=1}^{t+1}\gamma_i z_i=(\alpha' x+\sum_{i=1}^{t}\xi_i z_i)\,\xi_{t+1}+(1-\xi_{t+1})\,z_{t+1}.$$

Аналогично $\alpha y+\sum_{i=1}^{t+1}\gamma_i z_i=\xi_{t+1}\,(\alpha' x+\sum_{i=1}^{t+1}\xi_i z_i)+(1-\xi_{t+1})\,z_{t+1}$.

Поскольку выполняется

$$\Phi(\alpha x+\sum_{i=1}^{t+1}\gamma_i z_i,\ \alpha y+\sum_{i=1}^{t+1}\gamma_i z_i)=1,$$

то из предыдущих равенств и выпуклой полуаддитивности получим

$$\Phi(\alpha' x+\sum_{i=1}^{t}\xi_i z_i,\ \alpha' y+\sum_{i=1}^{t}\xi_i z_i)=1.$$

Теперь по предположению индукции имеем $\Phi(x, y)=1$. Доказательство леммы закончено. Выведем еще один вспомогательный результат.

Лемма 2. Пусть для любого $x\in V$ задан оператор Ax следующим соотношением:

$$Ax=\frac{1}{\alpha_0(x)}\left(\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)\,e_i-\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)\,e_i\right)=\frac{x_2-x_1}{\alpha_0(x)},$$

где x_1, x_2, α_1, ..., α_{n+1}, e_1, ..., e_{n+1} определены в свойстве n-мерности. Тогда для любых x, $y\in V$ и произвольных α, $\beta\geqslant 0$, причем $\alpha+\beta=1$, выполняется $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$.

Доказательство. Пусть $\alpha+\beta\geqslant 1$, α, $\beta\geqslant 0$, x, $y\in V$, введем в рассмотрение числа

$$\gamma=\frac{\alpha\alpha_0(y)}{\alpha\alpha_0(y)+\beta\alpha_0(x)},\quad \gamma'=\frac{\beta\alpha_0(x)}{\alpha\alpha_0(y)+\beta\alpha_0(x)},$$

понятно, что $\gamma+\gamma'=1$. Для произвольных $x, y \in V$ по свойству n-мерности можно записать $\Phi(\alpha_0(x)x+x_1, x_2)=1$, $\Phi(\alpha_0(y)y+y_1, y_2)=1$, отсюда согласно выпуклой аддитивности $\Phi(\gamma[\alpha_0(x)x+x_1]+\gamma'[\alpha_0(y)y+y_1], \gamma x_2+\gamma' y_2)=1$ или, что то же самое, $\Phi([\gamma\alpha_0(x)x+\gamma'\alpha_0(y)y]+(\gamma x_1+\gamma' y_1), \gamma x_2+\gamma' y_2)=1$.

Обозначим теперь $\gamma x_1+\gamma' y_1=\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i e_i$, $\gamma x_2+\gamma' y_2=\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i e_i$,

$$\alpha_0(x)\gamma x+\alpha_0(y)\gamma' y=\frac{\alpha_0(x)\alpha_0(y)}{\alpha\alpha_0(y)+\beta\alpha_0(x)}[\alpha x+\beta y]=\theta[\alpha x+\beta y].$$

Введем теперь множество индексов $N=\{i/\delta_i>i\ \sigma_i\sigma_i'\}$ и обозначим

$$u=\sum_{i\in N}(\delta_i-\delta_i')e_i,\ v=\sum_{i\in N}(\delta_i'-\delta_i)e_i,\ \gamma x_1+\gamma' y_1=\sum_{i\in N}\delta_i' e_i+$$

$$+\sum_{i\in N}\delta_i e_i+u=z+u,\ \gamma x_2+\gamma' y_2=\sum_{i\in N}\delta_i' e_i+\sum_{i\in N}\delta_i e_i+v=z+v.$$

Отсюда $v-u=\gamma(x_2-x_1)+\gamma'(y_2-y_1)=\gamma\alpha_0(x)Ax+\gamma'\alpha_0(y)Ay=$ $=\theta[\alpha Ax+\beta Ay]$.

Значит, $$\alpha Ax+\beta Ay=\frac{v-u}{\theta}.$$

Теперь, используя новые обозначения, преобразуем следующее равенство:

$$\Phi([\gamma\alpha_0(x)x+\gamma'\alpha_0(y)y]+(\gamma x_1+\gamma' y_1), \gamma x_2+\gamma' y_2)=1,$$
$$\Phi([\gamma\alpha_0(x)x+\gamma'\alpha_0(y)y]+u+z, v+z)=1,\ \Phi(\theta[\alpha x+\beta y]+$$
$$+u+z, v+z)=1. \qquad (1)$$

Пусть теперь $\mu=\sum_{i\in N}(\delta_i-\delta_i')$, $\xi=\sum_{i\in N}(\delta_i'-\delta_i)$,

$$\Phi\left(\mu\frac{\theta[\alpha x+\beta y]+u}{\mu}+z,\ \xi\frac{v}{\xi}+z\right)=1.$$

Заметим, что сумма коэффициентов при $x, y, \{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ в равенстве (1) равна единице, т. е.

$$\gamma\alpha_0(x)+\gamma'\alpha_0(y)+\sum_{i\in I(x)}\gamma\alpha_i(x)+\sum_{i\in I(y)}\gamma'\alpha_i(y)=1,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i=\sum_{i\in I(x)}\gamma\alpha_i(x)+\sum_{i\in I(y)}\gamma'\alpha_i(y).$$

С другой стороны, из равенства (1) так же следует

$$\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i'=\sum_{i\in I(x)}\gamma\alpha_i(x)+\sum_{i\in I(y)}\gamma'\alpha_i(y)=1,$$

Из последних трех равенств получим

$$\gamma\alpha_0(x)+\gamma'\alpha_0(y)+\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i=\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i'=1,\quad \theta+\sum_{i\in N}\delta_i+\sum_{i\in N}\delta_i'=$$

$$=\sum_{i\in N}\delta_i'+\sum_{i\in N}\delta_i'=1,\ \theta+\sum_{i\in N}(\delta_i-\delta_i')=\sum_{i\in N}(\delta_i'-\delta_i),\ \theta+\mu=\xi,$$

$$\frac{\theta[\alpha x+\beta y]}{\xi}+\frac{u}{\xi}=\frac{(\xi-\mu)(\alpha x+\beta y)}{\xi}+\frac{\mu}{\xi}\frac{u}{\mu}.$$

Заметим, что $\alpha x+\beta y\in V$, $\frac{u}{\mu}\in V$, поскольку сумма коэффициентов при элементе равна

$$\sum_{i\in N}\frac{\delta_i-\delta_i'}{\sum\limits_{i\in N}(\delta_i-\delta_i')}=1,$$

следовательно, $\frac{\theta}{\xi}(\alpha x+\beta y)+\frac{u}{\xi}\in V$.

Итак, на основании свойства однородности из

$$\Phi\left(\xi\,\frac{\theta[\alpha x+\beta y]+u}{\xi}+z,\ \xi\frac{v}{\xi}+z\right)=1.$$

следует $\Phi\left(\frac{\theta}{\xi}(\alpha x+\beta y)+u,\ \frac{v}{\xi}\right)=1.$

Данное равенство совпадает со свойством n-мерности, поэтому

$$A(\alpha x+\beta y)=\frac{v-u}{\theta}.$$

Сравнивая последнюю формулу с ранее полученным соотношением, выводим

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay.$$

Лемма доказана.

Теперь можно перейти к доказательству основного факта.

Теорема. *Для того чтобы предикат $\Phi(x, y)$, заданный на декартовом квадрате выпуклого тела $V\times V$, был предикатом n-мерной линейности, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял свойствам (1—8).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть предикат $\Phi(x, y)$ есть предикат n-мерной линейности, в силу этого предположения он представим в виде

$$\Phi(x, y)=D((f_1(x), \ldots, f_n(x)),\ f_1(y), \ldots, f_n(y)), \qquad (2)$$

где $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — линейные функционалы на V. Докажем выполнение свойства n-мерности, все остальные свойства доказываются несложной проверкой.

Пусть $\{e_1, ..., e_{n+1}\} \in V$ — линейно независимые векторы. Рассмотрим систему относительно неизвестных $\beta_1(x), ..., \beta_{n+1}(x)$:

$$\begin{cases} f_j(x) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i(x) f_j(e_i), \ j = 1, ..., n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i(x) = 1. \end{cases}$$

Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ f_1(e_1) & f_1(e_2) & \dots & f_1(e_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(e_1) & f_n(e_2) & \dots & f_n(e_{n+1}) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Если доказать, что определитель матрицы A не равен нулю, то система (3) разрешима единственным образом и числа $\beta_1(x), ..., \beta_{n+1}(x)$ непрерывно зависят от x. Эквивалентными преобразованиями определитель $|A|$ можно привести к виду

$$|A| = \begin{vmatrix} f_1(e_2 - e_1) & \dots & f_1(e_{n+1} - e_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n(e_2 - e_1) & \dots & f_n(e_{n+1} - e_1) \end{vmatrix}.$$

Докажем теперь, что система векторов $\{e_i - e_1\}_{i=2}^{n+1}$ линейно независима, если линейно независима система $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$. Действительно, пусть векторы $\{e_i - e_1\}_{i=2}^{n+1}$ линейно зависимы, тогда верно следующее равенство:

$$\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i (e_i - e_1) = 0,$$

при некоторых $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$, отличных от нуля. Отсюда, раскрыв скобки, получим

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i - \left(\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \right) e_1 = 0.$$

Данное равенство противоречит предположению о линейной независимости векторов $e_1, ..., e_{n+1}$. Следовательно, можно считать, что матрица A есть матрица перехода от одной линейно независимой системы векторов ранга $n+1$ к другой линейно независимой системе того же ранга. Поэтому определитель $|A|$ отличен от нуля.

Нам осталось показать, что свойство n-мерности можно записать в том виде, который был описан в начале статьи. Положим $I(x) = \{i \mid \beta_i(x) < 0\}$, множество $I(x)$ может оказаться и пустым. Каждый вектор $x \in L(e_1, ..., e_{n+1})$ можно записать в виде $x = \beta_1(x) e_1 + \beta_2(x) e_2 + ... + \beta_{n+1}(x) e_{n+1}$, где $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i(x) = 1$.

Положим

$$\alpha_0(x) = \Big(\sum_{i \in \bar{I}(x)} \beta_i(x)\Big)^{-1},\ \alpha_i(x) = \alpha_0(x)\beta_i(x) > 0,\ i \in \bar{I}(x),$$

$$\alpha_i(x) = -\alpha_0(x)\beta_i(x) \geqslant 0,\ i \in I(x).$$

Рассмотрим элементы

$$\alpha_0(x)x + \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i,\quad \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i.$$

Подсчитаем теперь сумму коэффициентов у каждого элемента

$$\alpha_0(x) + \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) = \alpha_0(x)\Big(1 - \sum_{i \in \bar{I}(x)} \beta_i(x)\Big) = 1,$$

$$\sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) = \alpha_0(x) \sum_{i \in \bar{I}(x)} \beta_i(x) = 1.$$

Отсюда следует, что элементы лежат в выпуклом теле

$$\alpha_0(x)x + \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i \in V,\quad \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i \in V$$

и выполняется равенство

$$\Phi\Big(\alpha_0(x)x + \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i,\ \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i\Big) = 1.$$

Как уже отмечалось, в силу непрерывности линейных функционалов $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_{n+1}(x)$ непрерывны как функционалы $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$, ..., $\beta_{n+1}(x)$, так и $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ..., $\alpha_{n+1}(x)$.

Тем самым полностью доказано свойство n-мерности предиката $\Phi(x, y)$.

Достаточность. Пусть предикат $\Phi(x, y)$ удовлетворяет свойствам (1—8). Сначала покажем, что $\Phi(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$ и $I(x) = I(y)$. Согласно условию рефлексивности $\Phi(e_i, e_i) = 1$, $i = 1, n+1$, тогда из леммы I следует равенство

$$\Phi\Big(\alpha_0(x)x + \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i,\ \alpha_0(x)y + \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i\Big) = 1.$$

С другой стороны, на основе n-мерности можно записать

$$\Phi\Big(\alpha_0(x)x + \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i,\ \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i\Big) = 1,$$

из симметричности и транзитивности следует

$$\Phi\Big(\alpha_0(x)x + \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i,\ \alpha_0(x)y + \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x) e_i\Big) = 1.$$

В силу однозначности $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ и $I(x)$ можно утверждать что $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, $i = 0, ..., n+1$ и $I(x) = I(y)$. Эти же рассуждения можно провести и в обратном порядке, причем на по

следнем шаге следует воспользоваться полуаддитивностью предиката $\Phi(x, y)$. Поскольку $\alpha_0(x)=\alpha_0(y)$ и

$$x_1=\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)\,e_i=\sum_{i\in I(y)}\alpha_i(y)\,e_i=y_1,\quad x_2=\sum_{i\in\overline{I}(x)}\alpha_i(x)\,e_i=$$
$$=\sum_{i\in\overline{I}(y)}\alpha_i(y)\,e_i=y_2,$$

то верно равенство

$$\frac{x_2-x_1}{\alpha_0(x)}=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x)\,e_i=\frac{y_2-y_1}{\alpha_0(y)}=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(y)\,e_i.$$

Из этого равенства выводим $\beta_i(x)=\beta_i(y)$, $i=1, \ldots, n+1$.

Из этих соображений и леммы 2 следует $\beta_i(\alpha x+\gamma y)=\alpha\beta_i(x)+$ $+\gamma\beta_i(y)$, $i=1, \ldots, n+1$, здесь $\alpha+\gamma=1$, $\alpha, \gamma\geqslant 0$. В обратную сторону, пусть $\beta_i(x)=\beta_i(y)$, $i=1, \ldots, n+1$, из этого равенства необходимо получить, что $\Phi(x, y)=1$. Действительно, если

$$\frac{x_2-x_1}{\alpha_0(x)}=\frac{y_2-y_1}{\alpha_0(y)},\quad \text{или}$$
$$(x_2-x_1)\Big(\sum_{i\in\overline{I}(x)}\beta_i(x)\Big)=(y_2-y_1)\Big(\sum_{i\in\overline{I}(y)}\beta_i(y)\Big),$$

что означает равенство $x_2-x_1=y_2-y_1$ или $\alpha_i(x)=\alpha_i(y)$ при $i=1, 2, \ldots, n+1$.

Кроме того, покажем, что все $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ представимы в виде $\beta_i(x)=g_i(x)+\beta_i(0)$, $i=1, 2, \ldots, n+1$, здесь $\{g_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ — линейные функционалы. Проверим это утверждение $g_i(\lambda x)=$ $=\beta_i(\lambda x)-\beta_i(0)=\beta_i(\lambda x+(1-\lambda)0)-\beta_i(0)=\lambda\beta_i(x)+(1-\lambda)\beta_i(0)-$ $-\beta_i(0)=\lambda(\beta_i(x)-\beta_i(0))=\lambda g_i(x)$. Однородность выполняется, проверим аддитивность;

$$g_i(x+y)=g_i\left(2\,\frac{x+y}{2}\right)=2g_i\left(\frac{x+y}{2}\right)=2\left(\beta_i\left(\frac{x+y}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\beta_i(0)\right)=2\left(\left(\frac{\beta_i(x)+\beta_i(y)}{2}\right)-\beta_i(0)\right)=(\beta_i(x)-\beta_i(0))+$$
$$+(\beta_i(y)-\beta_i(0))=g_i(x)+g_i(y).$$

Из непрерывности функционалов $\beta_i(x)$ следует непрерывность $g_i(x)$, что и определяет вместе с аддитивностью и однородностью линейность функционалов $g_i(x)$. Следовательно, предикат $\Phi(x, y)=1$ тогда и только тогда, когда $g_i(x)=g_i(y)$, $i=1, 2, \ldots, n+1$.

Нам осталось показать, что число функционалов можно сократить до n. В самом деле, по предположению $\beta_1(x) + \beta_2(x) + \ldots + \beta_{n+1}(x)$ в силу этого замечания $\beta_{n+1}(x) = 1 - \beta_1(x) - \ldots - \beta_n(x)$. Таким образом, всякий функционал $\beta_i(x)$ можно выразить через n-остальных. Теперь зададимся вопросом, можно ли уменьшить и это число?

Не умаляя общности, предположим, что функционал $\beta_1(x)$ — «лишний», тогда запишем свойства рефлексивности и n-мерности для вектора e_1, $\Phi(e_1, e_1) = 1$:

$$\Phi\left(\alpha_0(e_1)\, e_1 + \sum_{i \in I(e_1)} \alpha_i(e_1)\, e_i,\ \sum_{i \in I(e_1)} \alpha_i(e_1)\, e_i\right) = 1.$$

Сравнивая эти два равенства, замечаем, что $\alpha_0(e_1) = 1$, $I(e_1) = \varnothing$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$. Это означает, что $\beta_1 = 1$, $\beta_i = 0$, $i = 2,\ n+1$. Так как мы считаем функционал $\beta_1(x)$ лишним, значит, для обеспечения равенства какой-либо из функционалов $\beta_2(e_1), \ldots, \beta_{n+1}(e_1)$ является не нулевым, что противоречит полученным результатам. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь общий вид функционалов при конкретном выборе множества входных сигналов. Из теоремы Рисса об общем виде линейного функционала в пространствах со скалярным произведением следует, что линейный оператор представим

$$F: L \to R^n,\ Fx = ((x,\ a_1),\ \ldots,\ (x,\ a_n)).$$

Здесь под $\{a_i\}_{i=1}^n$ понимается ядро линейного функционала, причем a_i — элемент из того же пространства. В эвклидовых пространствах конечной размерности типа R^n скалярное произведение можно определить как билинейную форму:

$$(x,\ a) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i.$$

В гильбертовом пространстве $L_2[a,\ b]$ общий вид функционала таков:

$$f(x) = \int_a^b x(\tau)\, a(\tau)\, d\tau.$$

Общий вид известен не только в рефлексивных пространствах. Например, в банаховом пространстве непрерывных функций $C[a,\ b]$ функционал представим интегралом Стильтьеса [3]

$$f(x) = \int_a^b x(\tau)\, dG(\tau),$$

где $G(\tau)$ — функция ограниченной вариации. Все функционалы описанного типа могут быть идентифицированы на основании выполнения условий теоремы.

Список литературы: 1. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. М., 1969. 475 с. 2. *Садовничий В. А.* Теория операторов. М., 1986. 386 с. 3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972. 496 с.

Поступила в редколлегию 26.12.88